GAZETA MATEMATICĂ

REVISTĂ DE CULTURĂ MATEMATICĂ PENTRU TINERET
SERIA B

Fondată în anul 1895

ANUL CXIV nr. 1 **ianuarie 2009**

ARTICOLE ŞI NOTE MATEMATICE

CÂTEVA CHESTIUNI DESPRE FUNCŢIILE PERIODICE

DE NELU CHICHIRIM

Abstract. This article presents some possibilities to use continuity when dealing with problems involving periodicity.

Keywords: periodic function, continuity, uniform continuity, density.

MSC: 26A09, 26A15.

Definiţia 1. *Funcţia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *este periodică dacă există* $T \in \mathbb{R}^*$ *cu proprietatea că* $f(x+T) = f(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

Numărul T din definiţia anterioară se numeşte *perioada* funcţiei f.

Observaţia 1. Dacă T este o perioadă a funcţiei f, atunci $k \cdot T$ este o perioadă a funcţiei f, $\forall\, k \in \mathbb{Z}^*$.

Propoziţia 1. *Dacă* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *este periodică (cu o perioadă* T*) atunci funcţia* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(ax+b)$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, *este periodică şi o perioadă a ei este* $T' = \dfrac{T}{a}$.

Demonstraţie. $g\left(x + \dfrac{T}{a}\right) = f(ax+T+b) = f(ax+b) = g(x), \forall\, x \in \mathbb{R}$.

Propoziţia 2. *Dacă funcţia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *are proprietatea că există* $T \neq 0$ *astfel încât* $f(x+T) - f(x) = c$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, *atunci există o funcţie* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *periodică, cu perioada* T, *astfel încât* $f(x) = g(x) + ax$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, unde $a = \dfrac{c}{T}$.

Demonstraţie. Fie $g(x) = f(x) - \dfrac{c}{T}x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Atunci $g(x+T) - g(x) = f(x+T) - f(x) - c = 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

Propoziţia 3. *Dacă* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *este periodică şi continuă, atunci* f *este mărginită şi îşi atinge marginile.*

Demonstraţie. Avem $f(x+T) = f(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, unde $T > 0$ este o perioadă a lui f. Din teorema lui *Weierstrass* rezultă că $f(\mathbb{R}) = f([0,T]) = [a,b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Propoziţia 4. *Dacă* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *este periodică şi continuă, atunci* f *este uniform continuă pe* $\mathbb{R}$.

Demonstraţie. Fie $T>0$ o perioadă a funcţiei f. Deoarece f este continuă pe compactul $[0,2T]$, rezultă că f este uniform continuă pe acest interval. Deci, $\forall\varepsilon>0$, $\exists\,\delta_\varepsilon>0$ ($\delta_\varepsilon<T$), astfel încât pentru orice $a,b\in[0,2T]$ cu $|a-b|<\delta_\varepsilon$, avem $|f(a)-f(b)|<\varepsilon$.

Fie acum $x,y\in\mathbb{R}$, cu $x<y$ şi $y-x<\delta_\varepsilon$.

Alegem $a=x-nT$, $b=y-nT$, unde $n=\left[\dfrac{x}{T}\right]$. Obţinem $0\le a<T$ şi $b-a=y-x<\delta_\varepsilon<T$. Deci $b<a+T<2T$.

Rezultă că $a,b\in[0,2T]$ şi $|a-b|<\delta_\varepsilon$. Obţinem atunci:

$$|f(a)-f(b)|<\varepsilon\Rightarrow|f(x)-f(y)|<\varepsilon.$$

Deci, f este uniform continuă pe $\mathbb{R}$.

Propoziţia 5 (Teorema de densitate Kronecker). *Dacă* $T\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, *atunci mulţimea* $A=\{m+nT\mid m,n\in\mathbb{Z}\}$ *este densă în* $\mathbb{R}$.

Demonstraţie. Pentru început se arată că, pentru orice $\varepsilon>0$, există $a\in A$ astfel încât $0<a<\varepsilon$.

Fie $\varepsilon>0$. Există $n\in\mathbb{N}^*$ cu proprietatea $\dfrac{1}{n}<\varepsilon$. Considerăm numerele $\{T\},\{2T\},\ldots,\{(n+1)T\}$, unde $\{\ \}$ desemnează partea fracţionară. Acestea sunt $n+1$ numere distincte în $(0,1)$. Rezultă că există $i\neq j$ astfel încât:

$$0<\{iT\}-\{jT\}<\frac{1}{n}.$$

Obţinem $(i-j)T+[jT]-[iT]<\varepsilon$. Notând $k=i-j$, $m=[jT]-[iT]$, vom avea:

$$0<m+kT<\varepsilon.$$

Fie atunci $a=m+nT\in A$. Am găsit astfel $a\in A$, cu $0<a<\varepsilon$.

Considerăm acum $y>x$, $x,y\in\mathbb{R}$ şi $\varepsilon=y-x>0$. Rezultă că există $a\in A$, cu $0<a<\varepsilon$. Fie $n=\left[\dfrac{x}{a}\right]+1$. Obţinem $na>x$. Dar $n\le\dfrac{x}{a}+1$ implică $na\le x+a<x+\varepsilon=y$, deci $na<y$. Rezultă în final că $na\in(x,y)$; cum $na\in A$, teorema este demonstrată.

Aplicaţii

A1. *Dacă funcţia* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *este periodică, continuă şi neconstantă, rezultă că funcţia* $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x^2)$ *nu este periodică.*

Soluţie. Fie $T>0$ o perioadă a funcţiei f.

Presupunem prin absurd că g este periodică. Cum g este continuă, rezultă g este uniform continuă.

Fie $a,b\in[0,T]$. Avem:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{a+nT}-\sqrt{b+nT}\right)=0\overset{g\text{ unif.cont.}}{\Longrightarrow}$$

$$\overset{g\text{ unif.cont.}}{\Longrightarrow}\lim_{n\to\infty}\left(g\left(\sqrt{a+nT}\right)-g\left(\sqrt{b+nT}\right)\right)=0.$$

Obţinem:

$$0=\lim_{n\to\infty}\left(f\left(a+nT\right)-f\left(b+nT\right)\right)=f(a)-f(b),$$

deci $f(a)=f(b)$, adică f este constantă, fals.

A2. *Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ periodică, continuă şi neconstantă. Atunci, funcţia $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)+f(x^2)$ nu este periodică.*

Soluţie. Presupunem prin absurd că g este periodică. Deoarece g este continuă rezultă că g este uniform continuă. Fie $T>0$ o perioadă pentru f. Cum f este periodică şi continuă, rezultă că funcţia f este uniform continuă.

Fie $a,b\in\mathbb{R}$. Rezultă $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{a+nT}-\sqrt{b+nT}\right)=0$ deci:

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(f\left(\sqrt{a+nT}\right)-f\left(\sqrt{b+nT}\right)\right)=0$ şi

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(g\left(\sqrt{a+nT}\right)-g\left(\sqrt{b+nT}\right)\right)=0.$

Folosind faptul că $g(x)=f(x)+f(x^2)$, obţinem:

$$\lim_{n\to\infty}\left(f\left(a+nT\right)-f\left(b+nT\right)\right)=0,$$

adică $f(a)=f(b)$, deci f este constantă, contradicţie.

A3. *Dacă funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este periodică, continuă şi există $T_1,T_2>$ >0 cu $T_1\in\mathbb{Q}$, $T_2\notin\mathbb{Q}$ perioade pentru funcţia f, atunci f este constantă.*

Soluţie. Cum $T_1\in\mathbb{Q}$, avem $T_1=\dfrac{p}{q}$, cu $p,q\in\mathbb{N}^*$, deci $qT_1=p$ şi astfel p este perioadă pentru f. Cum $p\in\mathbb{N}^*$, rezultă că pT_2 este perioadă pentru f şi atunci $mp+npT_2$ este perioadă pentru f.

Obţinem $f\left(mp+npT_2\right)=f(0)$, $\forall\, m,n\in\mathbb{Z}$, deci $f(px)=\text{constant}$, $\forall\, x\in A=\{m+nT_2\mid m,n\in\mathbb{Z}\}$, iar aceasta este densă în $\mathbb{R}$. Deoarece f este continuă, rezultă $f(px)=\text{constant}$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$, $p\neq 0$, deci $f=\text{constantă}$.

A4. *Dacă funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este mărginită şi există $T>0$ astfel încât $f(x+T)-f(x)=c$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$, atunci f este periodică, de perioadă T $(c=0)$.*

Soluţie. Conform Propoziţiei 2 avem $f(x)=g(x)+ax$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$, unde g este periodică de perioadă T. Obţinem $f(nT)=g(nT)+anT=g(0)+naT$. Cum f este mărginită, avem că şirul $\{g(0)+naT\}_{n\geq 1}$ este mărginit, deci $aT=0$, adică $a=0$, prin urmare $f=g$. Rezultă că f este periodică de perioadă T.

A5. *Dacă $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sunt funcţii periodice cu perioadele $T_1>0$, respectiv $T_2>0$ şi $\dfrac{T_1}{T_2}\in\mathbb{Q}$, atunci $f+g$ este periodică.*

Soluţie. $\dfrac{T_1}{T_2}=\dfrac{m}{n}$, $m,n\in\mathbb{N}^*\Rightarrow mT_2=nT_1=T$. Obţinem că T este o perioadă comună a funcţiilor f şi g.

Rezultă $(f+g)(x+T)=f(x+T)+g(x+T)=f(x)+g(x)$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$, deci $f+g$ este periodică.

A6. *Dacă $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sunt funcţii periodice, continue, neconstante şi $f + g$ este periodică, atunci $\dfrac{T_1}{T_2} \in \mathbb{Q}$ pentru orice T_1 perioadă a lui f şi T_2 perioadă a lui g.*

Soluţie. Presupunem prin absurd că $\dfrac{T_1}{T_2} \notin \mathbb{Q}$, deci $T_2 = a \cdot T_1$, unde $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Deoarece $f + g$ este periodică avem că funcţia $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = f(T_1 x) + g(T_1 x)$ este periodică.

Fie $u, v \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $u(x) = f(T_1 x)$, $v(x) = g(T_1 x)$. Rezultă că u, v sunt continue, periodice, neconstante, u are perioada 1, v are perioada a. Cum $u+v$ este periodică, rezultă că există $T > 0$ astfel încât $u(x+T)+v(x+T) = u(x)+v(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Deci $u(x+T)-u(x) = v(x) - v(x+T) \overset{\text{not}}{=} H(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

Cum u are perioada 1, rezultă că funcţia $u(x + T) - u(x)$ are perioada 1, deci H are perioada 1.

Cum v are perioada a, rezultă că funcţia $v(x) - v(x + T)$ are perioada a, deci H are perioada a. Dar H este continuă, $1 \in \mathbb{Q}$, $a \notin \mathbb{Q}$ şi din **A3** obţinem că H este constantă. Rezultă $u(x + T) - u(x) =$ constant. Cum u este continuă şi periodică, rezultă că u este mărginită. Din **A4** deducem că $u(x + T) - u(x) = 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

Obţinem astfel că u şi v au perioada T. Dacă $T \in \mathbb{Q}$, rezultă că v are perioadele a şi T, deci, conform **A3**, $v =$ constantă, fals. Dacă $T \notin \mathbb{Q}$, rezultă că u are perioadele 1 şi T, deci, conform **A3**, $u =$ constantă.

Observaţie. Dacă f sau g nu este continuă atunci afirmaţia **A6** nu este adevărată.

Contraexemplu. Fie $A = \{m + n\pi \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$.

Funcţia $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$ este constantă şi $A \setminus \{0\}$ este mulţimea perioadelor sale.

Funcţia $g(x) = \sin x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$ este periodică şi neconstantă. Atunci avem că $(f + g)(x) = \begin{cases} 1 + \sin x, & x \in A \\ \sin x, & x \notin A \end{cases}$ este periodică, $T = 2\pi$. Dacă luăm $T_1 = 1$ o perioadă pentru f şi $T_2 = 2\pi$ o perioadă pentru g, nu rezultă că $\dfrac{T_1}{T2} \in \mathbb{Q}$.

Bibliografie

[1] Gh. Sireţchi, *Calcul diferenţial şi integral*, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1965.

Profesor,
Colegiul Naţional „Mircea cel Bătrân“
Constanţa

CONJECTURA LUI ANDRICA ÎN CONEXIUNE CU ALTE CONJECTURI DESPRE NUMERE PRIME

de Marcel Ţena

În memoria Profesorului
Laurenţiu Panaitopol

Abstract. These notes show how the confirmation of Andrica's conjecture about consecutive primes, verified for all positive prime less than 2^{53}, leads to proofs of *Legendre*'s conjecture and *Ruiz*'s conjecture.

Keywords: prime, *Andrica*'s, *Legendre*'s, *Sierpinski*'s, *Schinzel*'s, *Ruiz*'s, *Golomb*'s conjectures, *Bertrand*'s postulate.
MSC: 11A41

În lucrarea [1], din 1986, matematicianul român *Dorin Andrica* de la Universitatea „Babeş- Bolyai" din Cluj-Napoca, a emis următoarea ipoteză:

Conjectura lui Andrica: *Dacă p_n este al n-lea număr prim pozitiv, atunci*:

$$\sqrt{p_{n+1}} - \sqrt{p_n} < 1$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Valabilitatea afirmaţiei a fost dovedită cu ajutorul calculatorului pentru toate numerele prime mai mici ca 2^{53} (*I. Ghory*, în 2000).

În 1798 matematicianul francez *A. M. Legendre* a formulat:

Conjectura lui Legendre: *Între oricare două pătrate perfecte consecutive există cel puţin un număr prim.*

În 1845 matematicianul francez *J. Bertrand* a formulat:

Postulatul lui Bertrand: *Pentru oricare număr natural $n \geq 2$, în intervalul $(n, 2n)$ există cel puţin un număr prim.*

Cinci ani mai târziu, în 1850, matematicianul rus *P. L. Cebâşev* a dat o demonstraţie acestei afirmaţii, transformând-o într-o teoremă. Există mai multe demonstraţii pentru postulatul lui *Bertrand*, una recentă, aparţinând autorului acestor rânduri, putând fi consultată în [7].

În 1958 matematicianul polonez *W. Sierpinski* a formulat:

Conjectura lui Sierpinski: *Pentru oricare numere naturale n şi k astfel încât $2 \leq k \leq n$, în intervalul $((k-1)n, kn)$ există cel puţin un număr prim.*

În fine, în 1961 matematicianul polonez *A. Schinzel* a formulat:

Conjectura lui Schinzel: *Pentru orice $x \geq 117$, în intervalul $(x, x + \sqrt{x})$ există cel puţin un număr prim.*

Se pare că însuşi *Legendre* formulase această conjectură, dar sub forma mai slabă „pentru x suficient de mare".

În lucrarea de faţă studiem unele conexiuni logice ce pot fi făcute cu aceste conjecturi, dar şi cu altele ce vor fi prezentate ceva mai încolo.

Propoziţia 1. *Conjectura lui Schinzel $\Rightarrow$ Conjectura lui Sierpinski.*