

O METODĂ DE A DEMONSTRA INEGALITĂȚI CICLICE

TRAIAN PREDĂ¹⁾

În această lecție vom prezenta o metodă unitară de a demonstra unele inegalități ciclice, folosind inducție matematică și alegerea unui element extremal. Pe aceeași idee vom da și o demonstrație pentru inegalitatea mediilor.

1. (Mihai Opincariu) *Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ și $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ numere reale pozitive. Demonstrați că*

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_n}{a_1} \geq \frac{1+a_1}{1+a_2} + \frac{1+a_2}{1+a_3} + \dots + \frac{1+a_{n-1}}{1+a_n} + \frac{1+a_n}{1+a_1}.$$

Soluție. Considerăm propoziția

$$P(n) : \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_n}{a_1} \geq \frac{1+a_1}{1+a_2} + \frac{1+a_2}{1+a_3} + \dots + \frac{1+a_{n-1}}{1+a_n} + \frac{1+a_n}{1+a_1},$$

pentru orice $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n > 0$, unde $n \geq 2$.

Pasul 1. $P(2) : \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_1} \geq \frac{1+a_1}{1+a_2} + \frac{1+a_2}{1+a_1}$ revine la $\frac{a_1 - a_2}{a_2(1+a_2)} \geq \frac{a_1 - a_2}{a_1(1+a_1)}$ sau $\frac{(a_1 - a_2)^2(1+a_1+a_2)}{a_1a_2(1+a_2)(1+a_2)} \geq 0$ și este adevărată, oricare ar fi $a_1, a_2 > 0$.

Pasul 2. $P(n) \implies P(n+1)$. Deoarece inegalitatea de la $P(n+1)$ este simetrică ciclic în raport cu $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n+1}$, putem presupune că a_{n+1} este cel mai mare dintre numerele $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n+1}$. Atunci

$$\begin{aligned} \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_{n+1}}{a_1} &= \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_n}{a_1} + \frac{a_{n+1}}{a_1} + \frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{a_n}{a_1} \\ &\geq \frac{1+a_1}{1+a_2} + \frac{1+a_2}{1+a_3} + \dots + \frac{1+a_{n-1}}{1+a_n} + \frac{1+a_n}{1+a_1} + \frac{a_{n+1}}{a_1} + \frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{a_n}{a_1}. \end{aligned}$$

Este suficient să demonstrăm că

$$\frac{a_{n+1}}{a_1} + \frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{a_n}{a_1} \geq \frac{1+a_{n+1}}{1+a_1} + \frac{1+a_n}{1+a_{n+1}} - \frac{1+a_n}{1+a_1},$$

echivalentă cu propoziția adevărată

$$(a_{n+1} - a_n) \left(\frac{1}{a_1(1+a_1)} - \frac{1}{a_{n+1}(1+a_{n+1})} \right) \geq 0,$$

căci a_{n+1} este cel mai mare dintre numerele $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n+1}$. □

2. (OJM) a) *Arătați că dacă a, b sunt numere reale distincte și mai mari ca 1, atunci $\log_a(\log_a b) > \log_b(\log_a b)$.*

¹⁾ Profesor, Colegiul Național „Grigore Moisil”, București.

b) *Arătați că dacă $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ și $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ sunt numere reale distincte și mai mari ca unu, atunci*

$$\log_{a_1}(\log_{a_1} a_2) + \log_{a_2}(\log_{a_2} a_3) + \dots + \log_{a_{n-1}}(\log_{a_{n-1}} a_n) + \log_{a_n}(\log_{a_n} a_1) > 0.$$

Soluție. a) Notând $\ln a = A$, $\ln b = B$ avem

$$\begin{aligned} \log_a(\log_a b) - \log_b(\log_a b) &= \log_a \left(\frac{\ln a}{\ln b} \right) - \log_b \left(\frac{\ln b}{\ln a} \right) = \frac{\ln A - \ln B}{A} \\ &\quad - \frac{\ln B - \ln A}{B} = \frac{1}{AB} (\ln A - \ln B)(A - B) > 0. \end{aligned}$$

b) Considerăm propoziția $P(n) : \log_{a_1}(\log_{a_1} a_2) + \log_{a_2}(\log_{a_2} a_3) + \dots + \log_{a_{n-1}}(\log_{a_{n-1}} a_n) + \log_{a_n}(\log_{a_n} a_1) > 0$, oricare ar fi $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n > 1$ și distincte, unde $n \geq 2$.

Pasul 1. $P(2) : \log_{a_1}(\log_{a_1} a_2) + \log_{a_2}(\log_{a_2} a_1) > 0$.

Din punctul a) avem $\log_{a_1}(\log_{a_1} a_2) + \log_{a_2}(\log_{a_2} a_1) > \log_{a_1}(\log_{a_1} a_2) + \log_{a_1}(\log_{a_2} a_1) = \log_{a_1}(\log_{a_1} a_2) - \log_{a_1}(\log_{a_1} a_2) = 0$.

Pasul 2. $P(n) \implies P(n+1)$. Deoarece inegalitatea de la $P(n+1)$ este simetrică ciclic în raport cu $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n+1}$, putem presupune că a_{n+1} este cel mai mare dintre numerele $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n+1}$. Atunci

$$\begin{aligned} P(n+1) &: \log_{a_1}(\log_{a_1} a_2) + \log_{a_2}(\log_{a_2} a_3) + \dots + \log_{a_{n+1}}(\log_{a_{n+1}} a_1) \\ &= [\log_{a_1}(\log_{a_1} a_2) + \log_{a_2}(\log_{a_2} a_3) + \dots + \log_{a_{n-1}}(\log_{a_{n-1}} a_n) + \log_{a_n}(\log_{a_n} a_1)] \\ &\quad + \log_{a_n}(\log_{a_n} a_{n+1}) + \log_{a_{n+1}}(\log_{a_{n+1}} a_1) - \log_{a_n}(\log_{a_n} a_1) > 0. \end{aligned}$$

Deoarece $P(n)$ este adevărată, este suficient să demonstrăm că

$$\log_{a_n}(\log_{a_n} a_{n+1}) + \log_{a_{n+1}}(\log_{a_{n+1}} a_1) - \log_{a_n}(\log_{a_n} a_1) > 0,$$

sau

$$\begin{aligned} \log_{a_n} \frac{\log_{a_n} a_{n+1}}{\log_{a_n} a_1} - \log_{a_{n+1}}(\log_{a_1} a_{n+1}) &= \log_{a_n}(\log_{a_1} a_{n+1}) - \\ &\quad - \log_{a_{n+1}}(\log_{a_1} a_{n+1}) > 0, \end{aligned}$$

care este adevărată, deoarece $a_{n+1} > a_n > 1$ și $\log_{a_1} a_{n+1} > 1$. $\square$

3. (Inegalitatea mediilor) Oricare ar fi numărul natural $n \geq 2$ și numerele reale pozitive $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$, avem

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}.$$

Soluție. Notăm $b_i = \frac{a_i}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}}$ pentru $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$. Inegalitatea de demonstrat este $b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n \geq n$, unde $b_1 b_2 b_3 \dots b_n = 1$. Deconșitionăm inegalitatea cu substituția $b_1 = \frac{x_1}{x_2}$, $b_2 = \frac{x_2}{x_3}$, $b_3 = \frac{x_3}{x_4}$, $\dots$, $b_n = \frac{x_n}{x_1}$ și atunci rămâne să demonstrăm că

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \frac{x_3}{x_4} + \dots + \frac{x_n}{x_1} \geq n, \forall x_1, \dots, x_n > 0.$$

Această inegalitate ciclică o demonstrăm prin inducție după n . Considerăm propoziția $P(n) : \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \frac{x_3}{x_4} + \dots + \frac{x_n}{x_1} \geq n$ pentru orice $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$, unde $n \geq 2$.

$P(2)$ este evident adevărată. Presupunem că $P(n)$ este adevărată și demonstrăm că $P(n+1)$ este adevărată. Deoarece inegalitatea de la $P(n+1)$ este simetrică ciclic în raport cu $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n+1}$ și putem astfel presupune că x_{n+1} este cel mai mare dintre numerele $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n+1}$, $(*)$.

$$\text{Avem } \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \dots + \frac{x_{n+1}}{x_1} = \left(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \dots + \frac{x_n}{x_1} \right) + \frac{x_n}{x_{n+1}} + \frac{x_{n+1}}{x_1} - \frac{x_n}{x_1} \geq n + \frac{x_n}{x_{n+1}} + \frac{x_{n+1}}{x_1} - \frac{x_n}{x_1}.$$

Este deci suficient să demonstrăm că $\frac{x_n}{x_{n+1}} + \frac{x_{n+1}}{x_1} - \frac{x_n}{x_1} \geq 1$ sau, echivalent, $\frac{(x_{n+1} - x_n)(x_{n+1} - x_1)}{x_1 x_{n+1}} \geq 0$. Această relație este adevărată, conform presupunerii $(*)$. $\square$

Probleme propuse

Folosind aceeași metodă, rezolvați următoarele exerciții.

P1. Fie $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ numere reale strict pozitive. Demonstrați că

$$\left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right) \left(x_2 + \frac{1}{x_2}\right) \left(x_3 + \frac{1}{x_3}\right) \dots \left(x_n + \frac{1}{x_n}\right) \geq \left(x_1 + \frac{1}{x_2}\right) \left(x_2 + \frac{1}{x_3}\right) \left(x_3 + \frac{1}{x_4}\right) \dots \left(x_n + \frac{1}{x_1}\right).$$

P2. (Dan Dumitrescu) Fie $n \geq 2$ și numerele reale $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \in (1, 3)$. Arătați că pentru orice rearanjare $i_1, i_2, \dots, i_n$ a indicilor $1, 2, \dots, n$ are loc inegalitatea

$$(2\sqrt{3})^n \leq \left(x_1 + \frac{3}{x_{i_1}}\right) \left(x_2 + \frac{3}{x_{i_2}}\right) \dots \left(x_n + \frac{3}{x_{i_n}}\right) < 4^n.$$

P3. Fie $n \geq 4$ și $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ numere reale strict pozitive. Demonstrați că

$$\frac{x_1}{x_n + x_2} + \frac{x_2}{x_1 + x_3} + \frac{x_3}{x_2 + x_4} + \dots + \frac{x_n}{x_{n-1} + x_1} \geq 2.$$

P4. Fie $n \geq 2$ un număr natural și $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ numere reale pozitive, cu $a_1 a_2 a_3 \dots a_n = 1$ și $a > b \geq 0$ două numere reale. Demonstrați că

$$a_1^a + a_2^a + a_3^a + \dots + a_n^a \geq a_1^b + a_2^b + a_3^b + \dots + a_n^b.$$

P5. (Mihai Opincariu) Fie $n \geq 2$ un număr natural, $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ numere reale pozitive și $b > a \geq 0$ două numere reale. Demonstrați că

$$\frac{a + a_1}{a + a_2} + \frac{a + a_2}{a + a_3} + \dots + \frac{a + a_n}{a + a_1} \geq \frac{b + a_1}{b + a_2} + \frac{b + a_2}{b + a_3} + \dots + \frac{b + a_n}{b + a_1}.$$

BIBLIOGRAFIE

- [1] M.Becheanu, B. Enescu, *Inegalități elementare ... și mai puțin elementare*, Editura Gil, Zalău, 2002.
- [2] M.O. Drâmbe, *Inegalități – idei și metode*, Editura Gil, Zalău, 2003.
- [3] V. Vornicu, *Olimpiada de matematică, de la provocare la experiență*, Editura Gil, Zalău, 2003.
- [4] Colecția Gazeta Matematică seria B