

GAZETA MATEMATICĂ

SERIA B

PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Fondată în anul 1895

Anul CXXX nr. 10

octombrie 2025

ARTICOLE ȘI NOTE MATEMATICE

PUNCTE DE ACUMULARE ALE UNOR MULȚIMI COMPLEMENTARE

TOADER DAVID ȘTEFAN¹⁾

Abstract. This article shows ways of using the limit points of a set

Keywords: accumulation point, isolated point, differentiable function

MSC : 26A24, 26A36

Acest articol își propune să ilustreze o tehnică puternică în rezolvarea problemelor de analiză matematică, constând în definirea unor mulțimi complementare și utilizarea punctelor de acumulare ale acestora.

Reamintim că un punct de acumulare pentru mulțimea $A \subseteq \mathbb{R}$ este un număr $x \in \mathbb{R}$ cu proprietatea: orice vecinătate V a lui x conține un element $y \in A \setminus \{x\}$. Pentru $x \in \mathbb{R}$, aceasta este echivalent cu: pentru orice $\varepsilon > 0$ există $y \in (A \cap (x - \varepsilon, x + \varepsilon)) - \{x\}$. Este ușor de văzut că x este punct de acumulare al mulțimii $A \subseteq \mathbb{R}$ dacă și numai dacă există șirul $y_i \in A$, $y_i \neq x$ astfel încât $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x$. Punctele mulțimii $A \subseteq \mathbb{R}$ care nu sunt de acumulare se numesc izolate.

Mulțimea punctelor de acumulare ale mulțimii A se notează A' . O mulțime cu proprietatea $A' \subseteq A$ se numește închisă.

Vom ilustra ideea enunțată în introducere rezolvând câteva probleme.

1. (ONM 2024) Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval deschis și $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție de două ori derivabilă pe I , cu proprietatea $f(x)f''(x) = 0$, $\forall x \in I$. Arătați că $f''(x) = 0$, $\forall x \in I$.

Rezolvare. Fie mulțimile $A = \{x \in I \mid f(x) = 0 \text{ și } f''(x) \neq 0\}$ și $B = \{x \in I \mid f''(x) = 0\}$. Avem $A \cap B = \emptyset$.

Presupunem prin absurd că există x_1 punct izolat al lui A . Atunci există $\varepsilon > 0$ astfel încât $(x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon) - \{x_1\}$ conține doar elemente din B . Mulțimea $M = f''((x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon))$ este interval, deoarece f'' are proprietatea lui Darboux – contradicție cu $M = \{0, f''(x_1)\}$, deci presupunerea este falsă.

¹⁾Elev, Colegiul Național „Mihai Viteazul”, Ploiești

Presupunem acum că A are cel puțin un element x . Deoarece x este punct de acumulare a lui A , există $y_n \in A$ cu $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x$ și $y_i \neq x$. Deducem $f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(y_n) - f(x)}{y_n - x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0 - 0}{y_n - x} = 0$, aceasta fiind valabil pentru orice $x \in A$. Deducem $f''(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f'(y_n) - f'(x)}{y_n - x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0 - 0}{y_n - x} = 0$ – contradicție. Astfel presupunerea $A \neq \emptyset$ este falsă, deci $B = I$. $\square$

2. (Generalizarea problemei 1) Fie $n \in \mathbb{N}^*$, $I \subset \mathbb{R}$ un interval deschis și $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție de n ori derivabilă pe I , cu proprietatea că $f(x)f'(x)\dots f^{(n)}(x) = 0, \forall x \in I$. Arătați că $f^{(n)}(x) = 0, \forall x \in I$.

Rezolvare. Fie $A_i = \{x \in I \mid f^{(k)}(x) \neq 0, \forall k \in \mathbb{N}, i+1 \leq k \leq n\}$, unde $0 \leq i \leq n-1$. Fie $B_k = \{x \in I \mid f^{(k)}(x) = 0\}$, unde $0 \leq k \leq n$.

Vom demonstra că $A_i = \emptyset, \forall 0 \leq i \leq n-1$. Este suficient să demonstrăm că $A_0 = \emptyset$, deoarece aceasta reduce problema la $f'(x)\dots f^{(n)}(x) = 0, \forall x \in I$, care este aceeași problemă pentru $f'(x)$ și obținem astfel inductiv $A_i = \emptyset$ pentru $0 \leq i \leq n-1$, ceea ce implică $I = B_n$.

Presupunem prin absurd că $A_0 \neq \emptyset$.

Dacă există $x \in A_0$ punct de acumulare a lui A_0 , atunci există $y_n \in A_0$, $y_n \neq x$ cu $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x$, deci $f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(y_n) - f(x)}{y_n - x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0 - 0}{y_n - x} = 0$ – contradicție cu definiția lui A_0 .

Presupunem prin absurd că există $i \in \overline{1, n-1}$ și $x \in A_0$ punct de acumulare al lui A_i . Atunci există $y_u \in A_i$ cu $\lim_{u \rightarrow \infty} y_u = x$. Cu un raționament ca mai sus, pentru orice $j \in \mathbb{N}^*$ există $g(j) \in \mathbb{N}$, cu $0 \leq g(j) \leq i$, astfel încât $f^{(g(j))}(y_j) = 0$. Reiese că fiecare y_j aparține unui $B_{g(j)}$, cu $0 \leq g(j) \leq i$. Deoarece numărul termenilor șirului y_u este infinit, există B_k , cu $0 \leq k \leq i$, care include un subșir al lui y_u . Deci, există $z_u \in B_k$ cu $\lim_{u \rightarrow \infty} z_u = x$. Din continuitatea lui $f^{(k)}$ (pentru că aceasta este și derivabilă) reiese $f^{(k)}(x) = 0$ – contradicție.

Deoarece $A_0 \cup A_1 \cup \dots \cup A_{n-1} \cup B_n = I$ și, pe baza argumentelor precedente, pentru orice $x \in A_0$ există $\varepsilon(x) > 0$ astfel încât în $(x - \varepsilon(x), x + \varepsilon(x)) - \{x\}$ nu se află elemente din niciun A_i , aici se pot afla doar elemente din B_n . Rezultă că $M = f^{(n)}((x - \varepsilon(x), x + \varepsilon(x)))$ este interval (conform Darboux), în contradicție cu $M = \{f^{(n)}(x), 0\}$.

Aceasta arată că presupunerea a fost falsă, deci $A_0 = \emptyset$ $\square$

3. (ONM 2025) Determinați perechile de funcții $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, de două ori derivabile, având proprietatea:

$$(f(x) - g(y))(f'(x) - g'(y))(f''(x) - g''(y)) = 0, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Rezolvare. Notăm $P(x, y)$ relația din ipoteză. Fie $h, p, s, t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ date de $h(x) = f(x) - g(x)$, $p(x) = g(0) + xg'(0) + \frac{x^2 g''(0)}{2}$, $s(x) = f(x) - p(x)$, $t(x) = g(x) - p(x)$.

$P(x, x) \iff h(x)h'(x)h''(x) = 0$, care conform problemei 2, duce la $h''(x) = 0$, deci $h(x) = ax + b$ cu $a, b \in \mathbb{R}$, (1).

$P(x, y) \iff (s(x) - t(y))(s'(x) - t'(y))(s''(x) - t''(y)) = 0$, relație care va fi notată cu $Q(x, y)$. Avem $Q(x, 0) \iff s(x)s'(x)s''(x) = 0$ (deoarece $t(0) = t'(0) = t''(0) = 0$), deci $s(x) = cx + d$ cu $c, d \in \mathbb{R}$. Funcția f este o sumă a două funcții polinomiale: una de grad maxim 1 (s), iar cealaltă de grad maxim 2, deci f este funcție polinomială de grad cel mult 2.

Din ultima afirmație și (1) rezultă $f(x) = mx^2 + nx + w$ și $g(x) = mx^2 + rx + u$, cu $m, n, w, u, r \in \mathbb{R}$.

Toate aceste funcții verifică, deoarece $f''(x) = g''(y) = m$. $\square$

4. (generalizarea problemei 3) *Determinați perechile de funcții $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, derivabile de ordinul n , având proprietatea*

$$\prod_{i=0}^n (f^{(i)}(x) - g^{(i)}(y)) = 0, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Rezolvare. Vom proceda ca la problema precedentă.

Fie $P(x, y)$ relația din ipoteză. Definim $h, p, s, t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ astfel: $h(x) =$

$$f(x) - g(x), p(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{g^{(i)}(0)x^i}{i!}, s(x) = f(x) - p(x), t(x) = g(x) - p(x).$$

$P(x, x)$ înseamnă $\prod_{i=0}^n h^{(i)}(x) = 0$ care, conform problemei 2 implică $h^{(n)}(x) = 0$, deci h este funcție polinomială de grad maxim $n - 1$.

$$P(x, y) \iff \prod_{i=0}^n (s^{(i)}(x) - t^{(i)}(y)) = 0 =: Q(x, y).$$

$$Q(x, 0) \iff \prod_{i=0}^n s^{(i)}(x) = 0 \text{ (deoarece } t^{(i)}(0) = 0, \forall 0 \leq i \leq n), \text{ deci}$$

s este funcție de grad cel mult $n - 1$. Funcția f este o sumă a două funcții: una polinomială de grad maxim $n - 1$ (s), iar cealaltă polinomială de grad maxim n , ceea ce arată că f este funcție polinomială de grad cel mult n .

Din ultima afirmație deducem $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$, $g(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n$, $\forall 0 \leq i \leq n$ și $a_n = b_n$. Toate aceste funcții verifică deoarece $f^{(n)}(x) = g^{(n)}(y) = a_n$. $\square$

5. (ONM 2015) *Determinați funcțiile derivabile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ care verifică simultan condițiile:*

i) $f'(x) = 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{Z}$

ii) pentru orice $x \in \mathbb{R}$, dacă $f'(x) = 0$, atunci $f(x) = 0$.

Rezolvare. Fie $A = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\}$ și $B = \{x \in \mathbb{R} \mid f'(x)f(x) \neq 0\}$.

Avem $A \neq \emptyset$, $A \cap B = \emptyset$ și $A \cup B = \mathbb{R}$. Presupunem prin absurd că B este nevidă și fie $x \in B$.

Dacă $x \in A' \cap B$, atunci există șirul $y_i \in A$, $y_i \neq x$ astfel încât $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x$, de unde $\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = f(x)$ (din continuitate), deci $0 = f(x) - \text{contradicție}$. Așadar $A' \cap B = \emptyset$.

De aici reiese că pentru orice $x \in B$ există $a, b \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că $x \in (a, b) \subseteq B$. Deoarece $[x-1], [x+1] \in A$, avem $[x-1] < a < b < [x+1]$, deci mulțimile $m_x = \{a \in \mathbb{R} \mid (a, x] \subseteq B\}$ și $M_x = \{b \in \mathbb{R} \mid [x, b) \subseteq B\}$ sunt nevide și mărginite. Fie $a(x)$ marginea inferioară a mulțimii m_x și $b(x)$ marginea superioară a lui M_x . Dacă $a(x) \in B$, atunci $(a(a(x)), a(x)] \subseteq B - \text{contradicție cu minimalitatea lui } a(x) - \text{deci } a(x) \in A$. Analog, $b(x) \in A$.

Deoarece are f' are proprietatea lui Darboux și nu se anulează pe intervalul $(a(x), b(x))$, reiese că f' are semn constant pe acest interval, deci f este strict monotonă. Aceasta contrazice însă faptul că $f(a(x)) = f(b(x)) = 0$, deci presupunerea că B este nevidă este falsă.

Reiese că $f \equiv 0$, funcție care verifică ipoteza. $\square$

6. (ONM 1994) *Determinați funcțiile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile, cu derivata continuă, astfel încât $f(x) = \max(f'(x), x+1), \forall x \in \mathbb{R}$.*

Rezolvare. Fie mulțimile $A = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq f'(x)\}$, $B = \mathbb{R} \setminus A$.

Caz 1: $A = \emptyset$. Atunci $f(x) = f'(x), \forall x \in \mathbb{R}$, deci $(f(x)e^{-x})' \equiv 0$, de unde $f(x) \equiv ce^x, c \in \mathbb{R}$. Din $1 = f(0) = \max(f'(0), 1)$ reiese $c \geq 1$. În acest caz toate funcțiile sunt soluții, deoarece $ce^x \geq e^x \geq x+1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Caz 2: Există $x_0 \in A$. Atunci $f(x_0) = x_0 + 1$. Dacă presupunem, prin absurd, că x_0 este punct de acumulare al lui B , atunci $x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$, cu $y_n \in B$. Din ipoteză reiese $f'(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'(y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = f(x_0) - \text{fals}$. Așadar, există $\varepsilon > 0$ așa încât $I = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subseteq A$. Deducem $f(x) = x+1$ pentru $x \in I$, de unde $1 = f'(x) \leq f(x) = x+1$, ceea ce arată că $x \geq 0$. În concluzie, în acest caz, $A \subseteq (0, \infty)$.

De aici reiese că $f'(x) = f(x)$ pentru $x \leq 0$, deci $f(x) = ce^x$; ca mai sus, $c \geq 1$.

Fie $M = \sup\{a \mid f(x) = ce^x \text{ pentru } x \in (-\infty, a)\}$; avem $a \geq 0$.

Dacă $0 < a < \infty$, atunci, din continuitate, $f(a) = ce^a \geq e^a > a+1$, ceea ce contrazice maximalitatea lui a .

Dacă $a = \infty$, atunci regăsim cazul 1.

Dacă $a = 0$, atunci $f(x) = x+1$ pentru $x > 0$, iar continuitatea în 0 duce la $c = 1$.

Astfel, funcțiile care verifică sunt: I) $f(x) = ce^x$ cu $c \geq 1$; II) $f(x) = e^x$ pentru $x \leq 0$, respectiv $f(x) = x+1$ pentru $x \geq 0$. $\square$

Problemă propusă

(ONM 2016) *Determinați funcțiile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că f^2 este derivabilă pe $\mathbb{R}$ și $(f^2)' = f$.*