

..

PRINCIPIUL EXTREMAL ȘI DEMONSTRAȚIA PRIN INDUCȚIE COMPLETĂ

GABRIELA PÎRVULESCU¹⁾

1. Introducere

Inducția matematică și principiul extremal sunt moduri de rezolvare foarte des întâlnite (mai ales în combinatorică). În foarte multe probleme, metoda inducției și principiul extremal sunt intersanjabile. Cu alte cuvinte, dacă reușim să rezolvăm o problemă cu una dintre aceste metode, este interesant de văzut dacă am fi putut rezolva și prin cealaltă metodă. Totuși, fiecare metodă de rezolvare are limitările sale: la inducție trebuie să avem grijă cu păstrarea condițiilor din ipoteză, iar la principiul extremal trebuie să ne asigurăm că elementul minim/maxim chiar există. În cele ce urmează vom prezenta câteva probleme, alături de soluții ale lor, prin care vom ilustra legătura dintre cele două metode.

-

¹⁾Studentă, Facultatea de Matematică și Informatică București.

Motivul pentru care, dacă funcționează o abordare, atunci funcționează și cealaltă este acela că justificarea valabilității raționamentului inductiv este, în principiu, următoarea: dacă mulțimea A a valorilor variabilei pentru care proprietatea este falsă este nevidă, luăm cel mai mic element a al lui A și constatăm că proprietatea trebuie să fie falsă și pentru predecesorul lui a , ceea ce contrazice minimalitatea lui a .

2. Probleme rezolvate

Problema 1. (BMO 2002) *Fie n puncte $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ ($n \geq 4$) în plan, astfel încât oricare trei dintre ele sunt necoliniare. Unele perechi de puncte distincte sunt unite prin segmente, astfel încât fiecare punct este conectat cu cel puțin trei dintre punctele date.*

Demonstrați că există $k > 1$ și există punctele distincte $X_1, X_2, \dots, X_{2k}$ în mulțimea $\{A_1, A_2, A_3, \dots, A_n\}$, astfel încât pentru fiecare $i \in \overline{1, 2k-1}$, punctul X_i este conectat cu X_{i+1} , iar X_{2k+1} este conectat cu X_1 .

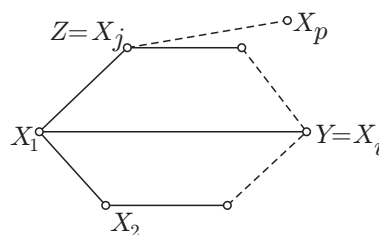
Soluțiile propuse vor utiliza terminologiile corespunzătoare din teoria grafurilor. La aceasta problemă vom prezenta prima dată soluția bazată pe principiul extremal care este, de altfel, și soluția oficială.

Cum graful este finit, acesta conține un număr finit de lanțuri. Atunci, putem alege cel mai lung lanț $X_1 X_2 \dots X_p$ al grafului.

Vârful X_1 , mai are, pe lângă X_2 , minim doi alți vecini. Fie aceștia Y și Z . Dacă vreunul dintre Y și Z nu ar fi printre vârfurile lanțului, atunci lanțul s-ar putea extinde și s-ar contrazice maximalitatea. Deci putem considera în continuare că Y și Z sunt X_i și X_j , unde $2 < i < j \leq p$. În acest caz, minim unul dintre ciclurile

$$X_1 X_2 \dots X_i, \quad X_1 X_2 \dots X_j, \quad X_i X_{i+1} \dots X_j X_1$$

are număr par de vârfuri. Astfel, concluzia este demonstrată.



Prezentăm în continuare soluția prin inducție:

Putem demonstra afirmația prin inducție tare după numărul n de vârfuri.

Cazul de bază: $n = 4$. Din ipoteză rezultă că fiecare vârf e conectat cu oricare alt vârf, deci în mod evident găsim un ciclu cu 4 vârfuri.

Pasul de inducție. Cum graful este finit, iar fiecare vârf are gradul cel puțin doi (chiar mai mare), putem afirma că există în graf cel puțin un ciclu. Dacă acesta are număr par de vârfuri, suntem gata.

În caz contrar, fie $C = (X_1, X_2, \dots, X_{2k+1})$ un ciclu impar în G . Dacă ar exista vreo pereche de vârfuri de tipul X_i, X_j , cu $i \neq j$, ce ar fi conectate printr-un drum ce trece doar prin vârfuri ce nu sunt în C , atunci s-ar forma minim un ciclu par în graf (format de acest drum și unul din drumurile pe C între cele două vârfuri). Deci putem considera în continuare că așa ceva nu se întâmplă.

Aceasta înseamnă că un ciclu din graful G/C (graful obținut prin contractarea tuturor vârfurilor din C într-un singur vârf) este, de fapt, și un ciclu în G .

Mai mult, graful G/C păstrează proprietatea că fiecare vârf are grad cel puțin 3 și, evident, G/C are cel puțin 4 vârfuri.

Prin urmare, putem aplica ipoteza de inducție asupra grafului G/C , iar astfel inducția e încheiată.

Problema 2. (Concursul Kürschak) *Demonstrați că dintr-o mulțime finită arbitrară H de puncte ale planului poate fi selectată o submulțime K care satisface următoarele proprietăți:*

- (1) *orice dreaptă verticală sau orizontală a planului intersectează K în cel mult două puncte;*
- (2) *orice punct al lui $H \setminus K$ se află pe un segment vertical sau orizontal, cu capetele în K .*

Prezentăm mai întâi soluția prin inducție.

Pentru comoditate, vom spune că o linie dreaptă orizontală sau verticală este O/V. Facem inducție după $|H|$. Dacă $|H| = 1$, atunci $K = H$ satisface condițiile din problemă. Să presupunem că am demonstrat deja afirmația pentru orice mulțime cu cel mult n puncte și fie mulțimea H cu $n+1$ puncte. Fie mulțimea K^* alcătuită din acele puncte ale lui H care sunt cele mai de jos sau cele mai de sus pe verticala lor. Evident, K^* îndeplinește condiția (b). Dacă este îndeplinită și condiția (a), atunci $K = K^*$ corespunde.

Dacă (a) nu este îndeplinită, atunci există un punct A al lui K^* astfel încât pe linia orizontală a lui A există puncte ale lui K^* și la stânga și la dreapta lui A , să spunem B și C . Conform ipotezei de inducție, există o submulțime K a mulțimii de n puncte $H \setminus \{A\}$ astfel încât fiecare dreaptă O/V să conțină cel mult două puncte și fiecare punct din $H \setminus (A \cup K)$ este acoperit de segmentele O/V definite de K . Pretindem că mulțimea K funcționează și pentru mulțimea H . Pentru aceasta, este suficient să arătăm că punctul A se află pe un segment orizontal cu capetele în K .

Să examinăm punctul B . Deoarece B este cel mai de jos punct din H sau cel mai de sus punct din H al unei drepte verticale, avem că fie $B \in K$, fie B se află pe un segment orizontal cu capetele în K . În ambele variante

există pe orizontala lui A , la stânga acestuia, un punct care aparține mulțimii K . În mod similar, dacă $C \notin K$, atunci C se află pe un segment orizontal cu capetele în K , deci K are și un punct la dreapta lui C (deci la dreapta lui A). Am obținut că A este într-adevăr în interiorul unui segment orizontal cu capetele în mulțimea K , deci K satisface condițiile problemei, adică afirmația este adevărată și pentru mulțimi cu $n + 1$ puncte. Aceasta confirmă pasul de inducție și completează demonstrația.

Vom prezenta în continuare soluția bazată pe principiul extremal:

Numesc o mulțime K *bună* dacă ea satisface condiția 2). Există cel puțin o mulțime bună, aceasta fiind H . Numărul mulțimilor bune fiind finit, pot să aleg o mulțime bună K_0 care conține numărul minim de triplete de puncte coliniare situate pe aceeași verticală sau pe aceeași orizontală. Arătăm că aceasta verifică și condiția a).

Presupunem contrariul: există trei puncte coliniare $A, B, C \in K_0$ și $B \in (AC)$, cu AC , de exemplu, vertical. Atunci eliminăm B și considerăm mulțimea

$$K_1 = K_0 \setminus \{B\}.$$

Această mulțime este bună, cu excepția situației în care în mulțimea K_1 se află un punct D pe aceeași orizontală cu B , iar mulțimea H conține puncte situate între B și D , care nu sunt situate între două puncte ale lui K_0 situate pe aceeași verticală.

În acest caz, fie E_0 punctul de acest fel, cel mai apropiat de B , al mulțimii $BD \cap H$. Mulțimea

$$K_2 = K_1 \cup \{E_0\}$$

este bună, iar E_0 nu poate fi colinar cu două puncte din K_2 decât dacă acestea se află în interiorul segmentului DE_0 . Aceasta arată că mulțimea K_2 conține mai puține triplete de puncte coliniare situate pe aceeași verticală sau pe aceeași orizontală decât mulțimea K_0 , ceea ce contrazice minimalitatea lui K_0 .

Problema 3. (APMO 2008 - Generalizare) *Considerăm o clasă de cel puțin $\binom{n}{2} + 1$ elevi. În această clasă se formează grupuri de câte trei membri, oricare două grupuri distincte având cel mult un membru în comun. Demonstrați că există o mulțime de n elevi din clasă care nu conține complet niciunul dintre aceste grupuri.*

Prezentăm mai întâi soluția prin inducție.

Cazul de bază. Pentru $n = 3$, avem minim $\binom{3}{2} + 1 = 4$ elevi. Atunci putem alege o mulțime de 3 elevi, dintre care 2 sunt în primul grup, iar al treilea nu este. Din ipoteză, elevii aleși nu pot face parte din același grup.

Pasul inductiv. Presupunem că afirmația este adevărată pentru un anumit n , adică într-o clasă cu minim $\binom{n}{2} + 1$ elevi, există o submulțime de n elevi care nu conține complet niciun grup.

Acum considerăm o clasă cu cel puțin $\binom{n+1}{2} + 1$ elevi. Conform ipotezei de inducție, există o submulțime E de n elevi care nu conține niciun grup complet. În această submulțime există $\binom{n}{2}$ perechi de elevi.

Considerăm în continuare grupurile care au exact două persoane în comun cu mulțimea E . Pentru fiecare dintre acestea, considerăm cel de-al treilea membru și îl adăugăm la o mulțime pe care o vom nota în continuare cu A .

Cum în mulțimea noastră sunt $\binom{n}{2}$ perechi de elevi, rezultă că mulțimea A are cardinalul maxim $\binom{n}{2}$.

Avem

$$\binom{n+1}{2} + 1 = \binom{n}{2} + n + 1$$

Deci, dacă dintre elevii din clasă îi eliminăm pe cei din mulțimea A și pe cei din mulțimea E , rămânem cu minim un elev. Acest ultim elev poate fi adăugat la submulțimea E fără a crea un grup complet nou (el nu poate completa vreun triplet împreună cu alți elevi dintre cei n).

Prezentăm în continuare soluția bazată pe principiul extremal.

Considerăm mulțimile de elevi care nu conțin complet niciun grup. Astfel de mulțimi există – spre exemplu, o mulțime de 2 elevi. Dintre aceste mulțimi, alegem una care are număr maxim de elemente – fie aceasta S .

Presupunem, prin reducere la absurd, că $|S| \leq n - 1$.

Astfel, rămân cel puțin

$$\binom{n}{2} - (n - 1) = \binom{n-1}{2} + 1$$

elevi în afara lui S .

Pe de altă parte, numărul maxim de grupuri ce au doi membri în comun cu S este cel mult

$$\binom{n-1}{2}$$

deoarece orice două persoane pot face parte împreună din cel mult un grup.

Astfel, rămâne cel puțin un elev în afara lui S , care nu este în niciun grup cu alți doi elevi din S . Aceasta contrazice maximalitatea alegerii lui S , deoarece ar exista un elev ce ar putea fi adăugat la mulțime, fără a strica condiția de definire a lui S .

Probleme date spre rezolvare

Problema 1. (IMO 2017) Fie $N \geq 2$ un număr natural. O echipă de $N(N+1)$ jucători de fotbal, oricare dintre ei având înălțimi diferite, sunt aliniați într-un șir. Sir Alex dorește să elimine $N(N-1)$ jucători din acest

șir, lăsând un nou șir de $2N$ jucători în care sunt respectate următoarele N condiții:

(1) nimeni nu stă între cei mai înalți doi jucători,

(2) nimeni nu stă între al treilea și al patrulea cel mai înalt jucător,

$\vdots$

(N) nimeni nu stă între cei doi cei mai scunzi jucători.

Demonstrați că acest lucru este întotdeauna posibil.

Problema 2. (Baraj EGMO Romania - 2021) Fie X o mulțime finită cu $n > 3$ elemente și $A_1, A_2, \dots, A_p$ submulțimi ale lui X , având fiecare câte 3 elemente, iar

$$|A_i \cap A_j| \leq 1 \quad \text{pentru } 1 \leq i < j \leq p.$$

Arătați că există o submulțime $A \subseteq X$ astfel încât niciuna dintre mulțimile $A_1, A_2, \dots, A_p$ să nu fie inclusă în A , și

$$|A| \geq \lfloor \sqrt{2n} \rfloor.$$