GAZETA MATEMATICĂ

SERIA A

ANUL XXXI(CX) **Nr. 1–2/ 2013**

ANIVERSĂRI

Profesorul Ioan Tomescu la a 70-a aniversare

La 5 noiembrie 2012 domnul profesor universitar *Ioan Tomescu*, membru corespondent al Academiei Române, a împlinit frumoasa vârstă de 70 de ani. La ceas aniversar îmi revine onoarea şi plăcerea de a trece în revistă principalele capitole ale unei vieţi şi cariere de excepţie, aşa cum le cunosc în urma celor aproape patruzeci de ani de colaborare cu dânsul.

Ioan Tomescu s-a născut în oraşul Ploieşti, judeţul Prahova, într-o familie de distinşi intelectuali.

Universitatea

În perioada 1960–1965 a urmat cursurile Facultăţii de Matematică a Universităţii din Bucureşti, pe care a absolvit-o cu Diplomă de Merit susţinând lucrarea de licenţă cu titlul „Analiza şi sinteza multipolilor cu contacte". În timpul studenţiei a obţinut premiul întâi şi premiul al doilea la Olimpiada Naţională de Matematică pentru studenţi, Bucureşti, 1961 şi 1962.

Titlul de doctor l-a obţinut în anul 1971 cu teza „Metode combinatorii în teoria automatelor finite" sub conducerea academicianului Gr. C. Moisil. În această teză se propune o metodă matricială pentru determinarea tuturor perechilor de stări compatibile ale unei maşini secvenţiale Mealy şi se arată că minimizarea unei astfel de maşini poate fi redusă în anumite cazuri la problema determinării partiţiei cromatice de cardinal minim a mulţimii vârfurilor unui graf. În acelaşi an, 1971, a obţinut Premiul pentru matematici aplicate la First Balkan Mathematics Competition for Students and Young Researchers, Bucureşti. Peste numai patru ani, în 1975, avea să obţină Premiul Gheorghe Ţiţeica al Academiei Române pentru cartea „Introducere în combinatorică", care a fost tradusă în engleză şi maghiară.

Cariera universitară

În cadrul catedrei de Informatică a Universităţii din Bucureşti a parcurs treptele carierei universitare şi a fost pe rând preparator în perioada 1965–1968, asistent în perioada 1968–1972, lector în perioada 1972–1990, iar din 1990 a devenit, direct, profesor universitar.

Sub conducerea sa, 18 matematicieni din ţară şi din străinătate şi-au susţinut tezele obţinând titlul de doctor în matematică: Eugen Mândrescu, Virgil Domocoş, Laurenţiu Modan, Cristina Vertan, Hazim A. Farhan, Petrişor Guţă, Laura Ciupală, Akhlaq Ahmad Bhatti, Imran Javaid, Mohammad Tariq Rahim, Mircea Adam, Syed Ahtsham Ul Haq Bokhary, Gabriela Mihai (Cristea), Ruxandra Marinescu-Ghemeci (Verman), Muhammad Imran, Salma Kanwal, Sana Javed, Ayesha Riasat.

Activitatea şi poziţii ocupate

Începând cu anul 2005 a fost visiting professor la Abdus Salam School of Mathematical Sciences – Government College University, Lahore, Pakistan, unde a primit premiul Best Ph. D. Advisor în anul 2009. De asemenea, a fost visiting professor la Department of Computer Science – Auckland University, New Zealand, în anul 1995 şi la Department of Applied Mathematics – The University of Tirana, Albania, în anul 1974, precum şi Visiting Professor Research Fellow la School of Computing – National University of Singapore, în anul 2002.

În perioada 1990–2007 a fost şeful catedrei de Informatică din Universitatea din Bucureşti.

Dintre numeroasele poziţii academice ocupate trebuie remarcate acelea de membru în Comisia Naţională de atestare a titlurilor, diplomelor şi gradelor universitare a Ministerului Educaţiei Naţionale, din anul 1996 până în anul 2006, precum şi cea de secretar al Comisiei de ştiinţe exacte la C.N.E.A.A., din anul 1994 pâna în anul 2005.

Domnul profesor *Ioan Tomescu* a fost conducătorul delegaţiei României la Olimpiada Internaţională de Matematică în intervalele de timp 1983–1986 şi 1990–1994, iar în perioada 1990–1994 a fost conducătorul delegaţiei României la Olimpiada Balcanică de Matematică.

Este referent la un număr impresionant de publicaţii şi edituri: Revue Roumaine de Mathématiques Pures et Appliquées, Bulletin Mathématique de la Société des Sciences Mathématiques de Roumanie, Studii şi Cercetări Matematice (Bucureşti), Analele Universităţii Bucureşti, seria Matematică, Gazeta Matematică seria A (Bucureşti), Journal of Graph Theory, Discrete Mathematics, Discrete Applied Mathematics, Random Structures and Algorithms, Communications in Mathematical Chemistry (MATCH), Graphs and Combinatorics, Discussiones Mathematicae Graph Theory, Journal of Combinatorial Theory (A), Australasian Journal of Combinatorics, Electronic Journal of Combinatorics, International Journal of Mathematical Sciences, Journal of Applied Mathematics & Computing, Ars Combinatoria, Utilitas Mathematica, Mathematical Reviews (din 1976), Zentralblatt für Mathematik (din 1968), la editurile Academiei, Ştiinţifică, Didactică şi Pedagogică, Tehnică (din 1967).

Este editor şef al revistei Bulletin Mathematique de la Société des Sciences Mathématiques de Roumanie şi membru în comitetele de redacţie ale unor reviste de prestigiu, cum ar fi Electronic Journal of Graph Theory and Applications.

În anul 1987 a fost unul dintre organizatorii conferinţei Semester of Combinatorics, Stefan Banach Mathematical Center, Warszaw, Poland.

Cursuri predate

La Facultatea de Matematică din Universitatea din Bucureşti a predat cursurile: „Structuri de date“, „Introducere în programare“, „Algoritmi numerici şi nenumerici“, „Programare liniară“, „Metode numerice în informatică“, „Combinatorică şi teoria grafurilor“, „Teoria grafurilor şi aplicaţii“, „Tehnici de optimizare combinatorială“ şi „Teoria automatelor“.

A mai predat de asemenea cursurile „Numerical and Nonnumerical Programming Techniques“ şi „Graphs and Operations Research“ (International Graduate UNESCO Courses, 1978–1982), „Data Structures“ (Department of Computer Science, Auckland University, New Zealand, 1995), „Sorting and Searching“ şi „Applications of Graph Theory to Operations Research“ (Department of Applied Mathematics, The University of Tirana, Albania, 1974).

Opera

De-a lungul unei prolifice cariere de cercetător, neîntreruptă până astăzi, domnul profesor *Ioan Tomescu* a obţinut importante rezultate în teoria circuitelor combinaţionale, teoria extremală a grafurilor (în special în probleme privind colorarea vârfurilor unui graf şi polinoame cromatice), hypergrafuri şi conexiunea lor cu inegalităţi de tip Bonferroni, probleme Hamiltoniene pentru anumite clase de grafuri, aplicaţii ale grafurilor în chimie, combinatorica cuvintelor, teoria metrică a grafurilor.

În ultima perioadă, activitatea ştiinţifică a domnului profesor *Ioan Tomescu* s-a desfăşurat în următoarele direcţii: Teoria cromatică a hipergrafurilor; Dimensiunea metrică şi dimensiunea partiţie a grafurilor; Indicele distanţă grad şi indicele Randić ale unui graf; Proprietăţi asimptotice ale factorilor cuvintelor peste un alfabet dat; Teorie Ramsey pentru perechi de grafuri particulare; Proprietăţi asimptotice ale grafurilor şi hipergrafurilor relative la un diametru dat.

Este autorul a peste 155 lucrări ştiinţifice publicate în reviste de specialitate – printre cele mai bine cotate din lume, a prezentat 9 lucrări în volume ale unor conferinţe sau colecţii, a publicat 4 cursuri şi manuale universitare, 11 cărţi, o monografie şi 29 de alte articole – multe din acestea înregistrând numeroase citări. A susţinut 17 expuneri la conferinţe şi 12 conferinţe la universităţi.

În anul 2009 a fost ales membru al International Academy of Mathematical Chemistry.

De asemenea, din anul 2008 este preşedinte de onoare al Societăţii de Ştiinţe Matematice din România.

În anul 2000, domnul profesor *Ioan Tomescu* a fost ales membru corespondent al Academiei Române.

Personalitate senină şi luminoasă, înnobilată de naturaleţe, modestie, sobrietate şi caracter, domnul profesor *Ioan Tomescu* este creatorul unei opere matematice greu de cuprins pentru a fi descrisă în câteva rânduri, o operă în realizarea căreia adâncimea adevărului matematic descoperit şi estetica în care acesta este prezentat au dat întotdeauna aleasa marcă a cercetătorului.

Domnule profesor *Ioan Tomescu*, vă urez cu această ocazie sănătate şi succes în aventura cercetării matematice cu care v-aţi identificat întreaga viaţă, devenind astfel un minunat exemplu pentru noi toţi. La Mulţi Ani !

Conferenţiar doctor **Dragoş-Radu Popescu**

ARTICOLE

Variaţiuni pe o problemă de olimpiadă

MIHAI CIPU[1)]

Se dedică unui mare problemist,
Profesorul Ioan Tomescu

Abstract. After studying by elementary techniques the integers representable as $\frac{a^2+b^2}{ab+1}$, we shall consider the same problem from a different viewpoint. In the second part of the paper we shall study the integers q for which there exist integers a, b, c such that $q = \frac{a^2+b^2+c^2}{1+ab+bc+ca}$.

Keywords: generalized Pell equations; inhomogeneous ternary quadrics; quadratic reciprocity

MSC : Primary: 11D09; Secondary: 11D72; 11Y50

1. PROBLEMA

La cea de a 29-a olimpiadă internaţională de matematică, desfăşurată în 1988 în Australia, concurenţii au avut de rezolvat următoarea problemă:

P6. *Dacă* a, b *şi* $q = \frac{a^2+b^2}{ab+1}$ *sunt întregi pozitivi,* q *este pătrat perfect.*

Problema, propusă din partea R.F.G. de către Stephan Beck, are o istorie deosebit de interesantă, relatată cu nume şi date precise de A. Engel [4]. Potrivit acestuia, niciunul dintre cei şase problemişti faimoşi însărcinaţi cu selectarea problemelor pentru olimpiadă nu a reuşit să o rezolve, aşa că au apelat la patru renumiţi specialişti în teoria numerelor din Australia. Nici aceştia nu au produs o soluţie completă în şase ore (ceea ce reprezintă un

[1)]Institutul de Matematică „Simion Stoilow“ al Academiei Române, Unitatea de cercetare nr. 5, C. P. 1-764, 014700 Bucureşti, `Mihai.Cipu@imar.ro`

interval de timp mult mai mare decât cel la dispoziţia concurenţilor, care au de rezolvat trei probleme în patru ore şi jumătate). Cu toate acestea, comisia de selecţie a plasat problema pe lista scurtă supusă votului juriului, notând-o cu două steluţe, însemnul rezervat problemelor extrem de dificile, puţin probabil a fi date elevilor. Totuşi, după dezbateri îndelungate, juriul a hotărât a o selecta ca ultima problemă din concurs.

După această decizie curajoasă, istoria problemei intră în domeniul public. Dintre cei 268 de participanţi la OIM, 11 au găsit soluţii perfecte. Pentru această performanţă, dar mai ales pentru cele ulterioare, aceşti „recordmeni" merită a fi nominalizaţi. Doi dintre ei sunt din Bulgaria: Emanouil Atanassov (devenit cercetător în informatică la Institutul pentru Calcul Paralel al Academiei Bulgare de Ştiinţe) şi Zvezdelina Stankova (din acest an profesor vizitator la University of California din Berkeley); alţi doi elevi au reprezentat R.P. Chineză: Hongyu He (acum profesor la Louisiana State University, Baton Rouge, S.U.A.) şi Xi Chen (University of Alberta, Canada); echipa României a avut şi ea doi membri cu punctaj perfect în concurs: Nicuşor Dan (cercetător la IMAR) şi Adrian Vasiu (profesor la Binghamton University, State University of New York); iar din U.R.S.S., Nicolai Filonov (actualmente cercetător la Institutul de Matematică Steklov al Academiei Ruse de Ştiinţe si conferenţiar la Facultatea de Fizică a Universităţii de stat din St. Petersburg) şi Sergei Ivanov (există doi omonimi: unul la St. Petersburg, cercetător la Institutul de Matematică Steklov, celălalt profesor la University of Illinois din Urbana-Champaign, S.U.A.). Au mai obţinut 7 puncte la problema a şasea câte un elev din Austria, anume Wolfgang Stöcher (matematician şi programator la firma SKF Österreich AG, Austria), Canada – Ravi Vakil (profesor preferat al studenţilor de la Stanford University) şi R.P.D. Vietnam – Ngô Bào Châu (acesta, după studii la Ecole Normale Supérieure din Paris, a demonstrat complet „lema fundamentală" pe care se bazează programul lui Langlands, astfel că în 2010 a obţinut Premiul Fields şi un post de profesor la Universitatea din Chicago). S-a mai notat cu 6 puncte lucrarea lui Mouaniss Belrhiti Alaoui, care a reprezentat Regatul Maroc, dar care a studiat la Ecole Polytechnique, acum ocupându-se, în calitate de administrator principal de portofoliu la Agenţia de Investiţii a Emiratului Abu Dhabi, de sporirea valorii petrodolarilor. Aproape de soluţia completă a fost şi Julien Cassaigne (Franţa), notat cu 5, actualmente cercetător la Institutul de Matematică de la Luminy. Cu excepţia unei note de 4, obţinută de John Woo (S.U.A.), care n-a menţinut contactul nici cu matematica, nici cu vreunul din domeniile cu vizibilitate pe internet, lucrările celorlalţi concurenţi conţineau mai puţin de jumătate din rezolvarea completă. Să menţionăm că printre cei ce au obţinut un singur punct se afla şi un elev din Australia ce tocmai împlinise 13 ani în timpul competiţiei şi care rezolvase perfect cele cinci probleme precedente din concurs – Terence Tao, şi el laureat al Premiului Fields (în 2006, însă) şi acum profesor la UCLA.

Problema a şasea din 1988 a avut multă vreme reputaţia de cea mai dificilă chestiune dată la OIM, cu media punctajelor pentru cei 268 de participanţi de 0,634, 11 rezolvări perfecte şi 189 note de 0. Între timp, însă, a pierdut acest titlu: problema a treia din 2007 are media 0,304, fiind rezolvată în concurs de doar doi elevi (Caili Shen din R.P. Chineză şi Mladen Radojević din Serbia), iar media pentru ultima problemă din aceeaşi ediţie este de doar 0,152, în condiţiile în care a fost rezolvată complet de 5 din cei 520 competitori, iar 473 de lucrări au fost notate cu 0.

2. Soluţia

În această secţiune este prezentată rezolvarea problemei **P6** şi a câtorva altora, strâns înrudite.

Sunt posibile mai multe abordări. Două dintre ele invocă principiul extremal şi cel al coborârii infinite. Desigur, o soluţie completă conţine o serie de alte detalii, a căror combinare nu este lipsită de rafinament şi atractivitate, aşa cum ne vom convinge imediat mai jos. Pornind de la astfel de soluţii, problema iniţială poate fi prezentată într-o multitudine de moduri, limbaje, parafrazări aparent depărtate de contextul iniţial. De pildă, cei cu preferinţe pentru geometrie vor fi poate mai atraşi de un enunţ de tipul *Arătaţi că pentru q număr natural, există un punct cu ambele coordonate întregi pozitive situat pe cuadrica $x^2 + y^2 - qxy - q = 0$ dacă şi numai dacă q este pătrat perfect.*

Fiecare soluţie are propriile avantaje în comparaţie cu celelate, furnizând informaţii suplimentare despre obiectele studiate. După ce în Subsecţiunea 2.1 vom determina toate numerele q cu proprietăţile cerute în **P6**, vom reuşi acelaşi lucru şi pentru numerele a, b. În Subsecţiunea 2.3 vom examina modificările induse în structura soluţiilor prin renunţarea la condiţia ca întregii să fie pozitivi. În finalul acestei secţiuni indicăm un punct de vedere superior din care poate fi abordată **P6** şi o parte din conexiunile sale cu chestiuni de teoria aproximării numerelor algebrice.

2.1. Altă ipoteză, aceeaşi concluzie.

O extindere efectivă a problemei de concurs a fost găsită de Shaidesh Shirali (profesor la un liceu din India) [8]:

P1. *Dacă a, b şi c sunt întregi strict pozitivi astfel ca*

$$1 \le a^2 + b^2 - abc \le c + 1,$$

atunci $a^2 + b^2 - abc$ este pătrat perfect.

O problemă asemănătoare (în care marginea $c + 1$ din inegalitate este înlocuită prin c) a fost publicată sub numărul 1240 în revista canadiană *Crux Mathematicorum*.

Autorul începe rezolvarea problemei **P1** cu examinarea cazurilor în care c este mic. Notăm

$$d = a^2 + b^2 - abc. \tag{1}$$

Dacă $c = 1$, atunci $d \leq 2$. Se observă că pentru $d = 1$ problema este rezolvată, iar $d = 2$ nu este posibil din motive de paritate. Dacă $c = 2$, clar $d = (a - b)^2$. În continuare se consideră $c \geq 3$.

Să presupunem că d dat de relaţia (1) nu este pătrat perfect, de unde se deduce că $d \geq 2$. Pentru c şi d fixate, vom considera toate perechile (u, v) de numere naturale strict pozitive supuse restricţiei $d = u^2 + v^2 - cuv$. Ordonăm astfel de perechi după valoarea luată de suma componentelor. Observăm că pentru indiferent care pereche (u, v) cu toate proprietăţile enunţate avem $u \neq v$ (în caz contrar, egalitatea $u^2(2 - c) = d$ nu poate avea loc întrucât membrul stâng este strict negativ, în vreme ce membrul drept este pozitiv). Pentru a face o alegere, considerăm că $u > v$. Este clar că (u_1, v), cu $u_1 = cv - u$, este o pereche de numere întregi ce verifică $d = u_1^2 + v^2 - cu_1v$. Condiţia ca d să nu fie pătrat perfect împreună cu egalitatea dată de relaţiile lui Viète $uu_1 = v^2 - d$ asigură că u_1 este nenul. Admiţând că ar fi strict negativ, s-ar obţine $d = u_1^2 - cu_1v + v^2 \geq 1 + cv + v^2 > c + 1$, contradicţie. Prin urmare, $u_1 \geq 1$. În acest moment conchidem că (u_1, v) face parte din mulţimea de perechi considerată mai sus. În plus, din alegerea $u > v$ rezultă

$$u_1 = \frac{v^2 - d}{u} < \frac{u^2 - d}{u} < u,$$

astfel că $u_1 + v < u + v$. Iterând, ajungem la concluzia că există un şir infinit strict descrescător de numere naturale. Contradicţia provine din presupunerea că d nu ar fi pătrat perfect.

Exemplul $a = 1$, $b = 2$, $c = 1$, pentru care $a^2 + b^2 - abc = 3 = c + 2$, arată că, înlocuind valoarea $c+1$ cu una mai mare, nu putem obţine concluzia din problema **P1** fără a impune ipoteze suplimentare.

2.2. **Informaţii suplimentare.** În acest moment, problema **P6** este rezolvată. Privind cu luare aminte raţionamentul din subsecţiunea precedentă, se constată că el furnizează suficiente informaţii suplimentare despre tripletele de numere naturale (a, b, q) pentru a le putea determina complet.

Ideea esenţială a soluţiei date problemei **P6** este construirea unui şir de numere naturale $a > a_1 > \cdots > a_{k-1} > a_k = 0$ astfel ca

$$\frac{a_i^2 + a_{i+1}^2}{a_i a_{i+1} + 1} = q = \frac{a_1^2 + a^2}{aa_1 + 1} = \frac{a^2 + b^2}{ab + 1} \quad \text{pentru } i = 1, 2, \ldots, k - 1.$$

La încheierea procesului, atunci când $a_k = 0$, se obţine $q = a_{k-1}^2$.

Campbell [2] interpretează această egalitate un pic diferit decât ar fi de aşteptat, anume $q = \big(\text{c.m.m.d.c.}(a_{k-1}, a_k)\big)^2$. Întrucât $a_{i+1} = qa_i - a_{i-1}$, o inducţie simplă ce foloseşte relaţia $\text{c.m.m.d.c.}(a_{i-1}, a_i) = \text{c.m.m.d.c.}(a_{i+1}, a_i)$ conduce la concluzia că avem totdeauna $q = \big(\text{c.m.m.d.c.}(a, b)\big)^2$.

Dacă numerele naturale a, b, q verifică $q = t^2 = \frac{a^2+b^2}{ab+1}$, raţionamentul din Subsecţiunea 2.1 asigură că a şi b sunt termeni succesivi ai şirului recurent liniar $x_{k+1} = t^2 x_k - x_{k-1}$ $(k \geq 1)$ cu termenii iniţiali $x_0 = 0$, $x_1 = t$. Acest rezultat apare în multe locuri, printre care [1] şi [6].

2.3. **Valori negative.** Acum, că avem o soluţie pentru problema iniţială, putem să considerăm variaţiuni ale sale. O primă tentaţie ar fi să renunţăm la cerinţa ca toate numerele să fie naturale. Este simplu de văzut că o situaţie nouă apare efectiv doar când $ab < 0$. În aceste condiţii parafrazăm **P6** astfel:

P2. *Găsiţi numerele întregi strict pozitive a, b, c pentru care* $c = \frac{a^2+b^2}{ab-1}$.

Această problemă a constituit obiectul mai multor discuţii în forumuri de pe internet şi apare şi în [6].

Tranşăm rapid chestiunea pentru valori mici.

Dacă $b = 1$, condiţia este ca $a - 1$ să dividă $a^2 + 1 = a^2 - 1 + 2$, ceea ce are loc doar pentru $a = 2$ sau $a = 3$. În ambele cazuri, rezultă $c = 5$. Dacă $\min\{a, b\} \geq 2$, cu inegalitatea mediilor se deduce $c \geq 3$, iar din faptul că 2 nu are divizori pozitivi de forma $a^2 - 1$ rezultă $a \neq b$.

Pentru b şi c fixate, ecuaţia $x^2 - bcx + b^2 + c = 0$ are, în afară de a, o rădăcină $a_1 = bc - a$, care este întreagă, strict pozitivă (căci $aa_1 = b^2 + c$) şi mai mică decât b dacă $a > bc - a$. Într-adevăr,

$$a_1 = \frac{bc - \sqrt{b^2(c^2-4) - 4c}}{2} < b \Longleftrightarrow c < b^2(c-2).$$

Ultima inegalitate este consecinţă imediată pentru $b \geq 2$, $c \geq 3$.

Dacă $a_1 \geq 2$, raţionamentul poate fi reluat cu a_1 în loc de a şi se găseşte un număr natural $a_2 \geq 1$ astfel ca $a_1 > a_2$ şi $\frac{a_2^2+b^2}{a_2 b-1} = c$. După un număr finit de paşi se ajunge la relaţia $\frac{1+b^2}{b-1} = c$, care am văzut că nu poate avea loc decât pentru $c = 5$.

Ca şi în Subsecţiunea 2.2, se constată că mulţimea soluţiilor problemei **P2** poate fi descrisă complet: invariabil $c = 5$, iar a şi b sunt termeni succesivi în unul din şirurile date de relaţia de recurenţă liniară $y_{k+1} = 5y_k - y_{k-1}$ $(k \geq 1)$ cu termenii iniţiali $y_0 = 1$, $y_1 \in \{2, 3\}$ (vezi, de pildă, [6]).

2.4. **Un punct de vedere erudit.** În esenţă, rezolvarea problemelor **P6** şi **P2** depinde de capacitatea noastră de a rezolva în numere întregi ecuaţia $a^2 + b^2 - qab - q = 0$. După înmulţirea cu 4 şi completarea pătratului, devine evident că avem de-a face cu o ecuaţie Pell generalizată

$$x^2 - (q^2 - 4)y^2 = 4q. \tag{2}$$

Pentru această clasă de ecuaţii diofantice s-a pus la punct o teorie bine articulată şi algoritmi eficienţi de rezolvare (prezentaţi cu lux de amănunte în [5]). Se ştie, de pildă, că toate soluţiile întregi pentru ecuaţia (2) se obţin combinând, într-un mod simplu şi descris precis, un număr finit de soluţii fundamentale ale acesteia cu soluţia minimală pentru ecuaţia Pell ataşată (în care membrul drept este 1). Soluţia minimală pentru o ecuaţie Pell de forma $X^2-DY^2=1$ se obţine din dezvoltarea în fracţii continue a numărului iraţional $\sqrt{D}$. Acelaşi lucru este valabil pentru ecuaţia Pell generalizată $X^2-DY^2=C$ dacă $1 \le C < \sqrt{D}$. Aceste rezultate decurg dintr-o teoremă a lui Legendre potrivit căreia dacă $\frac{r}{s}$ este o fracţie pozitivă ireductibilă şi α este un număr iraţional astfel încât $|\alpha - \frac{r}{s}| < \frac{1}{2s^2}$, atunci $\frac{r}{s}$ este o convergentă a dezvoltării în fracţii continue pentru α.

Este de asemenea binecunoscut un mod alternativ de prezentare a soluţiilor unei ecuaţii Pell generalizate, şi anume, ca termeni ai unor şiruri liniar recurente de ordinul doi. Până acum am folosit de fapt această reprezentare. Pentru completitudine, cităm din [7] o reformulare a teoremei din Subsecţiunea 2.2 în contextul schiţat aici:

Teorema 1. *Toate tripletele de numere naturale* (a,b,q) *astfel ca* $a \le b$ *şi* $q=\frac{a^2+b^2}{ab+1}$ *sunt de forma*

- $\left(ty, \frac{tx+t^3y}{2}, t^2\right)$, *cu* $x^2-(t^4-4)y^2=4$ *şi* t *impar, sau*
- $\left(ty, tx+\frac{t^3y}{2}, t^2\right)$, *cu* $x^2-(4t^4-1)y^2=1$ *şi* t *par.*

Rezolvarea pentru problema **P6** prezentată anterior se bazează pe principii frecvent folosite în matematica elementară şi nu invocă rezultate din teoria ecuaţiilor Pell. Încercând să rezolve direct ecuaţia (2), autorii lucrării [7] constată că abordarea ce utilizează dezvoltarea în fracţii continue eşuează din cauza lipsei unui analog pentru teorema lui Legendre, astfel că purced să demonstreze o generalizare a sa, în care membrul drept să fie $\frac{2}{s^2}$ în loc de $\frac{1}{2s^2}$. Această modificare a ipotezei induce o schimbare dramatică a concluziei, apărând trei cazuri în plus faţă de ceea ce a găsit Legendre. Cele mai generale rezultate de acest tip apar în [3] şi permit, de exemplu, demonstrarea unor rezultate de următoarea factură:

Teorema 2. *Fie* k *un întreg impar supraunitar. Dacă* t *este un număr natural nenul mai mic decât* $2\sqrt{k^2-4}$ *şi ecuaţia* $x^2-(k^2-4)y^2=4t$ *are soluţii în întregi strict pozitivi coprimi, atunci fie* $t=1$*, fie* $t=k+2$.

3. O altă problemă

Variaţiunile pe o temă dată sunt mai totdeauna posibile. De pildă, în [6] este propus următorul analog al problemelor discutate anterior:

P3. *Găsiţi toţi întregii* a, b, c *pentru care* $q=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{1+ab+bc+ca}$ *este întreg.*

Autorii se mărginesc să formuleze şapte întrebări, prima dintre ele fiind „Ce proprietăţi ale soluţiilor problemei **P3** putem descoperi examinând soluţiile găsite cu calculatorul?" Probabil că imaginea rezultată din experimentele lor este deconcertantă, prea aproape de haos, mult prea complicată pentru a sugera răspunsuri imediate sau conjecturi cât de cât plauzibile. Creşterea complexităţii era de aşteptat, dat fiind faptul că pentru fiecare q nu mai avem de a face cu curbe, ci cu suprafeţe.

În această secţiune vom studia mulţimea

$$Q := \{(a,b,c,q) \in \mathbb{Z}^4 \ : \ q = \frac{a^2+b^2+c^2}{1+ab+bc+ca}\}$$

şi fibrele sale

$$Q_q := \{(a,b,c) \in \mathbb{Z}^3 \ : \ (a,b,c,q) \in Q\} \ (q \in \mathbb{Z}).$$

Să notăm că orice mulţime nevidă Q_q va conţine, împreună cu un triplet (a,b,c), opusul său $-(a,b,c) = (-a,-b,-c)$ şi orice permutare $\sigma(a,b,c)$ a sa.

Iată primele informaţii despre soluţiile problemei **P3**.

Propoziţia 3. *Pentru $(a,b,c,q) \in Q$, următoarele proprietăţi sunt îndeplinite:*

a) cel puţin unul dintre numerele a, b, c este par;

b) $\big(\text{c.m.m.d.c.}(a,b,c)\big)^2$ divide q;

c) q este multiplu de 4 dacă şi numai dacă c.m.m.d.c.(a,b,c) este par.

Demonstraţie. a) Atunci când abc este impar, numărătorul fracţiei ce dă q este impar, în vreme ce numitorul său este par, prin urmare se contrazice cerinţa ca q să fie întreg.

b) Pătratul acestui c.m.m.d.c. divide numărătorul şi este coprim cu numitorul, astfel că fracţia nu se poate simplifica cu niciun divizor al său.

c) Rezultă din partea *b*) şi dintr-un raţionament simplu şi scurt modulo 8.

$\square$

Întrucât **P3** se specializează la **P6**, din cele prezentate în Secţiunea 2 rezultă că mulţimea Q_{k^2} este infinită pentru orice întreg k şi elementele sale sunt date de recurenţe liniare.

Teorema 4. *Pentru orice întreg k, mulţimea Q_{k^2} conţine toate tripletele (a,b,c) constând din trei termeni cu indici consecutivi din şirul dat de relaţia de recurenţă liniară*

$$x_{n+3} = k^2(x_{n+2}+x_{n+1}) - x_n \quad (n \in \mathbb{Z})$$

şi condiţia iniţială $(x_0,x_1,x_2) = \sigma(0,0,\pm k)$.

În fapt, un rezultat asemănător este valabil în condiţii mai generale.

Teorema 5. *Fie q un întreg pentru care mulţimea Q_q este nevidă şi fie $(a_0,b_0,c_0) \in Q_q$. Atunci Q_q conţine toate tripletele (a,b,c) constând din trei termeni cu indici consecutivi din şirul dat de relaţia de recurenţă liniară*

$$y_{n+3} = q(y_{n+2}+y_{n+1}) - y_n \quad (n \in \mathbb{Z})$$

şi condiţia iniţială $(y_0,y_1,y_2) = \sigma(a_0,b_0,c_0)$.

Aceste rezultate răspund altor întrebări din [6]: „Există relaţii de recurenţă între soluţii?”, „Există formă explicită pentru soluţii?”, „Mulţimea soluţiilor este bine ordonată sau apare o structură de ordine mai complicată?”. De pildă, în Q_4 se găsesc tripletele formate din termeni cu indici consecutivi ai şirurilor

$$x_n: \quad \dots, -190, -40, -8, -2, \mathbf{0}, 0, 2, 8, 40, 190, 912, 4368, \dots,$$
$$x'_n: \quad \dots, 720, 152, 30, 8, \mathbf{0}, 2, 0, 8, 30, 152, 720, 3458, \dots.$$

(Termenul de indice nul al fiecărui şir este scris cu caractere îngroşate.)

Ambele şiruri sunt generate de relaţia de recurenţă liniară $a_{n+3} = 4(a_{n+2} + a_{n+1}) - a_n$ $(n \in \mathbb{Z})$ folosind condiţia iniţială $x_0 = x_1 = 0$, $x_2 = 2$ şi respectiv $x'_0 = x'_2 = 0$, $x'_1 = 2$. Ecuaţia caracteristică relevantă pentru această discuţie are rădăcinile -1, $\alpha = \frac{5+\sqrt{21}}{2}$, $\overline{\alpha} = \frac{5-\sqrt{21}}{2}$. Prin urmare, pentru orice $n \in \mathbb{Z}$ avem

$$x_n = \frac{(\sqrt{21}-3)\alpha^n - (\sqrt{21}+3)\overline{\alpha}^n + 6(-1)^n}{21},$$
$$x'_n = \frac{2\alpha^{n-1} + 2\overline{\alpha}^{n-1} - 10(-1)^n}{7}.$$

Şirul diferenţă $y_n = x_n - x'_n$ are toţi termenii de indice cel puţin 4 strict pozitivi, în vreme ce toţi termenii de indice negativ sunt negativi. Din această analiză se conchide, de exemplu, că tripletul $(8, 30, 152)$ din Q_4 nu poate fi găsit în şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

Este clar că descrierea pentru Q_q indicată în Teorema 5 este ineficientă, existând multă redundanţă. Ea ar putea deveni eficientă în măsura în care ar fi descoperit un criteriu simplu de a decide dacă două astfel de şiruri au sau nu termeni comuni. Primii paşi în această direcţie de cercetare sunt conţinuţi în rezultatul următor, care clarifică situaţia pentru valori mici ale lui q.

Propoziţia 6. *a)* Q_{-1} *este vidă.*

b) $Q_0 = \{(0,0,0)\}$.

c) $Q_1 = \{\pm\sigma(a, a, a+1) \ : \ a \in \mathbb{Z}\}$.

Demonstraţie. a) Presupunând contrariul, se ajunge la concluzia că trei numere pozitive $(2a+b+c)^2$, $3b^2+2bc+3c^2$, 4 au suma nulă.

c) Pentru $(a, b, c) \in Q_1$ arbitrar se obţine ecuaţia

$$a^2 - a(b+c) + b^2 - bc + c^2 - 1 = 0,$$

al cărei discriminant $(b+c)^2 - 4(b^2 - bc + c^2 - 1) = 4 - 3(b-c)^2$ este pătrat perfect. Rezultă fie $b = c$, fie $c = b \pm 1$, deci ecuaţia devine $(a-b)^2 = 1$ şi respectiv $a^2 - a(2b \pm 1) + b(b \pm 1) = 0$, având rădăcinile $a = b \pm 1$ şi respectiv $a = b$ sau $a = b \pm 1$. $\square$

În continuare vom presupune $|q| \geq 2$ şi vom da condiţii necesare pentru ca un astfel de întreg q să fie reprezentabil ca în **P3**.

Teorema 7. *Dacă* $|q| \geq 2$ *şi* $Q_q \neq \emptyset$, *atunci:*

a) $q \not\equiv 2 \pmod 4$,

b) $q+2$ *nu are divizori pozitivi congruenţi cu* 5 *sau* 7 *modulo* 8.

Demonstraţie. a) Conform Propoziţiei 3 *a*), cel mult doi dintre întregii a, b, c sunt impari. Dacă toţi ar fi pari, atunci q ar fi multiplu de 4 în virtutea Propoziţiei 3. Dacă unul singur este impar, numărătorul va fi impar, la fel şi q. În situaţia în care a şi b, să zicem, ar fi impari, numărătorul ar fi congruent cu 2 modulo 4, iar numitorul ar fi evident par, astfel că fracţia ce dă q s-ar simplifica prin 2, rezultând q impar.

b) Ecuaţia $a^2 - qa(b+c) + b^2 + c^2 - qbc - q = 0$ de gradul doi în a are rădăcinile întregi. Prin urmare, discriminantul său

$$(q^2-4)(b^2+c^2) + 2q(q+2)bc + 4q$$

trebuie să fie pătrat perfect. Acest pătrat este congruent cu -8 modulo orice divizor impar p al lui $q+2$. Altfel spus, -2 trebuie să fie rest pătratic modulo p, ceea ce se petrece doar pentru numerele pozitive $p \equiv 1$ sau $3 \pmod 8$. □

În ciuda simplităţii, aceste condiţii necesare pentru a avea Q_q nevidă sunt foarte eficiente. De pildă, dintre primele 100 de numere naturale strict pozitive, 10 sunt pătrate perfecte, 25 sunt pare, dar nu divizibile prin 4, iar pentru alte 46 există cel puţin un divizor al lui $q+2$ care este congruent cu 5 sau 7 modulo 8. Astfel, pentru 81 de întregi q, $1 \leq q \leq 100$, am putut decide dacă este sau nu reprezentabil ca în **P3**.

Cu ajutorul calculatorului au fost găsite reprezentări în care intervin întregi $1 \leq a \leq b \leq 1000$ şi $-2000 \leq c \leq 4000$ pentru încă alte 17 numere q din intervalul indicat, rămânând incert statutul a doar două valori: $q = 32$ şi 57. Pentru simetricul faţă de origine $[-100, -1]$, situaţia se prezintă astfel: 25 de numere sunt congruente cu 2 modulo 4, 43 sunt eliminate cu ajutorul criteriului din partea *b*) a teoremei precedente, -5 este reprezentabil (a se vedea Subsecţiunea 2.3), în vreme ce -1 nu este (cf. Propoziţia 6), iar pentru alte 28 de numere reprezentările dorite au fost găsite cu ajutorul calculatorului. Rămâne cititorului curios plăcerea de a decide dacă -20 şi -84 apar sau nu pe lista numerelor negative reprezentabile ca în problema **P3**.

În general, pentru orice $x > 0$, folosind Teoremele 4 şi 7 se stabileşte dacă mulţimea Q_q este sau nu vidă pentru mai mult de $\sqrt{x} + \frac{7x}{12}$ dintre întregii pozitivi q care nu depăşesc x.

Criteriile din Teorema 7 permit să răspundem şi altor întrebări referitoare la mulţimea

$$M = \{q \in \mathbb{Z} \ : \ Q_q \neq \emptyset\}.$$

Având în vedere **P6**, este clar că mulţimea numerelor pozitive care admit o reprezentare de tipul $\frac{a^2+b^2}{ab+1}$ este închisă la înmulţire. M nu are însă această proprietate: de pildă, 4, ca orice pătrat perfect, aparţine mulţimii

M, la fel şi 7 (căci $(2,3,36) \in Q_7$), dar $28 \notin M$ pentru că 30 este divizibil cu 5.

Rezultatul următor ilustrează ideea că în contextul actual există un analog pentru Teorema 1.

Teorema 8.

$$Q_4 = \{\pm\sigma(2u, 2v-4u, 4v-4u+2w) : u, v, w \in \mathbb{Z} \text{ şi } 9u^2 - 3v^2 + w^2 = 1\}.$$

Demonstraţie. O incluziune fiind uşor de verificat, vom arăta doar că orice triplet (a,b,c) din Q_4 are o reprezentare ca în enunţul teoremei.

Conform Propoziţiei 3, există întregi u, d, e astfel ca $a = 2u$, $b = 2d$, $c = 2e$ şi $e^2 - 4e(d+u) + d^2 + u^2 - 4du - 1 = 0$. Prin urmare, pentru un întreg convenabil w avem

$$4(d+u)^2 - d^2 - u^2 + 4du + 1 = 3(d^2 + u^2 + 4du) + 1 = w^2$$

şi $e = 2(d+u) + w$. Similar, trebuie ca $36u^2 - 3(3u^2 + 1 - w^2)$ să fie pătrat perfect, ceea ce înseamnă că există un întreg v pentru care să aibă loc relaţiile $d = v - 2u$ şi $9u^2 + w^2 - 1 = 3v^2$.

□

Pentru a răspunde încă unei întrebări formulate în [6], construim familii infinite de întregi negativi q care admit reprezentarea cerută în **P3**.

Teorema 9. *Pentru orice întreg m avem*

$$\big(2m+2, -2m, 2m^2+2m-1, -4m^4-8m^3-8m^2-4m-5\big) \in Q,$$
$$\big(m+1, -m, m^2+m-2, -m^4-2m^3+m^2+2m-5\big) \in Q.$$

Demonstraţie. Căutăm întregi a, b, c pentru care $ab+bc+ca = -2$. Această egalitate are loc dacă şi numai dacă $c = -\frac{ab+2}{a+b}$. Alegem mai întâi a şi b astfel ca suma lor să fie 2. Din cerinţa ca c să fie întreg se deduce că a şi b trebuie să fie simultan numere pare. Substituind, se găsesc formulele din enunţ ce descriu prima familie.

Celălalt exemplu se construieşte analog, impunând (la fel de arbitrar) ca $a+b$ să fie 1. □

Similar se pot indica familii infinite de întregi pozitivi, niciun membru nefiind pătrat perfect, cu reprezentarea dorită.

Teorema 10. *Pentru orice întreg m avem*

$$(a,b,c,q) = \left(m+1, -m, m^2+m+1, m^3+2m^2+2m+1+\frac{m^4+m^2}{2}\right) \in Q.$$

Dacă $m \not\equiv 0$ sau $7 \pmod 8$, q nu este pătrat perfect.

Demonstraţie. Deoarece $m^4+2m^3+5m^2+4m+2 = (m^2+m+2)^2-2$, condiţia de a avea q pătrat este echivalentă cu existenţa unui număr natural y astfel ca $y^2 - 2\big(\frac{m(m+1)}{2}+1\big)^2 = -1$. Soluţiile în numere naturale ale ecuaţiei

Pell negative $Y^2-2X^2=-1$ sunt date de formula $y_k+x_k\sqrt{2}=(1+\sqrt{2})^{2k+1}$, unde $k\in\mathbb{N}$. Termenii şirului $(x_k)_k$ sunt obţinuţi din relaţia de recurenţă liniară $x_{k+2}=6x_{k+1}-x_k$ şi condiţia iniţială $x_0=1$, $x_1=5$. Folosind această informaţie, se vede imediat că pentru orice număr natural k avem $x_k\equiv 1 \pmod 4$. La fel de simplu se verifică apoi că $\frac{m(m+1)}{2+1}\equiv 1 \pmod 4$ dacă şi numai dacă $m\equiv 0$ sau $7 \pmod 8$. $\square$

Notăm că pentru $m=0$ şi $m=7$ se obţine $q=1$, respectiv $q=1681=$ $=41^2$, în vreme ce pentru $m=8$ avem $q=2737=7\cdot 17\cdot 23$, iar pentru $m=15$, $q=29281=7\cdot 4183$. Mai general, pentru $m\equiv 8$ sau $16 \pmod{40}$ rezultă $q\equiv 7 \pmod{10}$, astfel că pentru aceste valori ale lui m cu siguranţă q nu este pătrat perfect. Concluzii similare se obţin pentru valori negative ale parametrului m observând că transformarea $m\mapsto -m-1$ are ca efect permutarea valorilor pentru a şi b date în teoremă.

Bibliografie

[1] J.-P. Bode, H. Harborth, *Positive integers* $\frac{a^2+b^2}{ab+1}$ *are squares*, în Applications of Fibonacci numbers, Vol. 9: Proc. Tenth Internat. Research Conf. on Fibonacci Numbers and their Appl. (F. T. Howard, ed.), Kluwer, 2004, pp. 63–67.

[2] J. Campbell, *A solution to 1988 IMO question 6* (*The most difficult question ever set at an IMO*), Math. Competitions, **1** (1988), 29–33.

[3] A. Dujella, B. Ibrahimpašić, *On Worley's theorem in Diophantine approximations*, Ann. Math. Inform., **35** (2008), 61–73.

[4] A. Engel, *Problem Solving Strategies*, Springer-Verlag, New York, 1997.

[5] M. Jacobson, H. Williams, *Solving the Pell Equation*, CMS Books in Mathematics, Springer, New York, 2009.

[6] I. Laukó, G.A. Pintér, L. Pintér, *Another step further ... On a problem of the 1988 IMO*, Math. Mag., **79** (2006), 45–53.

[7] F. Luca, C. F. Osgood, P. G. Walsh, *Diophantine approximations and a problem from the 1988 IMO*, Rocky Mountain J. Math., **36** (2006), no. 2, 637–648.

[8] S. Shirali, *Infinite descent – but not into Hell!*, Resonance, **8** (2003), 42–55.

Received: August 10, 2012. Accepted: November 11, 2012

Partiţii întregi şi grafuri orientate aciclice

Mircea Merca[1)]

Articol dedicat Prof. Dr. Ioan Tomescu
la a 70-a aniversare

Abstract. The algorithms for generating the integer partitions of a positive integer have long been invented. Nevertheless, data structures for storing the integer partitions are not received due attention. In 2005 there were introduced diagram structures to store integer partitions. In this article, we present a recently obtained result in storing integer partitions: the binary diagrams.

Keywords: integer partition, ascending composition, directed graph, tree
MSC : 15A17, 05C05, 05C20

1. Introducere

Orice număr întreg pozitiv n poate fi descompus într-o sumă de unul sau mai multe numere întregi pozitive λ_i,

$$n = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k.$$

Dacă ordinea numerelor întregi λ_i nu este importantă, această reprezentare se numeşte partiţie a numărului întreg n, altfel, se numeşte compunere. Când

$$\lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_k,$$

avem o compunere ascendentă. Numărul partiţiilor lui n este dat de $p(n)$, funcţia lui Euler pentru partiţii [1]. Şirul

$$\{p(n)\}_{n\ge 0} = \{1, 1, 2, 3, 5, 7, 11, 15, 22, 30, 42, 56, 77, 101, 135, 176, \ldots\}$$

este bine cunoscut în literatură [10, şirul A000041]. Pentru mai multe detalii referitoare la $p(n)$ se poate consulta [1].

Primii algoritmi pentru generarea partiţiilor întregi au fost descoperiţi de către R. J. Boscovich în anul 1747 şi K. F. Hindenburg în anul 1778, a se vedea Dickson [3, pag. 101–106]. În anul 2005, Lin [7] a propus patru structuri de date pentru memorarea partiţiilor întregi: două structuri liniare (directă şi multiplicativă), o structură arborescentă şi o structură de tip diagramă.

Utilizarea structurilor arborescente pentru stocarea partiţiilor întregi nu este o idee chiar atât de recentă. Fenner şi Loizou [4] au introdus arborii binari pentru reprezentarea partiţiilor întregi în 1979 şi apoi s-au ocupat de generarea partiţiilor întregi cu ajutorul metodelor de parcurgere a arborilor binari, a se vedea Fenner şi Loizou [5, 6].

[1)]Department of Mathematics, University of Craiova, mircea.merca@profinfo.edu.ro

Ideea utilizării structurilor arborescente pentru stocarea partiţiilor unui număr întreg se bazează pe faptul că două partiţii ale aceluiaşi număr pot avea mai multe părţi comune. De exemplu, compunerile ascendente

$$[1, 1, 1, 1, 1, 1] \qquad \text{şi} \qquad [1, 1, 1, 1, 2]$$

au patru părţi comune. În această situaţie, o secvenţă de arce dintr-un arbore poate stoca aceste părţi comune.

Lin [7] a creat structura arborescentă pentru stocarea partiţiilor întregi conform următoarei reguli: rădăcina arborelui este etichetată cu $(1, n)$ şi (x', y') este un descendent direct al nodului (x, y) dacă şi numai dacă

$$x' \in \left\{x, x+1, \ldots, \left[\frac{y}{2}\right], y\right\} \qquad \text{şi} \qquad y' = y - x',$$

unde $[x]$ este notaţia uzuală pentru partea întreagă a lui x. Dacă $x' = y$ atunci $(x', y') = (y, 0)$ este un nod terminal. Este clar că orice nod terminal este de forma $(x, 0)$, $0 < x \leq n$. Lin [7] a demonstrat că $[x_1, x_2, \ldots, x_k]$ este o compunere ascendentă a lui n dacă şi numai dacă

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k)$$

este un drum care leagă rădăcina (x_0, y_0) de nodul terminal (x_k, y_k). Apoi, bazându-se pe acest fapt, a arătat că numărul total de noduri necesar pentru a stoca partiţiile lui n este $2p(n)$, iar numărul nodurilor terminale este $p(n)$. În continuare, vom utiliza pentru această structură arborescentă denumirea de arbore Lin.

Arborele Lin care stochează toate partiţiile numărului 6 este prezentat în Figura 1. Cum poate fi utilizat acest arbore pentru a genera toate partiţiile numărului 6? Pornind de la rădăcină, vom parcurge arborele în adâncime şi, când ajungem la un nod terminal, listăm drumul parcurs. De exemplu, drumul

$$(1, 6)(1, 5)(1, 4)(1, 3)(1, 2)(2, 0)$$

leagă rădăcina arborelui de nodul terminal $(2, 0)$. Dacă eliminăm din acest drum prima pereche şi păstrăm din fiecare pereche rămasă numai prima valoare, obţinem compunerea ascendentă $[1, 1, 1, 1, 2]$.

În arborele Lin, descendenţii direcţi ai nodului $(1, n)$ sunt noduri de forma $(k, n-k)$. Din regula de construire a arborilor Lin deducem că toţi descendenţii direcţi ai nodului $(k, n-k)$, $2 \leq k \leq \left[\frac{n}{2}\right]$, sunt descendenţi direcţi ai nodului $(1, n-k)$. Această observaţie i-a permis lui Lin [7] să transforme acest arbore într-un graf orientat aciclic, prin eliminarea descendenţilor nodului $(k, n-k)$ din arbore şi crearea legăturilor corespunzătoare între nodul $(k, n-k)$ şi descendenţii direcţi ai nodului $(1, n-k)$. Structura de date astfel obţinută este denumită de către Lin [7] diagrama partiţiilor unui număr întreg. Vom utiliza pentru acest tip de diagramă denumirea de diagramă Lin. În Figura 2 este prezentată diagrama Lin obţinută prin transformarea arborelui Lin din Figura 1.

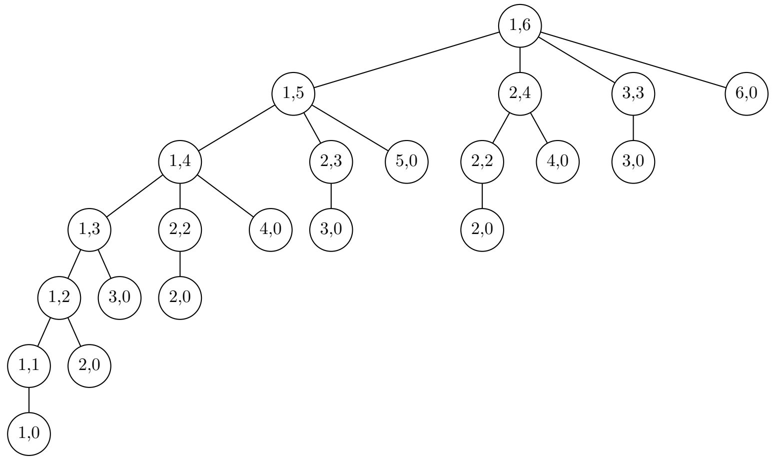

FIGURE 1. Arborele Lin pentru numărul 6

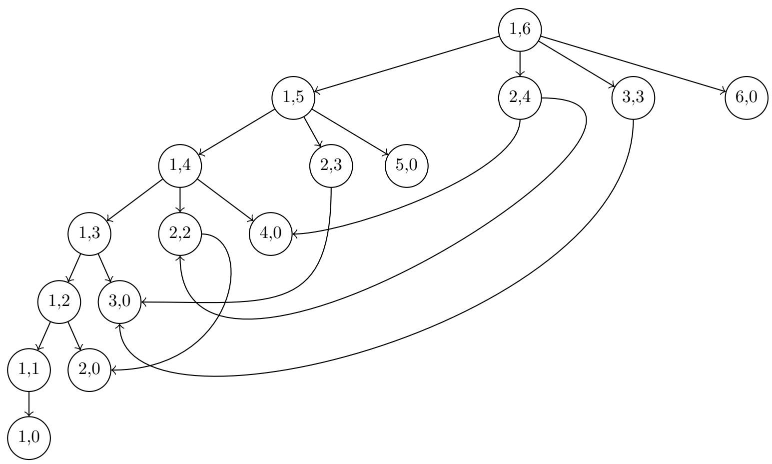

FIGURE 2. Diagrama Lin pentru numărul 6

Este clar că diagrama Lin este o reprezentare concisă a arborelui Lin. Din acest motiv vom păstra pentru nodul $(1, n)$ denumirea de nod rădăcină, iar pentru nodurile $(k, 0)$, $k = 1, 2, \dots, n$, denumirea de noduri terminale. De fapt, nodul rădăcină este singurul nod din diagrama Lin care are gradul intern zero, iar nodurile terminale sunt singurele noduri din diagrama Lin care au gradul extern zero. Este evident că, în diagrama Lin a numărului n, există $p(n)$ drumuri între rădăcină şi cele n noduri terminale şi fiecare dintre aceste drumuri reprezintă o partiţie a lui n.

Lin [7] a demonstrat următoarea teoremă:

Teorema 1. *Numărul nodurilor din diagrama Lin a numărului întreg pozitiv n este egal cu* $\left[\frac{n^2}{4}\right] + n + 1$.

Pentru a avea o imagine şi mai clară asupra dimensiunii diagramelor Lin, am stabilit în [9] formula pentru numărul arcelor din diagrama Lin.

Teorema 2. *Numărul arcelor din diagrama Lin a numărului întreg pozitiv n este egal cu*

$$\left[\frac{1}{36}n^3 + \frac{7}{24}n^2 + \frac{5}{12}n + 1\right].$$

2. Diagrame binare

Un arbore orientat este definit formal ca o mulţime A de unul sau mai multe noduri, astfel încât există în A un nod special numit rădăcina arborelui şi celelalte noduri din A sunt repartizate în $m \geq 0$ mulţimi disjuncte $A_1, \ldots, A_m$, fiecare mulţime fiind la rândul ei un arbore orientat. Arborii $A_1, \ldots, A_m$ se numesc subarborii rădăcinii. Dacă ordinea relativă a subarborilor $A_1, \ldots, A_m$ este importantă spunem că arborele orientat este un arbore ordonat. Un arbore ordonat în care fiecare nod are cel mult doi subarbori se numeşte arbore binar. Arborii binari în care fiecare nod neterminal are exact doi subarbori se numeşte arbore binar strict. Dacă într-un arbore orientat ştim care dintre noduri este rădăcină atunci sensurile arcelor sunt complet determinate şi nu mai este necesară reprezentarea lor.

Este bine cunoscut faptul că orice arbore ordonat poate fi convertit într-un arbore binar schimbând legăturile dintre noduri: primul descendent al unui nod A devine descendent stâng al nodului A, iar următorul frate al nodului A devine descendent drept al nodului A. Aplicând această transformare asupra arborilor Lin se obţine un arbore binar. Eliminând apoi rădăcina acestui arbore binar, obţinem un arbore binar strict care memorează toate partiţiile numărului întreg n. În Figura 3 este prezentat arborele binar strict obţinut în urma transformării arborelui Lin din Figura 1.

Pentru a genera compunerile ascendente, parcurgem în adâncime arborele binar strict pentru stocarea partiţiilor. Când ajungem la un nod terminal, listăm din drumul care leagă rădăcina de acest nod terminal numai nodurile care sunt succedate de descendentul stâng. De exemplu,

$$(1,5)(1,4)(1,3)(2,2)(2,0)$$

este un drum care leagă nodul rădăcină $(1,5)$ de nodul terminal $(2,0)$. Din acest drum nodul $(1,3)$ este eliminat la listare deoarece este urmat de nodul $(2,2)$ care este descendent drept. Păstrând din fiecare pereche rămasă numai prima valoare, obţinem compunerea ascendentă $[1,1,2,2]$. Pe de altă parte, observăm că mai există două drumuri care leagă nodul rădăcină $(1,5)$ de alte două noduri terminale etichetate $(2,0)$:

$$(1,5)(1,4)(1,3)(1,2)(1,1)(2,0) \qquad \text{şi} \qquad (1,5)(2,4)(2,2)(2,0).$$

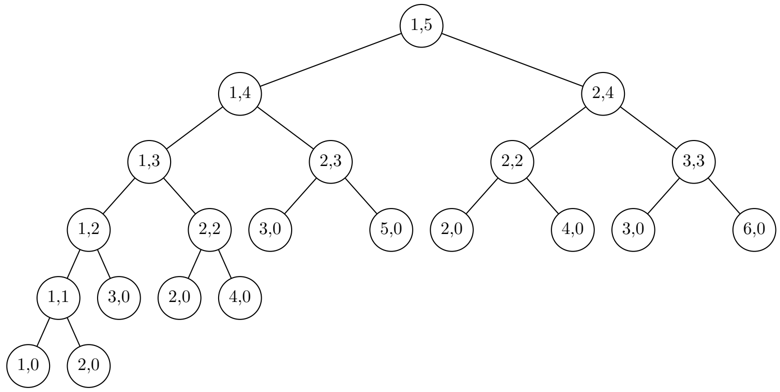

Figure 3. Arborele binar strict pentru stocarea partiţiilor numărului 6

Aceste drumuri reprezintă compunerile ascendente

$$[1, 1, 1, 1, 2] \qquad \text{şi} \qquad [2, 2, 2].$$

Arborele binar strict pentru stocarea partiţiilor numărului întreg n poate fi construit după următoarea regulă: rădăcina arborelui este etichetată cu $(1, n-1)$, nodul (x_s, y_s) este un descendent stâng al nodului (x, y) dacă şi numai dacă

$$x_s = \begin{cases} x, & \text{dacă } 2x \leq y \\ ym, & \text{altfel} \end{cases} \qquad \text{şi} \qquad y_s = y - x_s, \tag{3}$$

iar nodul (x_d, y_d) este un descendent drept al nodului (x, y) dacă şi numai dacă

$$x_d = \begin{cases} x+1, & \text{dacă } 2+x \leq y \\ x+y, & \text{altfel} \end{cases} \qquad \text{şi} \qquad y_d = x + y - x_d. \tag{4}$$

Arborii binar stricţi pentru stocarea partiţiilor întregi au fost derivaţi din arborii Lin şi sunt diferiţi de arborii binari introduşi de Fenner şi Loizou. Avantajele utilizării structurilor arborescente binare sunt bine cunoscute şi în acest caz au fost concretizate în [8] prin obţinerea celui mai rapid algoritm pentru generarea partiţiilor întregi.

În Figura 3 observăm că subarborele stâng al nodului $(2, 4)$ este identic cu subarborele drept al nodului $(1, 3)$. Această redundanţă a informaţiilor este confirmată de următoarea teoremă prezentată în [9].

Teorema 3. *Fie (x, y) un nod intern din arborele binar strict pentru stocarea partiţiilor unui număr întreg, astfel încât $x > 1$. Dacă $2x \leq y$, atunci subarborele stâng al nodului (x, y) este identic cu subarborele drept al nodului $(x-1, y-x+1)$. Dacă $2x > y$, atunci subarborele stâng al nodului (x, y) este identic cu subarborele drept al nodului $\left(\left[\frac{y}{2}\right], y - \left[\frac{y}{2}\right]\right)$.*

Conform acestei teoreme, în orice arbore binar strict pentru stocarea partiţiilor întregi, subarborele stâng al oricărui nod intern (x, y) cu $x > 1$ este identic cu subarborele drept al unui nod (x', y'). Pentru orice nod intern (x, y) cu $x > 1$, eliminăm subarborele său stâng şi introducem un arc de la nodul (x, y) la descendentul drept al nodului (x', y'). Astfel, obţinem un graf orientat aciclic care a fost denumit în [9] diagramă binară a partiţiilor întregi. În Figura 4 este prezentată diagrama binară obţinută prin transformarea arborelui binar strict din Figura 3.

Două rezultate care caracterizează dimensiunea diagramelor binare au fost prezentate în [9].

Teorema 4. *Numărul nodurilor diagramei binare a partiţiilor întregului pozitiv n este egal cu* $\left[\frac{n^2}{4}\right] + n$.

Teorema 5. *Numărul arcelor diagramei binare a partiţiilor întregului pozitiv n este egal cu* $\left[\frac{n^2}{2}\right]$.

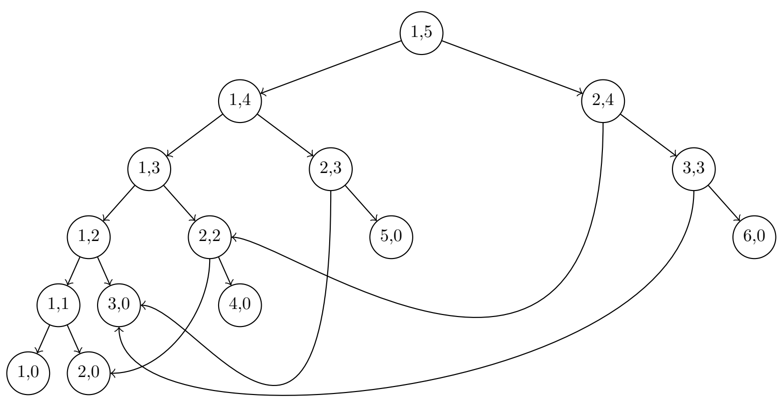

FIGURE 4. Diagrama binară pentru stocarea partiţiilor numărului 6

Comparând Teoremele 1 şi 4, nu putem spune că diagramele binare sunt mai eficiente în stocarea partiţiilor întregi decât diagramele Lin. Ceea ce diferă este numărul arcelor care este considerabil mai mic în cazul diagramelor binare. În plus, nodurile diagramei binare a partiţiilor întregului pozitiv n pot fi rearanjate într-un tablou bidimensional cu $\left[\frac{n}{2}\right] + 1$ linii şi n coloane, denumit tabloul compunerilor ascendente [9]. În acest tablou, fiecare nod ocupă o celulă conform următoarei reguli: celula indexată (i, j) este ocupată de nodul (x, y) dacă şi numai dacă

$$i = \begin{cases} \left[\dfrac{x}{2}\right] + 1, & \text{dacă } y = 0, \\ x, & \text{altfel} \end{cases} \quad \text{şi} \quad j = x + y. \tag{5}$$

Este clar că există celule în tablou care nu sunt ocupate. Utilizând Teorema 4 deducem că numărul celulelor neocupate este un pătrat perfect, $\left[\frac{n}{2}\right]^2$ (şirul A007894 în [10]). De exemplu, conform (5), nodurile diagramei binare din Figura 4 sunt rearanjate în Figura 5.

Notăm cu $S(i,j)$ şi $D(i,j)$ poziţiile succesorilor direcţi ai nodului de pe poziţia (i,j) din tabloul compunerilor ascendente. Ţinând cont de (5), deducem că

$$S_{i,j} = \begin{cases} (i, j-i), & \text{pentru} \quad 3i \le j, \\ \left(\left[\dfrac{j-i}{2}\right] + 1, j-i\right), & \text{pentru} \quad 2i \le j < 3i \end{cases}$$

şi

$$D_{i,j} = (i+1, j), \qquad \text{pentru} \quad 2i \le j.$$

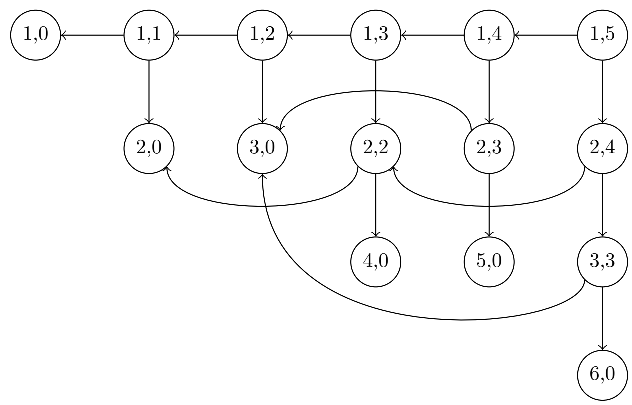

Figure 5. Tabloul compunerilor ascendente ale numărului 6

Astfel, tabloul compunerilor ascendente pentru numărul întreg pozitiv n poate fi reprezentat concis de următoarea matrice

$$\Lambda = (\lambda_{i,j})_{i=1,\dots,[n/2]+1, j=1,\dots,n}$$

definită astfel:

$$\lambda_{i,j} = \begin{cases} i, & \text{dacă } 2i \le j, \\ j, & \text{dacă } i = \left[\dfrac{j}{2}\right] + 1, \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases}$$

În [9], această matrice a fost denumită matricea compunerilor ascendente. De exemplu, matricea compunerilor ascendente a numărului 6 este

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

3. Observaţii şi concluzii

Alegerea structurilor de date pentru stocarea partiţiilor întregi este de o importanţă crucială pentru eficienţa algoritmilor de generare a partiţiilor. Metoda generării partiţiilor întregi prin parcurgerea structurilor arborescente utilizate pentru stocarea lor a fost introdusă de către Fenner şi Loizou [4, 5, 6]. În [8], am adaptat algoritmul general pentru parcurgerea în inordine a arborilor binari la cazul particular al arborilor binari stricţi pentru stocarea partiţiilor întregi şi am obţinut cel mai eficient algoritm pentru generarea partiţiilor întregi [8, Algorithm 6]. În [9], diagramele binare pentru stocarea partiţiilor ne-au permis să obţinem o versiune uşor îmbunătăţită pentru acest algoritm.

Notăm cu $t_1(n)$ timpul mediu de execuţie pentru [8, Algorithm 6], cu $t_2(n)$ timpul mediu de execuţie pentru algoritmul Fenner-Loizou [4, 5] şi cu $r(n)$ raportul dintre $t_1(n)$ şi $t_2(n)$,

$$r(n) = \frac{t_1(n)}{t_2(n)}.$$

În Tabelul 1 sunt prezentate câteva dintre valorile $r(n)$ obţinute utilizând Visual C++ 2010 Express Edition pe un calculator cu procesor Intel Pentium Dual T3200 2.00 GHz. Pentru fiecare algoritm, timpul mediu de execuţie a fost obţinut în urma efectuării a zece teste. În cazul $n = 130$, se poate observa că timpul mediu de execuţie pentru [8, Algorithm 6] reprezintă $43,5\%$ din timpul mediu de execuţie al algoritmului Fenner-Loizou.

Tabelul 1. Rezultate experimentale pentru $r(n)$

n	75	90	95	110	115	130
$r(n)$	0,426	0,433	0,448	0,435	0,435	0,435

Pe de altă parte, analiza eficienţei algoritmilor obţinuţi în [8] şi [9] pentru generarea partiţiilor întregi ne-a permis să descoperim noi inegalităţi care implică funcţia partiţiilor $p(n)$ (se consideră $p(n) = 0$ pentru $n < 0$). Inegalitatea

$$p(n) - p(n-1) - p(n-2) + p(n-5) \leq 0, \qquad n > 0,$$

descoperită şi demonstrată în [8], este utilizată pentru a dovedi eficienţa celui mai rapid algoritm pentru generarea partiţiilor întregi. Ulterior, această inegalitate a fost prezentată în [2] ca un caz particular al unei familii infinite de inegalităţi. Următoarea inegalitate

$$p(n) - 5p(n-3) + 5p(n-5) \geq 0, \qquad n \neq 3,$$

a fost descoperită în [9] pe parcursul efectuării testelor de eficienţă a algoritmilor propuşi pentru generarea partiţiilor întregi. Această inegalitate nu este demonstrată şi se află în continuare în stadiul de conjectură. O variantă îmbunătăţită a acestei inegalităţi este prezentată în următoarea conjectură.

Conjectura 3.1. *Fie n un număr întreg. Inegalitatea*

$$p(n) - 5p(n-3) + 5p(n-5) - p(n-14) \geq 0$$

este adevărată, dacă şi numai dacă $n \neq 3$.

Pentru

$$x_n = p(n) - 5p(n-3) + 5p(n-5) - p(n-14)$$

obţinem

$$\begin{aligned} \{x_n\}_{n\geq 0} \quad = \quad & \{1, 1, 2, -2, 0, 2, 1, 0, 2, 0, 2, 1, 2, 1, 4, 0, 4, 4, 5, 3, 11, \\ & 7, 15, 15, 23, 27, 44, 44, 68, 84, 113, 135, 189, 223, 298, \ldots\} \end{aligned}$$

şi constatăm experimental că şirul $\{x_n\}_{n\geq 21}$ este crescător. Se poate demonstra acest fapt?

Autorul mulţumeşte domnului Dr. Mihai Cipu de la Institutul de Matematică „Simion Stoilow“ al Academiei Române pentru sugestiile sale utile în ceea ce priveşte aspectul şi conţinutul acestui articol.

Bibliografie

[1] G. E. Andrews, *The Theory of Partitions*, Addison-Wesley, 1976.

[2] G. E. Andrews, M. Merca, *The truncated pentagonal number theorem*, J. Combin. Theory. Ser. A, **119** (2012), 1639–1643.

[3] L. E. Dickson, *History of the Theory of Numbers: Diophantine Analysis*, AMS Chelsea Publishing, 2002.

[4] T. I. Fenner, G. Loizou, *A binary tree representation and related algorithms for generating integer partitions*, Comp. J., **23** (1980), 332–337.

[5] T. I. Fenner, G. Loizou, *An analysis of two related loop-free algorithms for generating integer partitions*, Acta Inform., **16** (1981), 237–252.

[6] T. I. Fenner, G. Loizou, *Tree traversal related algorithms for generating integer partitions*, SIAM J. Comput., **12** (1983), 551–564.

[7] R. B. Lin, *Efficient data structures for storing the partitions of integers*, The 22nd Workshop on Combinatorics and Computation Theory, Taiwan, 2005.

[8] M. Merca, *Fast algorithm for generating ascending compositions*, J. Math. Model. Algorithms, **11** (2012), 89–104.

[9] M. Merca, *Binary diagrams for storing ascending compositions*, Comp. J. (2012), doi: 10.1093/comjnl/bxs111.

[10] N. J. A. Sloane, *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*, available at http://oeis.org.

Received: November 11, 2012. Accepted: January 15, 2013

Olimpiada de Matematică a studenţilor din sud-estul Europei, SEEMOUS 2013

CORNEL BĂEŢICA[1)] şi GABRIEL MINCU[2)]

Articol dedicat Prof. Dr. Ioan Tomescu la a 70-a aniversare

Abstract. This note deals with the problems of the 7th South Eastern European Mathematical Olympiad for University Students, SEEMOUS 2013, organized in Athens, Greece, by the Hellenic Mathematical Society and the University of Athens, between March 21 and March 25, 2013.

Keywords: Similar matrices, Jordan canonical form, Skolem-Noether theorem, Cauchy-Schwarz inequality, eigenvalues, eigenvectors, cyclotomic polynomials

MSC : 11C20; 15A18; 33D05; 40A30

Conform regulamentului concursului, acesta a avut o singură probă constând din patru probleme. Prezentăm mai jos aceste probleme însoţite de soluţii, dintre care unele au apărut în lucrările concurenţilor, iar altele în juriu. Pentru soluţiile oficiale facem trimitere la http://www.seemous.eu.

Problema 1. Aflaţi funcţiile continue $f : [1, 8] \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$\int_1^2 f^2(t^3)\mathrm{d}t + 2\int_1^2 f(t^3)\mathrm{d}t = \frac{2}{3}\int_1^8 f(t)\mathrm{d}t - \int_1^2 (t^2-1)^2\mathrm{d}t.$$

Universitatea din Patras, Grecia

Aceasta a fost considerată de juriu drept o problemă uşoară.

Soluţie. Facem substituţia $t = x^3$ şi avem că

$$\int_1^8 f(t)\mathrm{d}t = 3\int_1^2 x^2 f(x^3)\mathrm{d}x.$$

Înlocuind în relaţia iniţială obţinem

$$\int_1^2 f^2(t^3)\mathrm{d}t + 2\int_1^2 f(t^3)\mathrm{d}t = 2\int_1^2 t^2 f(t^3)\mathrm{d}t - \int_1^2 (t^2-1)^2\mathrm{d}t.$$

[1)] Universitatea din Bucureşti, Facultatea de Matematică şi Informatică, RO-010014 Bucureşti, România, cornel.baetica@fmi.unibuc.ro

[2)] Universitatea din Bucureşti, Facultatea de Matematică şi Informatică, RO-010014 Bucureşti, România, gamin@fmi.unibuc.ro

Trecem totul în partea stângă şi relaţia se scrie astfel:

$$\int_1^2 \left[f^2(t^3) + 2f(t^3) - 2t^2 f(t^3) + (t^2-1)^2\right] \mathrm{d}t = 0.$$

Se observă imediat că $f^2(t^3)+2f(t^3)-2t^2f(t^3)+(t^2-1)^2 = [f(t^3)-(t^2-1)]^2$.

Aşadar,

$$\int_1^2 \left[f(t^3)+1-t^2\right]^2 \mathrm{d}t = 0.$$

Deoarece f este funcţie continuă rezultă că $f(t^3) = t^2-1$ pentru orice $t \in [1,2]$ şi de aici obţinem că $f(x) = x^{2/3} - 1$ pentru orice $x \in [1,8]$. $\square$

Problema 2. Fie $M, N \in M_2(\mathbb{C})$ matrice nenule cu proprietatea că $M^2 = N^2 = 0_2$ şi $MN + NM = I_2$. Arătaţi că există o matrice inversabilă $A \in M_2(\mathbb{C})$ astfel încât $M = A \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} A^{-1}$ şi $N = A \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A^{-1}$.

Cornel Băeţica, România

Aceasta a fost considerată de juriu drept o problemă de dificultate medie. S-au găsit multe soluţii la această problemă, unele de către concurenţi iar altele de către membrii juriului. Studenţii care au rezolvat problema au ales abordări similare celor din primele două soluţii prezentate în continuare.

Soluţia 1. Deoarece $M^2 = 0_2$, singura valoare proprie a lui M este 0. Folosind forma canonică Jordan a unei matrice de ordin 2 obţinem că există o matrice inversabilă $P \in M_2(\mathbb{C})$ astfel încât $M = P^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P$. Înmulţind relaţia $MN + NM = I_2$ la stânga cu P şi la dreapta cu P^{-1} rezultă că

$$(PMP^{-1})(PNP^{-1}) + (PNP^{-1})(PMP^{-1}) = I_2.$$

Notând $PNP^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ şi înlocuind în relaţia de mai sus obţinem:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = I_2.$$

Deducem imediat că $c = 1$ şi $d = -a$. Dar $(PNP^{-1})^2 = PN^2P^{-1} = 0_2$, de unde rezultă că $b = -a^2$. În consecinţă, $PNP^{-1} = \begin{pmatrix} a & -a^2 \\ 1 & -a \end{pmatrix}$. Din relaţia

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -a^2 \\ 1 & -a \end{pmatrix}$$

obţinem că

$$(B^{-1}P)N(P^{-1}B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

unde $B = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Acum notăm $A = B^{-1}P$ şi nu ne mai rămâne decât să verificăm că $AMA^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. $\square$

Soluţia 2. Fie $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi $E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Căutăm $A \in M_2(\mathbb{C})$ care să satisfacă cerinţele problemei şi, în plus, $\det A = 1$. Fie aşadar $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ cu $xt - yz = 1$. Avem că $A^{-1} = \begin{pmatrix} t & -y \\ -z & x \end{pmatrix}$. Atunci

$$AE_{12}A^{-1} = \begin{pmatrix} -xz & x^2 \\ -z^2 & xz \end{pmatrix} \text{ şi } AE_{21}A^{-1} = \begin{pmatrix} yt & -y^2 \\ t^2 & -yt \end{pmatrix}.$$

Pe de altă parte, o matrice $X \in M_2(\mathbb{C})$ satisface $X^2 = 0$ dacă şi numai dacă $\operatorname{tr} X = 0$ şi $\det X = 0$. Aceasta ne arată că putem scrie $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ cu $a^2 + bc = 0$ şi $N = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & -a' \end{pmatrix}$ cu $a'^2 + b'c' = 0$.

Aşadar avem de găsit $x, y, z, t \in \mathbb{C}$ cu $xt - yz = 1$ astfel încât

$$M = \begin{pmatrix} -xz & x^2 \\ -z^2 & xz \end{pmatrix} \text{ şi } N = \begin{pmatrix} yt & -y^2 \\ t^2 & -yt \end{pmatrix}.$$

Obţinem $a = -xz$, $b = x^2$, $c = -z^2$, $a' = yt$, $b' = -y^2$, $c' = t^2$. Evident putem afla pe x şi z din primele trei ecuaţii, respectiv pe y şi t din ultimele trei ecuaţii. Mai trebuie să verificăm condiţia $xt - yz = 1$. Dar din $MN + NM = I_2$ rezultă că $2aa' + bc' + b'c = 1$, adică $(xt - yz)^2 = 1$. Dacă $xt - yz = -1$, atunci schimbăm pe x cu $-x$ şi pe z cu $-z$, deoarece $-x$ şi $-z$ satisfac şi ele primele trei ecuaţii, deci putem alege $xt - yz = 1$. $\square$

Soluţia 3. Considerăm $f, g : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ date prin $f(x) = Mx$ şi $g(x) = Nx$. Avem $f^2 = g^2 = 0$ şi $fg + gf = \mathrm{id}_{\mathbb{C}^2}$.

Să remarcăm că $\ker f \neq 0$, altminteri din $f^2 = 0$ rezultă $f = 0$, fals. Analog $\ker g \neq 0$. Mai mult, $\ker f \cap \ker g = 0$: dacă $f(x) = g(x) = 0$ din $f(g(x)) + g(f(x)) = x$ deducem că $x = 0$. În concluzie, $\mathbb{C}^2 = \ker f \oplus \ker g$. Fie acum $v_1 \in \ker f$, $v_1 \neq 0$ şi $v_2 \in \ker g$, $v_2 \neq 0$. Atunci $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ formează o bază în $\mathbb{C}^2$. În această bază matricea asociată transformării liniare f este de forma $\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$, iar matricea asociată transformării liniare g este de forma $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$, $\beta \in \mathbb{C}$, $\beta \neq 0$. Din $fg + gf = \mathrm{id}_{\mathbb{C}^2}$ deducem că $\alpha\beta = 1$.

Pentru a obţine matricele dorite pentru f şi g nu avem acum decât să schimbăm baza $\mathcal{B}$ în baza $\mathcal{B}' = \{\alpha v_1, v_2\}$. $\square$

Soluţia 4. Ca şi la soluţia precedentă, considerăm $f, g : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ date prin $f(x) = Mx$ şi $g(x) = Nx$. Avem $f^2 = g^2 = 0$ şi $fg + gf = \mathrm{id}_{\mathbb{C}^2}$. Compunem ultima relaţie la stânga cu fg şi obţinem că $(fg)^2 = fg$, deci fg este o proiecţie a lui $\mathbb{C}^2$. Dacă $fg = 0$, atunci $gf = \mathrm{id}_{\mathbb{C}^2}$, deci f şi g ar fi inversabile, ceea ce contrazice $f^2 = 0$.

Aşadar $fg \neq 0$. Fie $u \in \mathrm{Im}(fg) \setminus \{0\}$ şi $w \in \mathbb{C}^2$ astfel încât $u = fg(w)$. Obţinem $fg(u) = (fg)^2(w) = fg(w) = u$. Fie $v = g(u)$. Vectorul v este nenul, altfel am avea $u = f(v) = 0$, fals. Mai mult, u şi v nu sunt coliniari, deoarece $v = \lambda u$ cu $\lambda \in \mathbb{C}$ implică $u = f(v) = f(\lambda u) = \lambda f(u) = \lambda f^2(g(w)) = 0$, contradicţie.

Să considerăm acum baza ordonată $\mathcal{B}$ a lui $\mathbb{C}^2$ formată din vectorii u şi v. Avem $f(u) = f^2(g(u)) = 0$, $f(v) = f(g(u)) = u$, $g(u) = v$ şi $g(v) = g^2(u) = 0$. Aşadar matricele lui f şi g în raport cu $\mathcal{B}$ sunt $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi respectiv $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Matricea A va fi matricea de trecere de la baza canonică a lui $\mathbb{C}^2$ la $\mathcal{B}$. $\square$

Remarca 1. Această problemă îşi are originea în încercarea de a da o demonstraţie elementară teoremei Skolem-Noether pentru cazul particular al $\mathbb{C}$-algebrei $M_2(\mathbb{C})$. În acest caz teorema spune că singurele $\mathbb{C}$-automorfisme ale $\mathbb{C}$-algebrei $M_2(\mathbb{C})$ sunt cele interioare. Aşadar, dacă φ este un $\mathbb{C}$-automorfism al lui $M_2(\mathbb{C})$, există o matrice inversabilă A astfel încât $\varphi(X) = AXA^{-1}$ pentru orice $X \in M_2(\mathbb{C})$. Pentru a demonstra acest fapt este suficient să găsim o matrice inversabilă A astfel încât $\varphi(E_{12}) = AE_{12}A^{-1}$ şi $\varphi(E_{21}) = AE_{21}A^{-1}$. Observăm însă că $[\varphi(E_{12})]^2 = [\varphi(E_{21})]^2 = 0_2$ şi $\varphi(E_{12})\varphi(E_{21}) + \varphi(E_{21})\varphi(E_{12}) = I_2$.

Remarca 2. Soluţiile 3 şi 4, bazate pe considerente de spaţii vectoriale, au avantajul că sunt valabile peste orice corp comutativ, nu numai peste $\mathbb{C}$.

Problema 3. Determinaţi valoarea maximă a integralei

$$\int_0^1 |f'(x)|^2 \, |f(x)| \frac{1}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x$$

pe mulţimea funcţiilor $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ de clasă $\mathcal{C}^1$ pentru care $f(0) = 0$ şi $\int_0^1 |f'(x)|^2 \, \mathrm{d}x \leq 1$.

Pirmyrat Gurbanov, Turkmenistan

Această problemă a fost considerată de către juriu de dificultate puţin peste medie. Rezultatele au arătat însă că prin prisma participanţilor aceasta a fost cea mai dificilă problemă din concurs; niciun concurent nu a reuşit mai mult decât tatonări ale problemei.

Soluţie. Notând $E(f)=\int\limits_0^1 |f'(x)|^2|f(x)|\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$, avem

$$E(f)=\int\limits_0^1 \frac{|f'(x)|^2}{\sqrt{x}}\left|\int\limits_0^x f'(t)\mathrm{d}t\right|\mathrm{d}x \leq \int\limits_0^1 \frac{|f'(x)|^2}{\sqrt{x}}\left(\int\limits_0^x |f'(t)|\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x. \tag{6}$$

Conform inegalităţii Cauchy-Schwarz,

$$\left(\int\limits_0^x |f'(t)|\mathrm{d}t\right)^2 \leq x\int\limits_0^x |f'(t)|^2\mathrm{d}t;$$

de aici şi din (6) obţinem $E(f) \leq \int\limits_0^1 (f'(x))^2\sqrt{\int\limits_0^x (f'(t))^2\mathrm{d}t}\ \mathrm{d}x$; punând $g(x)=\int\limits_0^x (f'(t))^2\mathrm{d}t$, această inegalitate devine

$$E(f)\leq \int\limits_0^1 g'(x)\sqrt{g(x)}\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\sqrt{g(x)^3}\Big|_0^1 \leq \frac{2}{3}.$$

Valoarea maximă cerută este $\frac{2}{3}$, ea fiind atinsă de pildă pentru $f(x)=x$. $\square$

Problema 4. Fie $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ pentru care există $n\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $A^n=-I_2$. Arătaţi că $A^2=-I_2$ sau $A^3=-I_2$.

Vasile Pop, România

Această problemă a fost considerată dificilă de către juriu. În pofida acestui fapt, şapte studenţi au reuşit să obţină punctajul maxim. Abordările lor au folosit cu precădere tehnicile din prima soluţie pe care o vom prezenta. Soluţia 2 a apărut mai întâi în juriu; un singur concurent a rezolvat probema folosind un raţionament asemănător.

Soluţia 1. Notăm polinomul caracteristic al lui A cu P_A, iar valorile proprii ale lui A cu λ_1 şi λ_2. Condiţia $A^n=-I_2$ ne conduce la $\lambda_1^n=\lambda_2^n=-1$. Cum P_A are gradul doi şi coeficienţii raţionali, rădăcinile sale sunt fie reale, fie complexe conjugate.

Dacă $\lambda_{1,2}\in\mathbb{R}$, din $\lambda_1^n=\lambda_2^n=-1$ deducem că n este impar şi $\lambda_1 = \lambda_2=-1$. De aici rezultă că $(A+I_2)^2=0$; n fiind impar, putem scrie $-I_2=(A+I_2-I_2)^n=n(A+I_2)-I_2$. În consecinţă, $A=-I_2$, deci şi $A^3=-I_2$.

Dacă $\lambda_{1,2}$ sunt complexe conjugate, din $\lambda_1^n = -1$ deducem $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$. Punând $\lambda_1 = \cos\alpha + i\sin\alpha$, din $\lambda_1^n = -1$ obţinem $\cos n\alpha + i\sin n\alpha = -1$, deci $\cos n\alpha = -1$.

Dar $2\cos\alpha\cos n\alpha = \cos(n+1)\alpha + \cos(n-1)\alpha$, iar $\cos k\alpha = T_k(\cos\alpha)$, unde $T_k \in \mathbb{Z}[X]$ sunt polinoamele Cebâşev de primul tip obţinute pornind de la formula $T_k(x) = \cos(n \arccos x)$ pentru $-1 \le x \le 1$. Se ştie (sau se probează cu uşurinţă, de exemplu prin inducţie) că T_k are gradul k, coeficientul dominant 2^{k-1} şi termenul liber $\frac{i^k + (-i)^k}{2}$.

Deducem o relaţie de forma $\cos\alpha \cdot P(2\cos\alpha) = -2\cos\alpha$ cu $P \in \mathbb{Z}[X]$ monic de grad n. Obţinem $\cos\alpha = 0$ sau $P(2\cos\alpha) = -2$. Cum $2\cos\alpha = \lambda_1 + \lambda_2 = \mathrm{tr}(A) \in \mathbb{Q}$, pentru a satisface ecuaţia $P(x) + 2 = 0$ el va trebui să fie întreg. Dar avem şi $|2\cos\alpha| \le 2$, deci $\cos\alpha \in \left\{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\right\}$.

- Pentru $\cos\alpha = -1$ obţinem cazul deja studiat $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$.
- Dacă $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$, $P_A = X^2 + X + 1$, deci $A^3 - I_2 = (A - I_2)(A^2 + A + I_2) = 0$, de unde $A^3 = I_2$. De aici, $-I_2 = A^n \in \{I_2, A, A^2\}$; oricare dintre variante contrazice însă relaţia $A^3 = I_2$.
- Dacă $\cos\alpha = 0$, $P_A = X^2 + 1$, deci $A^2 = -I_2$.
- Dacă $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, $P_A = X^2 - X + 1$, deci

$$A^3 + I_2 = (A + I_2)(A^2 - A + I_2) = 0,$$

de unde $A^3 = -I_2$.

- Pentru $\cos\alpha = 1$ am ajunge la $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, deci la contradicţia $-1 = \lambda_1^n = 1$. □

Remarcă. Unii studenţi au dat soluţii care debutau similar cu soluţia 1, folosind apoi fără demonstraţie următorul rezultat: „Dacă $\alpha \in \mathbb{Q}\pi$ şi $\cos\alpha \in \mathbb{Q}$, atunci $\cos\alpha \in \left\{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\right\}$". Comisia de corectură a decis acordarea punctajului maxim şi pentru soluţii complete bazate pe acest rezultat.

Soluţia 2. Notăm cu μ_A polinomul minimal al lui A. Din ipoteză deducem că $\mu_A \mid X^n + 1 \mid X^{2n} - 1$. Prin urmare, μ_A este un produs de polinoame ciclotomice care nu are rădăcini multiple. Cum însă $\mathrm{grad}\mu_A \le 2$, factorii săi au şi ei aceeaşi proprietate. Întrucât $\varphi(a) \le 2$ numai pentru $a \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$ (φ desemnând indicatorul lui Euler),

$$\mu_A \in \{X - 1, (X-1)(X+1), X^2 + X + 1, X + 1, X^2 + 1, X^2 - X + 1\}.$$

Primele două situaţii contrazic însă $\mu_A \mid X^n + 1$, iar a treia ne conduce la $A^3 = I_2$, deci $-I_2 = A^n \in \{I_2, A, A^2\}$, aceste relaţii neputând fi însă simultan adevărate. Rămâne deci că $\mu_A \in \{X + 1, X^2 + 1, X^2 - X + 1\}$; primele două variante conduc la $A^3 = -I_2$, iar cea de-a treia la $A^2 = -I_2$. □

Received: March 28, 2013; Accepted: April 16, 2013

Bounds for the real part of polynomial roots and applications to irreducibility

RICĂ ZAMFIR[1)]

Articol dedicat Prof. Dr. Ioan Tomescu
la a 70-a aniversare

Abstract. In this article we give new bounds for the real part of polynomial roots by using the Frobenius generalized companion matrix and Bombieri's norm.

Keywords: Bounds, polynomial roots, companion matrix.
MSC : 12D10

1. INTRODUCTION

Let

$$f_n(x) = x^n - a_1 x^{n-1} - a_2 x^{n-2} - \cdots - a_{n-1}x - a_n \tag{1}$$

be a polynomial with complex coefficients.

We suppose that $a_n \neq 0$ and there are complex numbers $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$, $c_1, c_2, \ldots, c_n$ such that

$$a_1 = c_1,\ a_2 = c_2 b_1,\ a_3 = c_3 b_1 b_2, \ldots, a_n = c_n b_1 b_2 \ldots b_{n-1}. \tag{2}$$

If we consider the Frobenius generalized companion matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & b_{n-1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & b_{n-2} & \ldots & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ c_n & c_{n-1} & c_{n-2} & \ldots & c_1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C}), \tag{3}$$

then we have the equality (see [3, pp. 43])

$$f_n(x) = \det\left(xI_n - A\right) \tag{4}$$

which shows that the roots of the polynomial f_n are the eigenvalues of matrix A.

Using the classical Frobenius matrix, Kittaneh [2, Theorem 1] proved the following

Theorem 1. If $f(x) = x^n + a_n x^{n-1} + \cdots + a_2 x + a_1$ is a monic polynomial of degree $n \geq 2$ with complex coefficients then for every root z of f we have the inequalities

$$\alpha \leq \operatorname{Re}(z_j) \leq \beta, \tag{5}$$

[1)] Professor, Bucureşti, rzamfir62@gmail.com

where

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(-\mathrm{Re}\,(a_n) - \sqrt{(\mathrm{Re}\,(a_n))^2 + \sum_{j=1}^{n-1} |a_j|^2}\right) + \cos\frac{n\pi}{n+1}$$

and

$$\beta = \frac{1}{2}\left(-\mathrm{Re}\,(a_n) + \sqrt{(\mathrm{Re}\,(a_n))^2 + \sum_{j=1}^{n-1} |a_j|^2}\right) + \cos\frac{n\pi}{n+1}.$$

In what follows we give new bounds using the generalized Frobenius companion matrix. Afterwards we give a bound for the real part of polynomial roots using the Bombieri's norm.

2. Main Results

If A is the generalized Frobenius companion matrix, then

$$A = S + iT, \tag{6}$$

where $S = \frac{1}{2}(A + A^*)$ and $T = \frac{1}{2i}(A - A^*)$ are hermitian matrices (here A^* is the adjoint of A, i.e., the conjugate transpose of A).

For a hermitian matrix X, the eigenvalues $\lambda_1(X), \lambda_2(X), \ldots, \lambda_n(X)$ are real and we arrange them so that

$$\lambda_1(X) \leq \lambda_2(X) \leq \cdots \leq \lambda_n(X).$$

In the following we will use the next two results from [2].

Lemma 1. If $A \in M_n(\mathbb{C})$ and $A = S + iT$ with $S, T \in M_n(\mathbb{R})$, then for every $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ we have

$$\lambda_1(S) \leq \mathrm{Re}(\lambda_j(A)) \leq \lambda_n(S). \tag{7}$$

Lemma 2. If $B, C \in M_n(\mathbb{C})$ are hermitian matrices, then for every $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ we have

$$\lambda_j(B) + \lambda_1(C) \leq \lambda_j(B + C) \leq \lambda_j(B) + \lambda_n(C). \tag{8}$$

In particular,

$$\lambda_1(B) + \lambda_1(C) \leq \lambda_1(B + C) \tag{9}$$

and

$$\lambda_n(B + C) \leq \lambda_n(B) + \lambda_n(C). \tag{10}$$

If in (2) we choose $b_1 = b_2 = \ldots = b_{n-1} = b > 0$ we can prove the next result.

Theorem 2. For every root z_j of

$$f_n(x) = x^n - a_1 x^{n-1} - a_2 x^{n-2} - \cdots - a_{n-1} x - a_n$$

we have

$$\alpha \le \mathrm{Re}(z_j) \le \beta, \tag{11}$$

where

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(\mathrm{Re}(c_1) - \sqrt{(\mathrm{Re}(c_1))^2 + \sum_{j=2}^{n} |c_j|^2}\right) + b\cos\frac{n\pi}{n+1}$$

and

$$\beta = \frac{1}{2}\left(\mathrm{Re}(c_1) + \sqrt{(\mathrm{Re}(c_1))^2 + \sum_{j=2}^{n} |c_j|^2}\right) + b\cos\frac{n\pi}{n+1}.$$

Proof. We have

$$S = \frac{1}{2}\left(A + A^*\right) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}b & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{2}\overline{c}_n \\ \frac{1}{2}b & 0 & \frac{1}{2}b & \dots & 0 & \frac{1}{2}\overline{c}_{n-1} \\ 0 & \frac{1}{2}b & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{2}\overline{c}_{n-2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}b & \dots & 0 & \frac{1}{2}\overline{c}_{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{2}\left(b + \overline{c}_2\right) \\ \frac{1}{2}c_n & \frac{1}{2}c_{n-1} & \frac{1}{2}c_{n-2} & \dots & \frac{1}{2}\left(b + c_2\right) & \mathrm{Re}(c_1) \end{pmatrix}.$$

We write

$$S = P + Q, \tag{12}$$

where

$$P = \begin{pmatrix} 0 & x^* \\ x & \mathrm{Re}(c_1) \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C}), \tag{13}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}b & 0 & \frac{1}{2}b & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{2}b \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{2}b & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}), \tag{14}$$

and

$$x = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}c_n \\ \frac{1}{2}c_{n-1} \\ \vdots \\ \frac{1}{2}c_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n-1}. \tag{15}$$

Similarly to [2, pp. 662] we obtain the eigenvalues of P:

$$\lambda_1(P) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{Re}(c_1) - \sqrt{(\mathrm{Re}(c_1))^2 + \sum_{j=2}^{n} |c_j|^2}\right), \tag{16}$$

$$\lambda_2(P) = \lambda_3(P) = \ldots = \lambda_{n-1}(P) = 0, \tag{17}$$

$$\lambda_n(P) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{Re}(c_1) + \sqrt{(\mathrm{Re}(c_1))^2 + \sum_{j=2}^{n} |c_j|^2}\right). \tag{18}$$

Indeed, we observe that if $P_n(\lambda) = \det(P - \lambda I_n)$ then

$$P_n(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \ldots & 0 & \frac{1}{2}\bar{c}_n \\ 0 & -\lambda & \ldots & 0 & \frac{1}{2}\bar{c}_{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & -\lambda & \frac{1}{2}\bar{c}_2 \\ \frac{1}{2}\bar{c}_n & \frac{1}{2}\bar{c}_{n-1} & \ldots & \frac{1}{2}\bar{c}_2 & \mathrm{Re}(c_1) - \lambda \end{vmatrix}. \tag{19}$$

Expanding the determinant along the first row we get

$$P_n(\lambda) = -\lambda P_{n-1}(\lambda) - (-1)^n \frac{1}{4}|c_n|^2 \lambda^{n-2}$$

and inductively we arrive at

$$P_n(\lambda) = (-1)^n \lambda^{n-2}(\lambda^2 - \mathrm{Re}(c_1)\lambda - \frac{1}{4}\sum_{j=2}^{n} |c_j|^2).$$

The eigenvalues of Q are

$$\lambda_j(Q) = b\cos\frac{(n-j+1)\pi}{n+1},\ j = 1, \ldots, n. \tag{20}$$

In order to prove this it is enough to consider the tridiagonal matrix

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Once again the characteristic polynomial $R_n(\lambda) = \det(R - \lambda I_n)$ can be computed by an iterative process: $R_n(\lambda) = -\lambda R_{n-1}(\lambda) - R_{n-2}(\lambda)$, with $R_0(\lambda) = 1$ and $R_1(\lambda) = -\lambda$.

By Gershgorin Circle Theorem, all roots λ_k of $R_n(\lambda)$ satisfy $|\lambda_k| \le 2$. The characteristic equation of the recurrence $R_n(\lambda) = -\lambda R_{n-1}(\lambda) - R_{n-2}(\lambda)$ is $x^2 + \lambda x + 1 = 0$ with $\Delta = \lambda^2 - 4 \le 0$. Then the equation has two complex conjugate roots $x_{1,2} = \frac{-\lambda \pm i\sqrt{4-\lambda^2}}{2}$. Putting $\cos\alpha = \frac{-\lambda}{2}$ and $\sin\alpha = \frac{\sqrt{4-\lambda^2}}{2}$, the general solution of the recurrence is $R_n(\lambda) = c_1 \cos n\alpha + c_2 \sin n\alpha$, where the coefficients c_1 and c_2 can be determined from the starting conditions as follows: $c_1 = 1$ and $c_1 \cos\alpha + c_2 \sin\alpha = -\lambda$. We find $c_2 = \frac{-\lambda}{\sqrt{4-\lambda^2}} = \frac{1}{\tan\alpha}$, and therefore $R_n(\lambda) = \cos n\alpha + \frac{\sin n\alpha}{\tan\alpha}$.

In order to find the eigenvalues of R we have to solve the equation $R_n(\lambda) = 0$. If $R_n(\lambda) = 0$, then $\cos n\alpha + \frac{\sin n\alpha}{\tan\alpha} = 0 \Leftrightarrow \sin\alpha\cos n\alpha + {}+ \cos\alpha \sin n\alpha = 0 \Leftrightarrow \sin(n+1)\alpha = 0 \Leftrightarrow (n+1)\alpha = k\pi \Leftrightarrow \alpha = \frac{k\pi}{n+1}$, $k = 1, \dots, n$. Solving for λ the equation $\tan\alpha = -\frac{\sqrt{4-\lambda^2}}{\lambda}$ we get $\lambda^2 = 4\cos^2\alpha$ and we may take $\lambda = 2\cos\alpha$, which gives us $\lambda_k = 2\cos\frac{k\pi}{n+1}$, $k = 1, \dots, n$. Now this leads us immediately to (20).

If we apply Lemma 1 and Lemma 2 we get

$$\lambda_1(P) + \lambda_1(Q) \le \lambda_1(S) \le \mathrm{Re}(\lambda_j(A)) \le \lambda_n(S) \le \lambda_n(P) + \lambda_n(Q) \tag{22}$$

We have

$$\lambda_1(P)+\lambda_1(Q)=\frac{1}{2}\left(\mathrm{Re}(c_1) - \sqrt{(\mathrm{Re}(c_1))^2+\sum_{j=2}^{n}|c_j|^2}\right) + b\cos\frac{n\pi}{n+1}, \tag{23}$$

$$\lambda_n(P)+\lambda_n(Q)=\frac{1}{2}\left(\mathrm{Re}(c_1) + \sqrt{(\mathrm{Re}(c_1))^2+\sum_{j=2}^{n}|c_j|^2}\right) + b\cos\frac{n\pi}{n+1}, \tag{24}$$

$$\mathrm{Re}(\lambda_j(A)) = \mathrm{Re}(z_j), \tag{25}$$

and the conclusion follows from (23), (24), (25), and (22). $\square$

Remark 1. If we choose $b = 1$, from (11) we get Kittaneh's theorem.

In the next theorem we give a bound for the real part of polynomial roots by using Bombieri's norm. We remind that if

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{C}[x]$$

and $p \geq 1$, then the Bombieri's norm of order p is

$$[f]_p = \left(\sum_{j=0}^{n} \frac{|a_j|^p}{\binom{n}{j}^{p-1}} \right)^{1/p}. \tag{26}$$

If $f, g \in \mathbb{C}[X]$, $\deg(f) = n$ and $\deg(g) = m$, we have the Bombieri inequality (see [1])

$$[fg]_2 \geq \frac{1}{\sqrt{\dbinom{n+m}{n}}} [f]_2 [g]_2. \tag{27}$$

Theorem 3. Let $f \in \mathbb{R}[X]$ be a monic polynomial which has a root $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. We have the inequality

$$|\mathrm{Re}(\alpha)| \leq \sqrt{\sqrt{\binom{n}{2}}[f]_2 - 1}. \tag{28}$$

Proof. Because $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ and $f \in \mathbb{R}[X]$, $\overline{\alpha}$ is also a root of f. We can write

$$f(x) = (x - \alpha)(x - \overline{\alpha})g(x)$$

and apply Bombieri's inequality. Thus we obtain

$$[f(x)]_2^2 \geq \frac{1}{\dbinom{n}{2}} \cdot [(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})]_2^2 \cdot [g(x)]_2^2$$

and therefore

$$[f(x)]_2^2 \geq \frac{1}{\dbinom{n}{2}} \cdot [(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})]_2^2 \tag{29}$$

because $[g]_2 \geq 1$ (g is monic). We have the identity

$$(x-\alpha)(x-\overline{\alpha}) = x^2 - 2\mathrm{Re}(\alpha)x + |\alpha|^2,$$

so we obtain

$$\begin{aligned}[(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})]_2^2 &= 1 + 2\mathrm{Re}(\alpha)^2 + |\alpha|^4 \\ &\geq 1 + 2\mathrm{Re}(\alpha)^2 + \mathrm{Re}(\alpha)^4 = \left(1 + \mathrm{Re}(\alpha)^2\right)^2.\end{aligned}$$

Using (29) we get

$$1 + \mathrm{Re}(\alpha)^2 \leq \sqrt{\binom{n}{2}}[f]_2,$$

which leads to the conclusion. □

References

[1] B. Beauzamy, E. Bombieri, P. Enflo, H. L. Montgomery, *Products of polynomials in many variables*, Journal of Number Theory, **36** (1990), 219–245.

[2] F. Kittaneh, *Bounds and a majorization for the real parts of the zeros of polynomials*, Proc. Amer. Math. Soc., **135** (2007), 659–664.

[3] H. Linden, *Bounds for the zeros of polynomials from eigenvalues and singular values of some companion matrices*, Linear Algebra and its Applications, **271** (1998), 41–82.

[4] M. Mignotte, D. Ştefănescu, *Polynomials. An Algorithmic Approach*, Springer, 1999.

Received: April 11, 2011; Accepted in revised form: February 14, 2013

NOTE MATEMATICE

Coeficienţi binomiali şi margini ale rădăcinilor unui polinom

Doru Ştefănescu[1)]

Profesorului Ioan Tomescu cu ocazia
celei de a 70-a aniversări.

Abstract. Elementary properties of binomial coefficients are used to localize positive roots of univariate polynomials with real coefficients. These results are thereafter employed to compute bounds for the modulus of complex roots for polynomials over the complex field.

Keywords: Polynomial roots, real roots, localization of roots

MSC : Primary: 12D10; Secondary: 30C15

Introducere

Calcularea rădăcinilor reale ale unui polinom într-o variabilă ce are coeficienţii numere reale se realizează parcurgând mai multe etape. Prima dintre acestea constă în găsirea unor intervale cât mai mici care să conţină aceste rădăcini. Pentru a atinge acest scop este necesară găsirea unor margini ale rădăcinilor. Pentru aceasta, un procedeu este acela de a calcula margini pentru modulele rădăcinilor complexe ale polinoamelor, vezi [1], [2]. Exisă însă şi metode specifice rădăcinilor reale.

[1)] Universitatea din Bucureşti, Facultatea de Fizică, Bucureşti, România, `doru.stefanescu@fizica.unibuc.ro`

În această notă vom arăta cum pot fi folosite rezultate privind coeficienţii binomiali, vezi [3], la găsirea unor intervale care să conţină rădăcina pozitivă a unui polinom care are o singură schimbare de semn. Procedeul permite găsirea unui interval care să conţină şi rădăcinile pozitive ale derivatei polinomului.

Astfel de rezultate sunt utile şi la calcularea marginilor modulelor rădăcinilor complexe ale unui polinom cu coeficienţii complecşi. Se ştie că o astfel de margine este chiar unica rădăcină pozitivă polinomului asociat prin metoda lui Cauchy, vezi [2].

MARGINI PENTRU RĂDĂCINI POZITIVE

O clasă importantă de polinoame este aceea a celor care au coeficienţii reali iar şirul coeficienţilor are o singură schimbare de semn. De exemplu, dacă se consideră polinomul $Q(X) = X^n + a_1X^{n-1} + \cdots + a_n \in \mathbb{C}[X]$, atunci, după o teoremă lui Cauchy [2], unica rădăcină pozitivă a polinomului

$$F(X) = X^n - |a_1|X^{n-1} - \cdots - |a_n| \in \mathbb{R}[X]$$

este o margine superioară a modulelor rădăcinilor complexe ale polinomului considerat Q.

Pentru început vom calcula o margine superioară a rădăcinii pozitive a unui polinom de o formă specială.

Lema 1. *Fie întregii $d > e \geq 0$ şi polinomul*

$$P(X) = X^d + a_{d-1}X^{d-1} + \cdots + a_{e+1}X^{e+1} - \gamma X^e + b_{e-1}X^{e-1} + \cdots + b_1X + b_0,$$

unde coeficienţii a_i, γ şi b_j sunt pozitivi. Numărul $\gamma^{1/(d-e)}$ este o margine superioară a rădăcinilor pozitive ale polinoamelor $P^{(i)}$, pentru toţi $i \in \mathbb{N}$.

Demonstraţie. Să observăm că dacă $\beta > \gamma^{1/(d-e)}$, avem $\beta^{d-e} > \gamma$, aşadar $\beta^{d-e} - \gamma > 0$. Deci

$$P(\beta) = \beta^e(\beta^{d-e} - \gamma) + a_{d-1}\beta^{d-1} + \cdots + a_{e+1}\beta^{e+1} + b_{e-1}\beta^{e-1} + \cdots + b_0 > 0.$$

Pe de altă parte, pentru polinomul

$$P'(X) = dX^{d-1} + \cdots + (e+1)a_{e+1}X^e - \gamma\, eX^{e-1} + (e-1)b_{e-1}X^{e-2} + \cdots + b_1$$

observăm că avem

$$d\beta^{d-1} - \gamma\, e\beta^{e-1} = d\beta^{e-1}(\beta^{d-e} - \frac{e}{d}\gamma) > d\beta^{e-1}(\beta^{d-e} - \gamma) > 0.$$

Rezultă că avem $P'(\beta) > 0$. □

Propoziţia 2. *Fie întregii $d > e \geq 0$ şi polinomul*

$$R(X) = \sum_{k=e+1}^{d} \binom{k}{e} a_k X^{k-e} - \gamma\,, \quad \text{unde} \quad a_d = 1, \gamma > 0 \quad \text{şi toţi } a_i \geq 0.$$

Notăm $M = \max\{a_d, a_{d-1}, \ldots, a_{e+1}\}$. *Unica rădăcină pozitivă* α *a polinomului* R *satisface inegalitatea*

$$\alpha > \left(\frac{1+\gamma}{M}\right)^{1/d} - 1.$$

Demonstraţie. Să observăm că polinomul R are coeficienţii reali şi o singură schimbare de semn, aşadar regula lui Descartes a semnelor ne asigură că avem o singură rădăcină reală pozitivă.

Să observăm că, punând $a_e = 1$, avem

$$\begin{aligned}\sum_{k=e+1}^{d} \binom{k}{e} a_k X^{k-e} - \gamma &= \sum_{k=e}^{d} \binom{k}{e} a_k X^{k-e} - 1 - \gamma = \\ &= \sum_{j=0}^{d-e} \binom{e+j}{e} a_{j+e} X^j - 1 - \gamma\,.\end{aligned}$$

Pe de altă parte

$$\binom{e+j}{j} \le \binom{d}{j} \quad \text{pentru toţi} \quad j = 0, \ldots, d-e,$$

de unde obţinem

$$\sum_{k=e}^{d} \binom{k}{e} a_k \alpha^{k-e} = \sum_{j=0}^{d-e} \binom{e+j}{e} a_{j+e} \alpha^j \le \sum_{j=0}^{d-e} \binom{d}{j} a_{j+e} \alpha^j \le M \sum_{j=0}^{d-e} \binom{d}{j} \alpha^j.$$

Întrucât

$$\sum_{j=0}^{d-e} \binom{d}{j} \alpha^j \le \sum_{j=0}^{d-1} \binom{d}{j} \alpha^j = (1+\alpha)^d - \alpha^d,$$

rezultă

$$\begin{aligned}0 = R(\alpha) &= -1 - \gamma + \sum_{k=e}^{d} \binom{k}{e} a_k \alpha^{k-e} \le \\ &\le -1 - \gamma + M\left((1+\alpha)^d - \alpha^d\right) < -1 - \gamma + M(1+\alpha)^d,\end{aligned}$$

de unde concluzia. □

Corolarul 3. *Fie întregii* $d > e \ge 0$ *şi numerele reale* $\gamma > 0$, $a_d = 1$, $a_i \ge 0$, *cu* $e < i < d$. *Rădăcina pozitivă a polinomului*

$$R(X) = \sum_{k=e+1}^{d} \binom{k}{e} a_k X^{k-e} - \gamma$$

se află în intervalul $\left(\left(\frac{1+\gamma}{M}\right)^{1/d} - 1,\ \gamma^{1/(d-e)}\right)$.

Demonstraţie. Cu notaţiile din Lema 1 şi Propoziţia 2, este suficient să observăm că $R = P^{(e)}$. □

Invităm cititorul să găsească particularizări cât mai interesante pentru rezultatele indicate aici.

Notă. Autorul mulţumeşte referentului anonim şi editorilor pentru sugestiile pertinente care au dus la îmbunătăţirea manuscrisului iniţial.

Bbliografie

[1] M. Mignotte, *Computer Algebra – O introducere în algebra computaţională*, Editura Universităţii din Bucureşti, 2000.
[2] D. Ştefănescu, *Margini pentru rădăcinile polinoamelor cu coeficienţi complecşi*, Gazeta Matematică – seria A, **26** (2008), 287–294.
[3] I. Tomescu, *Introducere în combinatorică*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1972.

Received: March 11, 2013; Accepted: April 16, 2013

PROBLEMS

Authors should submit proposed problems to `gmaproblems@rms.unibuc.ro`. Files should be in PDF or DVI format. Once a problem is accepted and considered for publication, the author will be asked to submit the TeX file also. The referee process will usually take between several weeks and two months. Solutions may also be submitted to the same e-mail address. For this issue, solutions should arrive before **15th of November 2013**.

PROPOSED PROBLEMS

379. For any prime p we denote by $|\cdot|_p : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ the p-adic norm given by $|0| = 0$ and $|p^t a/b|_p = 1/p^t$ if $a, b \in \mathbb{Z}$, $p \nmid ab$. The p-adic field $\mathbb{Q}_p$ is the completion of $(\mathbb{Q}, |\cdot|_p)$.

Prove that for every prime p and every $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Q}_p$ we have

$$\max_{i,j} \min_{(k,l)\neq(i,j)} |(a_i - a_j) - (a_k - a_l)|_p \geq 1/4^{n-1} \min_{i\neq j} |a_i - a_j|_p.$$

`Proposed by Alexandru Zaharescu, University of Illinois at Urbana-Champaign, USA.`

380. Let p be a prime and let $A \in M_n(\mathbb{Z})$ be a matrix such that $p \mid \operatorname{tr} A^k$ for all integers $k \geq 1$.

(i) Prove that if $n < p$ then there is some integer $m \geq 1$ such that $A^m \in pM_n(\mathbb{Z})$.

(ii) Prove that if $n = p$ then $A^p - (\det A)I_p \in pM_p(\mathbb{Z})$.

Proposed by Vlad Matei, student, University of Wisconsin, Madison, USA.

381. Prove or disprove: for any ring A there exists a map $f : A \to Z(A)$ such that $f(1) = 1$ and $f(a + b) = f(a) + f(b)$ for all $a, b \in A$. Here $Z(A)$ denotes the *center* of A, $Z(A) = \{r \in A : ra = ar, \forall a \in A\}$.

Proposed by Filip-Andrei Chindea, student, University of Bucharest, Romania.

382. Let $a_1, b_1, \ldots, a_s, b_s \in \mathbb{Z}_2$ and let $f : \mathbb{Z}_2^{2s} \to \mathbb{Z}_2$,

$$f(X_1, Y_1, \ldots, X_s, Y_s) = \sum_{i=1}^{s} (a_i X_i^2 + X_i Y_i + b_i Y_i^2).$$

Determine $|f^{-1}(0)|$.

Proposed by Constantin-Nicolae Beli, Simion Stoilow Institute of Mathematics of the Romanian Academy, Bucharest, Romania.

383. Let $C = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_{>0}$ be the the parameter space of all plane circles. Let $n > 0$ and denote by H_k the subset of C^n parameterizing the configurations of n plane circles whose interiors contain a fixed point Q, such that any two circles intersect and no k circles pass through the same point. Show that H_4 is path connected.

Proposed by Marius Cavachi, Ovidius University of Constanţa, Romania.

384. Let $M \in M_2(\mathbb{C})$ be an invertible matrix and let $k > 1$ be an integer.

a) Show that if M is not scalar, then for any two matrices $A, B \in M_2(\mathbb{C})$ with $A^k = B^k = M$ there exists $E \in M_2(\mathbb{C})$ such that $B = AE = EA$, $E^k = I_2$, and $|\mathrm{tr}(E)| \le 2$.

b) Is the converse of a) true?

Proposed by Cornel Băeţica, University of Bucharest, Romania

385. Let $x \in (0, \pi)$ and $f(x) = \dfrac{1}{\tan x} - \dfrac{1}{x}$. Prove that $f^{(n)}(x) < 0$ for $n = 0, 1, \ldots$.

George Stoica, Department of Mathematical Sciences, University of New Brunswick, Canada.

386. Let $n \ge 1$ be an integer. Find the minimum of

$$f(\sigma) = \sum_{i \le n/2} \sigma(i) + \sum_{i > n/2} \sigma^{-1}(i),$$

taken over all permutations $\sigma \in S_n$. Determine an explicit value of σ that realizes this minimum.

Proposed by Filip-Andrei Chindea, student, University of Bucharest, Romania.

387. Let $a > 0$ and let $(a_n)_{n\geq 0}$ be the sequence defined by $a_0 = 0$ and $a_{n+1} = \sqrt{a + a_n}$ for all $n \geq 1$. Prove that the set of all n such that $a_n \in \mathbb{Q}$ is finite.

Proposed by Marius Cavachi, Ovidius University of Constanţa, Romania.

388. Let $a, b, c \in (0, 1)$ be real numbers. Prove the following inequality:

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{1}{1-a^4} + \sum_{\text{cyc}} \frac{1}{1-a^2bc} \geq \sum_{\text{sym}} \frac{1}{1-a^3b}.$$

Proposed by Cezar Lupu, University of Pittsburgh, USA, and Ştefan Spătaru, International Computer High School of Bucharest, Romania.

389. Let $\mathcal{F}$ be the real vector space of the continuous functions $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$. We consider on $\mathcal{F}$ the distance $\mathrm{d}(f, g) = \int\limits_0^1 |f(x) - g(x)|\mathrm{d}x$.

a) Show that the intersection of any affine line directed by a nowhere zero function with any sphere consists of at most two points.

b) Does this property hold for every affine line in $\mathcal{F}$?

Proposed by Gabriel Mincu, University of Bucharest, Romania.

390. Let $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ be pairwise different. Solve the linear system of equations

$$\sum_{j=0}^{n} a_j^k z_j = \begin{cases} 0, & \text{if } k = 0, \ldots, n-1, \\ 1, & \text{if } k = n. \end{cases}$$

George Stoica, Department of Mathematical Sciences, University of New Brunswick, Canada.

391. Let x_n be the sequence defined by $x_1 = 1$, $x_{n+1} = p_{x_n}$, where p_n is the nth prime number. Determine the asymptotic behavior of $\sqrt[n]{x_n}$, i.e., find a function f such that $\sqrt[n]{x_n} \sim f(n)$ as $n \to \infty$.

Proposed by Constantin-Nicolae Beli, Simion Stoilow Institute of Mathematics of the Romanian Academy, Bucharest, Romania.

392. We consider on $\mathbb{R}^n$ the following norm:

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto \|x\| = \sum_{k=1}^{n} |x_k|.$$

a) Prove that if $n = 2$ then the norm $\|\cdot\|$ has the property

(M) For all $z, z', d \in \mathbb{R}^2$, $\|z\| > \|z-d\|$ and $\|z'\| > \|z'-d\|$ imply $\|z+z'\| > \|z+z'-d\|$.

b) Does the norm $\|\cdot\|$ havee the property (M) if $n = 3$?

Proposed by Gheorghiţă Zbăganu, University of Bucharest, Romania.

SOLUTIONS

351. Let $(a_n)_{n\geq 1}$ be a sequence of positive integers and let $\alpha > \frac{1}{2}$ such that $\sum\limits_{n\geq 1} a_n^{-\alpha} = \infty$. Prove that for any k there is an integer that can be represented in at least k ways as a sum of two elements of the sequence.

Proposed by Marius Cavachi, Ovidius University of Constanţa, Romania.

Solution by the author. For any $n \in \mathbb{N}$ let $p(n) = |\{i : a_i < n\}|$. We note that there is $m \in \mathbb{N}$ such that $p(2^{m+1}) - p(2^m) > 2k \cdot 2^{m/2}$, otherwise we would have

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{a_n^\alpha} = \sum_{m\geq 0} \sum_{2^m \leq a_i < 2^{m+1}} \frac{1}{a_n^\alpha} \leq \sum_{m\geq 0} \frac{2k \cdot 2^{m/2}}{2^{m\alpha}} = 2k \sum_{m\geq 0} 2^{-m(\alpha-\frac{1}{2})} < \infty.$$

For such m we take $x = 2^m$ and denote by $b_1, \ldots, b_l$ the terms of our sequence belonging to the interval $[x, 2x)$. Then there are $\frac{l(l-1)}{2}$ sums $b_i + b_j$ with $i < j$ and they take values in the interval $[x+(x+1), (2x-2)+(2x-1)] = [2x+1, 4x-3]$. Thus there are at most $2x - 3 < 2x$ possible values for these sums.

Since $l = p(2x) - p(x) > 2k\sqrt{x}$ we get $\frac{l(l-1)}{2} > \frac{2k\sqrt{x}(2k\sqrt{x}-1)}{2} > 2kx$, for $k \geq 2$. It follows that there is at least an $S \in [2x+1, 4x-3]$ which is the value of $b_i + b_j$ for at least k pairs (i, j) with $i < j$. Thus S can be written in at least k ways as a sum of two elements in the sequence $(a_n)_{n\geq 1}$. $\square$

352. Let K be a field and let m, n, k be positive integers. Find necessary and sufficient conditions the integers a, b, c should satisfy such that there exist some matrices $A \in M_{m,n}(K)$ and $B \in M_{n,k}(K)$ with $\operatorname{rank}(A) = a$, $\operatorname{rank}(B) = b$ and $\operatorname{rank}(AB) = c$.

Proposed by Constantin-Nicolae Beli, Simion Stoilow Institute of Mathematics of the Romanian Academy, Bucharest, Romania.

Solution by the author. Let $A \in M_{m,n}(K)$ and $B \in M_{n,k}(K)$ with $\operatorname{rank}(A) = a$, $\operatorname{rank}(B) = b$ and $\operatorname{rank}(AB) = c$. We have $a \leq \min\{m, n\}$, $b \leq \min\{n, k\}$ and $c \leq \min\{a, b\}$ and, by Sylvester's theorem, $c \geq a + b - n$. Hence we have the following three necessary conditions:

(1) $0 \leq a \leq \min\{m, n\}$.

(2) $0 \le b \le \min\{n, k\}$.

(3) $\max\{0, a+b-n\} \le c \le \min\{a, b\}$.

We prove that these conditions are also sufficient.

Let $\{e'_{i,j} \mid 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n\}$ be the canonical basis of $M_{m,n}(K)$, where $e'_{i,j}$ has 1 on position (i,j) and 0 everywhere else.

Similarly we consider the canonical bases $\{e''_{i,j} \mid 1 \le i \le n,\ 1 \le j \le k\}$ and $\{e_{i,j} \mid 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le k\}$ for $M_{n,k}(K)$ and $M_{m,k}(K)$, respectively. We have

$$e'_{i,j}e''_{q,r} = \begin{cases} e_{i,r}, & \text{if } j = r, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

We define $A = \sum\limits_{i=1}^{a} e'_{i,i}$ and $B = \sum\limits_{i=1}^{c} e''_{i,i} + \sum\limits_{i=1}^{b-c} e''_{a+i,c+i}$. (Here we make the convention that a sum of the type $\sum\limits_{i=a+1}^{a} x_i$ is 0. Since $a, c, b-c \ge 0$, the three sums from the definitions of A and B are defined.) First note that A and B are well defined. The terms of the sum giving A are defined because $a \le \min\{m, n\}$, which is simply (1). The first sum from B is defined because $c \le \min\{n, k\}$, which follows from (2) and (3) (we have $c \le b \le \min\{n, k\}$). For the second sum of B we note that its terms are of the form $e''_{q,r}$ with $a+1 \le q \le a+b-c$ and $c+1 \le r \le b$. But $e''_{q,r}$ is defined only for $1 \le q \le n$ and $1 \le r \le m$. We have $a, c \ge 0$, so $1 \le a+1, c+1$, so we still need $a+b-c \le n$ and $c \le k$. But the first condition follows from (3) (we have $a+b-n \le c$) and the second from (2) and (3) (we have $c \le b \le k$).

By (3) we have $a \le c$. Hence $AB = \sum\limits_{i=1}^{c} e_{i,i}$. (See the formula for $e'_{i,j}e''_{q,r}$.)

The $a \times a$ matrix made by the first a rows and the first a columns of A is I_a. All larger minors of A are zero, so that $\operatorname{rank}(A) = a$. By a similar argument $\operatorname{rank}(AB) = c$. For B we note that the $b \times b$ matrix made of the rows 1 to c and $a+1$ to $a+b-c$ and the first b columns of B coincides with I_b. All larger minors of B are zero, so $\operatorname{rank}(B) = b$. □

353. Let $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ be a continuous and differentiable function in 0. Denote

$$I(h) = \int\limits_{-h}^{h} f(x)\mathrm{d}x, h \in [0, 1].$$

Show that

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \varphi(k)k|I(1/k)| = \frac{6}{\pi^2}|f(0)|.$$

(Here φ denotes the Euler's totient function.)

Proposed by Cezar Lupu, University of Pittsburgh, USA, and Călin Popescu, Simion Stoilow Institute of Mathematics of the Romanian Academy, Bucharest, Romania.

Solution by the authors. Let us consider the function $\psi : (0,1] \to \mathbb{R}$ defined by

$$\psi(h) = \frac{I(h) - 2f(0)h}{h^2},$$

which can be extended continuously in 0 because we have

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\psi(h) &= \lim_{h\to 0}\frac{(I(h)-2f(0)h)'}{2h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(h)+f(-h)-2f(0)}{2h}\\ &= \frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(h)-f(0)}{h} - \frac{f(-h)-f(0)}{-h}\right)\\ &= \frac{1}{2}(f'(0)-f'(0)) = 0.\end{aligned}$$

It follows that ψ is bounded on $(0,1]$. Let $M = \sup\{|\psi(h)| : 0 < h \leq 1\}$. It follows that

$$|I(h) - 2f(0)h| \leq Mh^2, \forall\, h \in (0,1].$$

For $h = 0$ the above inequality is obvious. Since

$$||I(h)| - 2f(0)h| \leq |I(h) - 2f(0)h| \leq Mh^2, \forall\, 0 < h \leq 1,$$

it follows that

$$2|f(0)|h - Mh^2 \leq |I(h)| \leq 2|f(0|h + Mh^2,\ \forall\, 0 < h \leq 1.$$

Thus, we obtain

$$2|f(0)|\varphi(k) - M\frac{\varphi(k)}{k} \leq \varphi(k)kI\left(\frac{1}{k}\right) \leq$$

$$\leq 2|f(0)|\varphi(k) + M\frac{\varphi(k)}{k},$$

which is equivalent to

$$2|f(0)|\sum_{k=1}^{n}\varphi(k) - M\sum_{k=1}^{n}\frac{\varphi(k)}{k} \leq \sum_{k=1}^{n}\varphi(k)kI\left(\frac{1}{k}\right) \leq$$

$$\leq 2|f(0)|\sum_{k=1}^{n}\varphi(k) + M\sum_{k=1}^{n}\frac{\varphi(k)}{k}.$$

Let us consider the sequence $(a_n)_{n\geq 1}$ defined by

$$a_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\varphi(k)k\left|I\left(\frac{1}{k}\right)\right|.$$

We obtain that

$$2|f(0)|\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\varphi(k)-\frac{M}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{\varphi(k)}{k}\le a_n\le 2|f(0)|\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\varphi(k)+\frac{M}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{\varphi(k)}{k}.$$

In what follows we prove the following

Lemma. *The following estimations hold true*:

i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\varphi(k)=\frac{3}{\pi^2}$;

ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\varphi(k)}{k}=\frac{6}{\pi^2}$.

Proof. i) Let $\mu(n)$ be the Möbius function defined by

$$\mu(n)=\begin{cases}(-1)^{\omega(n)}=(-1)^{\Omega(n)}, & \text{if } \omega(n)=\Omega(n),\\ 0, & \text{if } \omega(n)<\Omega(n),\end{cases}$$

where $\omega(n)$ is the number of distinct primes dividing the number n and $\Omega(n)$ is the number of prime factors of n, counted with multiplicities. Firstly, we prove by induction the following identity:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\varphi(k)}{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\mu(k)}{k}\left\lfloor\frac{n}{k}\right\rfloor. \tag{30}$$

The base case is $n=1$ and we see that the claim holds:

$$\frac{\varphi(1)}{1}=1=\frac{\mu(1)}{1}\lfloor 1\rfloor.$$

For the induction step we need to prove that

$$\frac{\varphi(n+1)}{n+1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\mu(k)}{k}\left(\left\lfloor\frac{n+1}{k}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{n}{k}\right\rfloor\right)+\frac{\mu(n+1)}{n+1}.$$

The key observation is that

$$\left\lfloor\frac{n+1}{k}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{n}{k}\right\rfloor=\begin{cases}1, & \text{if } k|(n+1),\\ 0, & \text{otherwise,}\end{cases}$$

so that the sum is

$$\sum_{\substack{k|(n+1)\\ k<n+1}}\frac{\mu(k)}{k}+\frac{\mu(n+1)}{n+1}=\sum_{k|(n+1)}\frac{\mu(k)}{k}.$$

Now the fact that $\sum_{k|(n+1)} \frac{\mu(k)}{k} = \frac{\varphi(n+1)}{n+1}$ is a basic totient identity. To see that it holds, let $p_1^{v_1} p_2^{v_2} \dots p_q^{v_q}$ be the prime factorization of $n+1$. Then

$$\frac{\varphi(n+1)}{n+1} = \prod_{l=1}^{q} \left(1 - \frac{1}{p_l}\right) = \sum_{k|(n+1)} \frac{\mu(k)}{k},$$

by definition of $\mu(k)$. This concludes the proof of (30).

Now, we prove the identity

$$\sum_{k=1}^{n} \varphi(k) = \frac{1}{2}\left(1 + \sum_{k=1}^{n} \mu(k) \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor^2\right). \tag{31}$$

The base case is $n = 1$ and we have $\varphi(1) = 1 = \frac{1}{2}\left(1 + \mu(1)\left\lfloor \frac{1}{1} \right\rfloor^2\right)$ which is true. The induction step requires us to show that

$$\varphi(n+1) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \mu(k) \left(\left\lfloor \frac{n+1}{k} \right\rfloor^2 - \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor^2\right) + \frac{1}{2}\,\mu(n+1) \left\lfloor \frac{n+1}{n+1} \right\rfloor^2.$$

Next observe that

$$\left\lfloor \frac{n+1}{k} \right\rfloor^2 - \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor^2 = \begin{cases} 2\frac{n+1}{k} - 1, & \text{if } k|(n+1) \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Therefore, the right side of the desired equality is

$$\frac{1}{2} \sum_{\substack{k|(n+1) \\ k<n+1}} \mu(k) \left(2\frac{n+1}{k} - 1\right) + \frac{1}{2}\,\mu(n+1) = \frac{1}{2} \sum_{k|n+1} \mu(k) \left(2\,\frac{n+1}{k} - 1\right),$$

that is

$$(n+1) \sum_{k|n+1} \frac{\mu(k)}{k} - \frac{1}{2} \sum_{k|n+1} \mu(k).$$

The first of these two terms is precisely $\varphi(n+1)$ as we saw earlier, and the second is zero, by a basic property of the Möbius function (using the same factorization of $n+1$ as above, we have $\sum_{k|n+1} \mu(k) = \prod_{l=1}^{q} (1-1) = 0$.) This concludes the proof of (31).

Now, we are ready to prove that

$$\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \varphi(k) = \frac{3}{\pi^2} + O\left(\frac{\log n}{n}\right). \tag{32}$$

Using the elementary inequalities $x-1<\lfloor x\rfloor\leq x$, we get the upper bound

$$\sum_{k=1}^{n}\mu(k)\left\lfloor\frac{n}{k}\right\rfloor^2=\sum_{\substack{k=1\\ \mu(k)=1}}^{n}\left\lfloor\frac{n}{k}\right\rfloor^2-\sum_{\substack{k=1\\ \mu(k)=-1}}^{n}\left\lfloor\frac{n}{k}\right\rfloor^2\leq$$

$$\leq\sum_{\substack{k=1\\ \mu(k)=1}}^{n}\frac{n^2}{k^2}-\sum_{\substack{k=1\\ \mu(k)=-1}}^{n}\left(\frac{n^2}{k^2}-2\frac{n}{k}+1\right),$$

that is

$$n^2\sum_{k=1}^{n}\frac{\mu(k)}{k^2}+\sum_{\substack{k=1\\ \mu(k)=-1}}^{n}\left(2\frac{n}{k}-1\right)<n^2\sum_{k=1}^{n}\frac{\mu(k)}{k^2}+2nH_n-\sum_{\substack{k=1\\ \mu(k)=-1}}^{n}1.$$

Similarly, we have the lower bound

$$\sum_{\substack{k=1\\ \mu(k)=1}}^{n}\left\lfloor\frac{n}{k}\right\rfloor^2-\sum_{\substack{k=1\\ \mu(k)=-1}}^{n}\left\lfloor\frac{n}{k}\right\rfloor^2\geq\sum_{\substack{k=1\\ \mu(k)=1}}^{n}\left(\frac{n^2}{k^2}-2\frac{n}{k}+1\right)-\sum_{\substack{k=1\\ \mu(k)=-1}}^{n}\frac{n^2}{k^2},$$

that is

$$n^2\sum_{k=1}^{n}\frac{\mu(k)}{k^2}-\sum_{\substack{k=1\\ \mu(k)=1}}^{n}\left(2\frac{n}{k}-1\right)>n^2\sum_{k=1}^{n}\frac{\mu(k)}{k^2}-2nH_n+\sum_{\substack{k=1\\ \mu(k)=1}}^{n}1,$$

where $H_n=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}$ is the harmonic sequence.

Now using the asymptotic expansion of the harmonic sequence H_n, we have

$$2nH_n\in O(n\log n),\qquad\sum_{\substack{k=1\\ \mu(k)=1}}^{n}1\in O(n),\quad\text{and}\quad\sum_{\substack{k=1\\ \mu(k)=-1}}^{n}1\in O(n).$$

The term $\sum_{k=1}^{n}\frac{\mu(k)}{k^2}$ is $O(1)$ by comparison with $\zeta(2)$, where $\zeta(s)$ is the Riemann zeta function

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s},\quad\Re(s)>1.$$

So far we have shown that

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\varphi(k)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{\mu(k)}{k^2}+O\left(\frac{\log n}{n}\right).$$

It remains to evaluate

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\mu(k)}{k^2}$$

asymptotically, which we have seen converges.

The Euler product for the Riemann zeta function is

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \text{ for } \Re(s) > 1.$$

Now it follows immediately from the definition of the Möbius function that

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) = \sum_{n\geq 1} \frac{\mu(n)}{n^s}.$$

This means that

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{\mu(k)}{k^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{\zeta(2)} + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

where the integral $\int\limits_{n+1}^{\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ was used to estimate $\sum\limits_{k>n} \frac{\mu(k)}{k^2}$. But $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\zeta(2)} = \frac{3}{\pi^2}$ and (32) is established.

ii) The above techniques together with the identity

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi(k)}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu(k)}{k} \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$$

also yield a proof that

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi(k)}{k} = \frac{6}{\pi^2} + O\left(\frac{\log n}{n}\right).$$

Reasoning as before, we obtain the upper bound

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\mu(k)}{k} \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \leq n\sum_{k=1}^{n} \frac{\mu(k)}{k^2} + \sum_{\substack{k=1 \\ \mu(k)=-1}}^{n} \frac{1}{k}$$

and the lower bound

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\mu(k)}{k} \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \geq n\sum_{k=1}^{n} \frac{\mu(k)}{k^2} - \sum_{\substack{k=1 \\ \mu(k)=1}}^{n} \frac{1}{k}.$$

The proof of the Lemma is now finished. □

Returning to our problem, we showed the double inequality

$$2|f(0)|\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \varphi(k) - \frac{M}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi(k)}{k} \leq a_n \leq 2|f(0)|\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \varphi(k) + \frac{M}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi(k)}{k}.$$

By applying the above lemma and the squeeze theorem, we obtain the desired conclusion. □

354. For $x > 1$, define the function $f(x) = \int_1^{+\infty} e^{it^x} \mathrm{d}t$. Prove that there exists $L \in \mathbb{C}^*$ such that

$$\lim_{x\to\infty} xf(x) = L.$$

Proposed by Moubinool Omarjee, Jean Lurçat High School, Paris, France.

Solution by the author. With the change of variable $u = t^x$ and an integration by parts we get

$$f(x) = \frac{1}{x}\int_1^{\infty} e^{iu}u^{\frac{1}{x}-1}\mathrm{d}u = \frac{ie^i}{x} - \frac{i}{x}\left(\frac{1}{x}-1\right)\int_1^{\infty} e^{iu}u^{\frac{1}{x}-2}\mathrm{d}u.$$

By the Lebesgue dominated convergence theorem we have

$$\lim_{x\to\infty}\int_1^{\infty} e^{iu}u^{\frac{1}{x}-2}\mathrm{d}u = \int_1^{\infty} e^{iu}u^{-2}\mathrm{d}u =: C,$$

so $f(x) = \frac{1}{x}(ie^i - iC + o(1))$, which implies that

$$\lim_{x\to\infty} xf(x) = L := i(e^i - C).$$

To prove that $L \neq 0$ we write $L = ie^i \int_1^{\infty} \left(1 - e^{i(u-1)}\right) u^{-2}\mathrm{d}u$ and we note that the real part of the integral is $\int_1^{\infty}(1-\cos(u-1))u^{-2}\mathrm{d}u > 0$.

Note that, again by an integration by parts, we have a simpler formula, $L = \int_1^{\infty} e^{iu}u^{-1}\mathrm{d}u$. □

355. Let p be an odd prime number and $\alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ such that $\cos\alpha = \frac{1}{p}$. Prove that for any $n \in \mathbb{N}^*$, $n > 1$, there is no $m \in \mathbb{N}^*$ such that $\cos(n\alpha) = \frac{1}{m}$.

Proposed by Vlad Matei, University of Cambridge, UK.

Solution by the author. We argue by contradiction. Assume indeed that $\cos(n\alpha) = \frac{1}{m}$.

By Moivre's formula we know that

$$\cos(n\alpha) = \frac{(1+i\sqrt{p^2-1})^n + (1-i\sqrt{p^2-1})^n}{2p^n} = \frac{\sum\limits_{i=0}^{\lfloor n/2\rfloor}(-1)^i(p^2-1)^i\binom{n}{2i}}{p^n}.$$

It would follow, since p is prime, that there exists a positive integer l such that $l \le n$ and $m = p^l$, thus

$$\sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^i (p^2-1)^i \binom{n}{2i} = p^{n-l}. \tag{33}$$

We have that $\displaystyle\sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^i (p^2-1)^i \binom{n}{2i} \equiv \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2i} \pmod p$, thus

$$\sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^i (p^2-1)^i \binom{n}{2i} \equiv 2^{n-1} \pmod p.$$

If $l < n$ this would lead to $p \mid 2$ so $p = 2$, in contradiction with the hypothesis. Thus $l = n$. From this we can rewrite (33) as

$$\sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor - 1} (-1)^i (p^2-1)^i \binom{n}{2i+2} = 0. \tag{34}$$

In what follows $v_2(x)$ denotes the exponent of 2 in the natural number x, also known as the 2-adic valuation.

Let $v_2(p^2-1) = a$ and $v_2(n(n-1)) = b$. We note that $a \ge 3$ since p is odd. Our aim is to prove that $v_2\left((p^2-1)^i \binom{n}{2i+2}\right) \ge b$ for $i \ge 1$, since the first term in our sum is $\binom{n}{2}$ and it has 2-adic valuation $b-1$.

We have that

$$v_2\left((p^2-1)^i \binom{n}{2i+2}\right) = v_2((p^2-1)^i) + v_2\left(\binom{n}{2i+2}\right) =$$

$$= ai + v_2(n(n-1)(n-2)\cdots(n-2i-1)) - v_2((2i+2)!) \ge ai + b - v_2((2i+2)!).$$

Using Legendre's formula we know that $v_2((2i+2)!) = 2i+2-s_2(2i+2)$, where $s_2(x)$ is the sum of digits in the base two expansion of x, thus $v_2((2i+2)!) \le 2i+1$. Putting it all together, from our first observation $a \ge 3$ and the fact that $i \ge 1$ it results that

$$v_2\left(\left(p^2-1\right)^i \binom{n}{2i+2}\right) \ge ai + b - 2i - 1 \ge b + 3i - 2i - 1 = b + i - 1 \ge b.$$

Thus we have obtained our desired inequality and this gives an immediate contradiction in the equality (34), by looking at the 2-adic valuations of the first term $\binom{n}{2}$ and of the others $\left(p^2-1\right)^i \binom{n}{2i+2}$, for $i \ge 1$. $\square$

356. Let $\{b_n\}_{n \ge 0}$ be a sequence of positive real numbers. The following statements are equivalent:

i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|b_{n+1}^r - b_n^r|}{b_n} < \infty$ for all $r \in \mathbb{R}$;

ii) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|b_{n+1} - b_n|}{b_n} < \infty$;

iii) $\sum_{n=0}^{\infty} |b_{n+1} - b_n| < \infty$ and $\lim b_n > 0$;

iv) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|b_{n+1} - b_n|}{b_{n+1}} < \infty$;

v) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|b_{n+1}^r - b_n^r|}{b_{n+1}} < \infty$ for all $r \in \mathbb{R}$.

Proposed by Alexandru Kristaly, Babeş-Bolyai University, Cluj-Napoca, Romania, and Gheorghe Moroşanu, Central European University, Budapest, Hungary.

Solution by the authors. First, we prove

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|b_{n+1} - b_n|}{b_n} < \infty \Rightarrow \exists m, M > 0: \ m \le b_n \le M, \ \forall n \ge 0. \tag{35}$$

Let $a_n = \frac{b_{n+1} - b_n}{b_n}$. From the hypothesis it follows that $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$, and

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = 1 + a_n, \ n \ge 0.$$

Note that in particular $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Therefore, we may assume without any loss of generality that $|a_n| < 1$ for all $n \ge 0$. It follows from the above relation that

$$\frac{b_n}{b_0} = \prod_{k=0}^{n-1} (1 + a_k). \tag{36}$$

From (36) we obtain that

$$\frac{b_n}{b_0} \le \prod_{k=0}^{n-1} (1+|a_k|) \le \prod_{k=0}^{\infty} (1+|a_k|) \le \prod_{k=0}^{\infty} \exp(|a_k|) = \exp(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|) =: M_0 < \infty,$$

thus

$$b_n \le b_0 M_0 =: M.$$

Using again (36) we obtain that

$$\frac{b_n}{b_0} \ge \prod_{k=0}^{n-1} (1 - |a_k|) \ge \prod_{k=0}^{\infty} (1 - |a_k|).$$

The latter term is positive. We assume by contradiction that it is 0. Consequently,

$$\sum_{k=0}^{\infty} - \ln(1 - |a_k|) = \infty.$$

Since $\lim\limits_{x\to 0} \frac{-\ln(1-|x|)}{|x|} = 1$ and $\lim\limits_{k} a_k = 0$, the above series has the same nature as $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|$. Contradiction. Thus, $\prod\limits_{k=0}^{\infty} (1 - |a_k|) = m_0 > 0$, i.e.,

$$b_n \geq b_0 m_0 =: m.$$

ii) $\Rightarrow$ i) If $r = 0$, we have nothing to prove. If $r \neq 0$, by the mean value theorem we obtain that $b_{n+1}^r - b_n^r = r c_n^{r-1}(b_{n+1} - b_n)$, where $m \leq c_n \leq M$. This proves the claim.

In fact, i) and ii) are equivalent because ii) is obtained by specializing $r = 1$ in i). It is also obvious that ii) $\Rightarrow$ iii). We have just to notice that $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |b_{n+1} - b_n| < \infty$ implies that $\{b_n\}$ is convergent. The converse implication, iii) $\Rightarrow$ ii), is trivial.

The equivalence of the last three statements follows by similar arguments. $\square$

357. Describe the functions $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ with $\varphi(0) = 0$ such that the set of functions $\{\varphi + y : y \in \mathbb{R}\}$ is a semigroup with respect to the operation "$\circ$", the composition of functions. Prove that such a semigroup is a monoid if and only if φ is the identity map.

`Proposed by Dan Schwarz, Bucharest and Marcel Ţena, Saint Sava National College, Bucharest, Romania.`

Solution by the authors. On the set of functions $\mathcal{F} = \{f : f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ let define the relation $f_1 \sim f_2$ if $f_2 - f_1$ is a constant function. One immediately checks $\sim$ is an equivalence relation. Then the class $\hat{f}$ of any function f contains exactly one (canonical) representative φ with $\varphi(0) = 0$.

Assume now that $\hat{\varphi}$ is a subsemigroup of $(\mathcal{F}, \circ)$. Let $\varphi \circ (\varphi + y) = \varphi + y'$. Computed at $x = 0$ it yields $\varphi(y) = y'$, thus $\varphi \circ (\varphi + y) = \varphi + \varphi(y)$ for all y. Computed at $y = 0$ it yields $\varphi \circ \varphi = \varphi$, thus also $(\varphi + y) \circ \varphi = \varphi + y$ for all y, i.e., φ is a neutral element to the right.

Conversely, for a function φ satisfying $\varphi(0) = 0$ and $\varphi(\varphi(x) + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ for all x, y, we have

$$\begin{aligned}((\varphi + a) \circ (\varphi + b))(x) &= (\varphi + a)\left((\varphi + b)(x)\right) \\ &= (\varphi + a)(\varphi(x) + b) = (\varphi + (\varphi(b) + a))(x),\end{aligned}$$

hence $\hat{\varphi}$ is a semigroup.[2]

Consider now $K_\varphi = \{k \in \mathbb{R} : \varphi(k) = k\}$. From $\varphi \circ \varphi = \varphi$ follows $K_\varphi = \mathrm{Im}\varphi$. We have $0 \in K_\varphi$ and $\varphi(k_1+k_2) = \varphi(\varphi(k_1)+k_2) = \varphi(k_1)+\varphi(k_2) = = k_1 + k_2$. Also, $0 = \varphi(\varphi(k) + (-k)) = k + \varphi(-k)$, hence $\varphi(-k) = -k$. It follows that $(K_\varphi, +) \leq (\mathbb{R}, +)$, an additive subgroup of $\mathbb{R}$.

The improper cases are

- $K_\varphi = \{0\}$, corresponding to $\varphi = 0$;
- $K_\varphi = \mathbb{R}$, corresponding to $\varphi = \mathrm{id}_\mathbb{R}$.

Let $\overline{y}$ be a coset of $\mathbb{R}/K_\varphi$; we have $\varphi(k+y) = k+\varphi(y)$ for $k \in K_\varphi$. Then the function φ is defined by id on K_φ, and (arbitrarily) on representatives y of the cosets $\overline{y}$, prolonged to the whole coset by $\varphi(k+y) = k+\varphi(y)$. Conversely, any such function φ satisfies $\varphi(0) = 0$ and $\varphi(\varphi(x) + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ for all x, y. The function $\varphi(x) = \lfloor x \rfloor$ is such an example, for $K_\varphi = \mathbb{Z}$, with $\varphi \neq \mathrm{id}_\mathbb{R}$ (obviously, the semigroup will have no neutral element).

But if $\{\varphi + y : y \in \mathbb{R}\}$ is a monoid, then $\varphi = \varepsilon \circ \varphi = \varepsilon$ (where ε is the neutral element), hence φ is the neutral element of the monoid. Then $\varphi + \varphi(y) = \varphi \circ (\varphi + y) = \varphi + y$ for all y, hence $\varphi = \mathrm{id}_\mathbb{R}$. On the other hand, it is clear that for $\varphi = \mathrm{id}_\mathbb{R}$ the corresponding subset is a monoid (in fact a group). □

358. Prove that for any coloring of the lattice points of the plane with a finite number $n \geq 1$ of colors and for any triangle ABC having angles with rational tangents there is a triangle with lattice vertices of the same color which is similar to ABC.

`Proposed by Benjamin Bogoşel, West University of Timişoara, Romania.`

Solution by the author. Let $\tan A = \frac{a}{b} = \frac{abcd}{b^2cd}$ and $\tan B = \frac{c}{d} = \frac{abcd}{abd^2}$, with $a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$, $\gcd(a, b) = \gcd(c, d) = 1$. We consider the lattice points D, E, F of coordinates $(0, 0)$, $(b^2cd + abd^2, 0)$ and $(b^2cd, abcd)$, respectively. By construction the triangle DEF is similar to ABC as $\tan A = \tan D$, $\tan B = \tan E$.

From now on we will focus on points in the set

$$\mathcal{A} = \{X \mid \overrightarrow{DX} = p\overrightarrow{DE} + q\overrightarrow{DF},\ p, q \in \mathbb{N}\}.$$

Given k points $P_1, \ldots, P_k \in \mathcal{A}$ in an arithmetic progression on a line parallel to Ox, let P be a point with $P_1P \| DF$ and $P_kP \| EF$ so that the triangle P_1P_kP is similar to ABC. We denote by $\delta(P_1, P_k, k)$ the set of the vertices of the $(k-1)^2$ congruent triangles similar to ABC in which the triangle P_1P_kP can be divided. Then $\delta(P_1, P_k, k) \subset \mathcal{A}$. We denote by $\sigma(n)$ the smallest number of points $P_1, \ldots, P_{\sigma(n)} \in \mathcal{A}$ in an arithmetic progression on

[2]In fact this induces on $\mathbb{R}$ the associative operation $a*b = a+\varphi(b)$, with neutral element to the right $e = 0$. To check, $(a*b)*c = a*(b*c) = a+\varphi(b)+\varphi(c)$, $a*0 = a+\varphi(0) = a$.

a line parallel to Ox such that, regardless of the coloring, in $\delta(P_1, P_{\sigma(n)}, \sigma(n))$ there are three points of the same color that are the vertices of a triangle similar to ABC. (Assuming that such number exists.) We will prove by induction on n that $\sigma(n)$ is defined.

When $n = 1$ there is nothing to prove, as all points have the same color, so $\sigma(1) = 2$.

For the induction step we use the Van der Waerden's theorem, which states that for any $r, k \geq 1$ there is a number N such that if the elements of an arithmetic progression of length N are colored with r colors then we can extract an arithmetic progression of length k with elements of the same color. The smallest N with this property is the Van der Waerden number, denoted $W(r, k)$.

Assume that $\sigma(n)$ is defined. We will show that $\sigma(n+1)$ is also defined and $\sigma(n+1) \leq W(n+1, \sigma(n)+1)$. We consider a coloring with $n+1$ colors. Let $P_1, \ldots, P_{W(n+1,\sigma(n)+1)} \in \mathcal{A}$ be some points in an arithmetic progression on a line parallel to Ox.

We want to prove that $\delta(P_1, P_{W(n+1,\sigma(n)+1)}, W(n+1, \sigma(n)+1))$ contains three points of the same color that are the vertices of a triangle similar to ABC. By the Van der Waerden's theorem there are $Q_1, \ldots, Q_{\sigma(n)+1} \in$ $\in \{P_1, \ldots, P_{W(n+1,\sigma(n)+1)}\}$ in an arithmetic progression of the same color. Obviously

$$\delta(Q_1, Q_{\sigma(n)+1}, \sigma(n) + 1) \subseteq \delta(P_1, P_{W(n+1,\sigma(n)+1)}, W(n + 1, \sigma(n) + 1)).$$

We have

$$\delta(Q_1, Q_{\sigma(n)+1}, \sigma(n) + 1) = \{Q_1, \ldots, Q_{\sigma(n)+1}\} \cup \delta(R_1, R_{\sigma(n)}, \sigma(n)),$$

where $R_1, \ldots, R_{\sigma(n)}$ are the points of $\delta(Q_1, Q_{\sigma(n)+1}, \sigma(n) + 1)$ from the first line parallel to $[P_1, P_{\sigma(n)+1}]$. If $\delta(R_1, R_{\sigma(n)}, \sigma(n))$ contains some point R of the same color as the Q_i's then R and two points Q_i, Q_j are the vertices of a triangle which is similar to ABC and they have the same color, so we are done. Hence we may assume that all points of $\delta(R_1, R_{\sigma(n)}, \sigma(n))$ are colored in the remaining n colors. By the induction hypothesis there are three points of the same color in $\delta(R_1, R_{\sigma(n)}, \sigma(n))$ that are the vertices of a triangle similar to ABC and again we are done. $\square$

359. Determine how many permutations of the 81 squares of the Sudoku grid have the property that for any solution of the Sudoku game, if we apply the permutation to the 81 squares we obtain another solution of the Sudoku game.

`Proposed by Constantin-Nicolae Beli, Simion Stoilow Institute of Mathematics of the Romanian Academy, Bucharest, Romania.`

Solution by the author. Denote $I := \{1, \ldots, 9\}$. A completion of the Sudoku grid with numbers from 1 to 9 can be regarded as a function

$f : I \times I \to I$. We denote by A the set of such completions that are solutions of the Sudoku game.

For any set X we denote by Σ_X its group of permutations. In particular, $S_n = \Sigma_{\{1,\ldots,n\}}$.

If $\sigma \in \Sigma_{I\times I}$ and $f : I \times I \to I$ then, after applying σ to the 81 squares of the grid, for any $s \in I \times I$ the value on the square $\sigma(s)$ will be $f(s)$. Hence the value on a square s will be $f(\sigma^{-1}(s))$. Thus the new completion of the grid will be the function $f \circ \sigma^{-1}$. Hence we want to determine $|G|$, where $G = \{\sigma \in \Sigma_{I\times I} \mid f \circ \sigma^{-1} \in A\ \forall f \in A\}$. Note that if $\sigma, \tau \in G$ then for any $f \in A$ we have $f \circ \sigma^{-1} \in A$ and so $f \circ (\tau\sigma)^{-1} = (f \circ \sigma^{-1}) \circ \tau^{-1} \in G$, whence $\tau\sigma \in A$. Hence G is a subsemigroup of $\Sigma_{I\times I}$. But $\Sigma_{I\times I}$ is finite so G is a subgroup.

For any $i \in I$ we denote by r_i and c_i the i-th row and column, respectively, $r_i = \{i\} \times I$, $c_i = I \times \{i\}$.

We have $I = I_1 \cup I_2 \cup I_3$, where $I_k = \{3k-2, 3k-1, 3k\}$. Then the grid can be divided into 3 blocks of 3 consecutive rows, R_1, R_2, R_3, where $R_k = r_{3k-2} \cup r_{3k-1} \cup r_{3k} = I_k \times I$. Similarly we have the blocks of 3 consecutive columns C_1, C_2, C_3, $C_k = I \times I_k$. For $1 \le k, l \le 3$ we denote by $S_{k,l}$ the nine 3×3 squares of the grid, $S_{k,l} = I_k \times I_l = R_k \cap C_l$. We have

$$A = \{f : I \times I \to I \mid f(r_i) = f(c_i) = I\ \forall i \in I,\ f(S_{k,l}) = I\ \forall 1 \le k, l \le 3\}.$$

For any $i \in I$ we have $i \in I_{\alpha(i)}$, where $\alpha(i) = \lceil \frac{i}{3} \rceil$. Then the row r_i is a part of the block $R_{\alpha(i)}$ and the column c_i is a part of the block $C_{\alpha(i)}$. Also a square $(i,j) \in I \times I$ belongs to the 3×3 square $S_{\alpha(i),\alpha(j)}$.

If $\sigma \in \Sigma_I$ then we denote by $\sigma^r, \sigma^c \in \Sigma_{I\times I}$ the corresponding permutation of the rows and columns, respectively. Namely, σ^r is given by $(i,j) \mapsto (\sigma(i), j)$ and σ^c by $(i,j) \mapsto (i, \sigma(j))$. Then $\sigma^r(r_i) = r_{\sigma(i)}$, $\sigma^r(c_i) = c_i$ and $\sigma^c(r_i) = r_i$, $\sigma^c(c_i) = c_{\sigma(i)}\ \forall i \in I$.

If $\sigma, \tau \in \Sigma_I$ and $\phi = \sigma^r\tau^c$ then $\phi(r_i) = r_{\sigma(i)}$ and $\phi(c_i) = c_{\tau(i)}$, so ϕ sends rows to rows and columns to columns. Also $\phi((i,j)) = (\sigma(i), \tau(j))$. In particular, this implies that ϕ is uniquely determined by σ and τ, i.e., if $\phi = \sigma^r\tau^c = \sigma'^r\tau'^c$ then $\sigma' = \sigma$, $\tau' = \tau$. Conversely, if $\phi \in \Sigma_{I\times I}$ sends rows to rows and columns to columns, i.e., if there are $\sigma, \tau \in \Sigma_I$ such that $\phi(r_i) = r_{\sigma(i)}$ and $\phi(c_i) = c_{\tau(i)}$, then for any $(i,j) \in I \times I$ we have $\{(i,j)\} = r_i \cap c_j$ so $\{\phi((i,j))\} = \phi(r_i) \cap \phi(c_j) = r_{\sigma(i)} \cap c_{\tau(i)} = \{(\sigma(i), \tau(j))\}$. Thus ϕ is given by $(i,j) \mapsto (\sigma(i), \tau(j))$ and so $\phi = \sigma^r\tau^c$. In conclusion, the mapping $(\sigma, \tau) \mapsto \sigma^r\tau^c$ is a bijection between $\Sigma_I \times \Sigma_I$ and the permutations of $I \times I$ sending rows to rows and columns to columns.

For any $\lambda \in S_3$ we denote $H_\lambda = \{\sigma \in \Sigma_I \mid \sigma(I_k) = I_{\lambda(k)}\}$ and $H = \cup_{\lambda \in S_3} H_\lambda$. Note that $H_\lambda H_{\lambda'} \subseteq H_{\lambda\lambda'}$, which implies $HH \subseteq H$, so H is a subgroup of Σ_I. Note that $H_\lambda \ne \emptyset$ for any $\lambda \in S_3$. Indeed, since for any k, l the mapping $i \mapsto 3(l-k) + i$ is a bijection from I_k to I_l, the mapping

$\sigma_\lambda : I \to I$, given by $i \mapsto 3(\lambda(k) - k) + i$ when $i \in I_k$, is a bijection with $\sigma_\lambda(I_k) = I_{\lambda(k)}$, so it belongs to H_λ.

We have a morphism $\Phi : H \to S_3$ given by $\sigma \mapsto \lambda$ if $\sigma \in H_\lambda$. Then $\ker\Phi = H_1$ and Φ is surjective since $H_\lambda \neq \emptyset\ \forall\lambda \in S_3$. It follows that $|H| = |S_3|\,|H_1|$. But $|S_3| = 6$ and $H_1 = \{\sigma \in \Sigma_I \mid \sigma(I_k) = I_k\ \forall k\}$ is the internal product of its subgroups $\Sigma_{I_1}, \Sigma_{I_2}, \Sigma_{I_3}$, each of them having $3! = 6$ elements, so $|H_1| = 6^3$. Hence $|H| = 6^4$.

Let $\sigma \in H_\lambda$, $\tau \in H_\mu$ for some $\lambda, \mu \in S_3$ and let $\phi = \sigma^r\tau^c$. Then for any $i \in I$ we have $\phi(r_i) = r_{\sigma(i)}$ and $\phi(c_i) = c_{\tau(i)}$. Also since ϕ is given by $(i,j) \mapsto (\sigma(i), \tau(j))$ we have $\phi(S_{k,l}) = \phi(I_k \times I_l) = \sigma(I_k) \times \tau(I_l) = I_{\lambda(k)} \times I_{\mu(l)} = S_{\lambda(k),\mu(l)}\ \forall k,l \in \{1,2,3\}$. It follows that for any $f \in A$ we have $f \circ \phi(r_i) = f(r_{\sigma(i)}) = I$, $f \circ \phi(c_i) = f(c_{\tau(i)}) = I$ and $f \circ \phi(S_{k,l}) = f(S_{\lambda(k),\mu(l)}) = I$. Thus $f \circ \phi \in A$ for any $f \in A$, so $\phi^{-1} \in G$, whence $\phi \in G$.

In conclusion, G contains $H^rH^c = \{\sigma^r\tau^c \mid \sigma, \tau \in H\}$, which is the image of $H \times H$ under the isomorphism $(\sigma, \tau) \mapsto \sigma^r\tau^c$ defined above. We have $|H^rH^c| = |H \times H| = 6^8$. G also contains the reflexion in the diagonal ε, given by $(i,j) \mapsto (j,i)$. Indeed, if $f \in A$ we have $f \circ \varepsilon(r_i) = f(c_i) = I$ and $f \circ \varepsilon(c_i) = f(r_i) = I\ \forall i \in I$ and $f \circ \varepsilon(S_{k,l}) = f(S_{l,k}) = I$, $\forall k,l \in \{1,2,3\}$, so $f \circ \varepsilon \in A$. It follows that $G \supseteq H^rH^c \cup \varepsilon H^rH^c$. We claim that $G = H^rH^c \cup \varepsilon H^rH^c$, which will imply that $|G| = 2 \times 6^8 = 3{,}359{,}232$.

Lemma. *For any $(i,j) \in I \times I$ we denote by $A_{i,j}$ the union of the row, the column and the 3×3 square containing it, $A_{i,j} = r_i \cup c_j \cup S_{\alpha(i),\alpha(j)}$.*

If $(i,j), (r,s) \in I \times I$, $(i,j) \neq (r,s)$, then the following are equivalent:

(1) $f(i,j) \neq f(r,s)$, $\forall f \in A$.

(2) $(r,s) \in A_{i,j}$.

Proof. The implication (1)⇒(2) follows from the fact that any $f \in A$ is injective on every row, column and 3×3 square. For the reverse implication we assume that $(r,s) \notin A_{i,j}$ and we prove that there is some $f \in A$ with $f(i,j) = f(r,s)$. Since $(r,s) \notin r_i$ and $(r,s) \notin c_j$ we have $r \neq i$ and $s \neq j$. Also (i,j) and (r,s) belong to different 3×3 squares, say $S_{k,l}$ and $S_{m,n}$, with $(k,l) \neq (m,n)$.

Let $f_0 \in A$ be arbitrary. In the square $S_{m,n}$ there is some (p,q) with $f_0(p,q) = f_0(i,j)$. Since (i,j) and (p,q) belong to different 3×3 squares they are different so, by the (1)⇒(2) implication, $(p,q) \notin A_{i,j}$. Arguing in the same way as for (r,s), we get $p \neq i$, $q \neq j$.

We consider the transpositions $\sigma = (r,p)$, $\tau = (s,q)$ and we define $\phi = \sigma^r\tau^c$. Since $(r,s), (p,q) \in S_{m,n}$ we have $r, p \in I_m$, $s, q \in I_n$. This implies that $\sigma \in \Sigma_{I_m} \subset H$, $\tau \in \Sigma_{I_n} \subset H$, so $\phi \in H^rH^c \subset G$. Therefore $f := f_0 \circ \phi \in A$.

We have $\sigma(r) = p$, $\tau(s) = q$ and, since $i \neq r, p$, $j \neq s, q$, we have $\sigma(i) = i$, $\tau(j) = j$.

Therefore $\phi(i,j)=(i,j)$ and $\phi(r,s)=(p,q)$, so $f(r,s)=f_0(p,q)=$ $=f_0(i,j)=f(i,j)$, as claimed. □

We denote $M=\{X\subset I\times I \mid |X|=9,\ f(X)=I,\ \forall f\in A\}$.

Corollary. M is the set of all rows, columns and 3×3 squares.

Proof. Obviously, by the definition of A, M contains all rows, columns and 3×3 squares.

Conversely, assume that $X\in M$. Then $|X|=|I|=9$, so the condition that $f(X)=I$ means that $f_{|X}$ is bijective. Hence if $(i,j),(r,s)\in X$, $(i,j)\neq(r,s)$, then for any $f\in A$ we have $f(i,j)\neq f(r,s)$, so, by the Lemma, $(r,s)\in A_{i,j}$. Hence $X\subseteq A_{i,j}$.

Let $(i,j)\in X$. If $i\in I_k$, $j\in I_l$ then $X\subseteq A_{i,j}=r_i\cup c_j\cup S_{k,l}$. If $X=S_{k,l}$ then we are done. So we may assume that $X\cap(r_i\setminus S_{k,l})$ or $X\cap(c_j\setminus S_{k,l})$ is nonempty. We consider the first case, so let $(i,h)\in X\cap(r_i\setminus S_{k,l})$. We have $h\in I_m$ with $m\neq l$ since otherwise $(i,h)\in I_k\times I_l=S_{k,l}$.

Since $(i,j),(i,h)\in X$, we have $X\subseteq A_{i,j}\cap A_{i,h}$. But $c_j\cup S_{k,l}\subset C_l$, so $r_i\subset A_{i,j}\subset r_i\cup C_l$. Similarly, $r_i\subset A_{i,h}\subset r_i\cup C_m$, so $r_i\subseteq A_{i,j}\cap A_{i,h}\subseteq$ $\subseteq(r_i\cup C_l)\cap(r_i\cup C_m)=r_i$. (We have $C_l\cap C_m=\emptyset$.)

Thus $X\subseteq A_{i,j}\cap A_{i,h}=r_i$, whence $X=r_i$. (We have $|X|=|r_i|=9$.)

Similarly, if $X\cap(c_j\setminus S_{k,l})\neq\emptyset$ we get $X=c_j$ and we are done. □

Let now $\phi\in G$. We prove that $\phi\in H^rH^c\cup\varepsilon H^rH^c$ to get our claimed result, $G=H^rH^c\cup\varepsilon H^rH^c$. If $X\in M$ then for any $f\in A$ we have $f\circ\phi\in A$, so $f(\phi(X))=f\circ\phi(X)=I$. It follows that $\phi(X)\in M$. Hence ϕ will permutate the elements of M. We have $M=M_1\cup M_2$, where $M_1=\{r_i,c_i \mid i\in I\}$ and $M_2=\{S_{k,l}\mid 1\le k,l\le 3\}$. Note that $|r_i\cap c_j|=1$ $\forall i,j\in I$ and if $X=S_{k,l}$ then for any $Y\in M$, $Y\neq X$, we have either $|X\cap Y|=3$, when $Y=r_i$ with $i\in I_k$ or $Y=c_j$ with $j\in I_l$, or $|X\cap Y|=0$ otherwise. Thus $M_1=\{X\in M\mid \exists Y\in M,\ |X\cap Y|=1\}$.

If $X\in M_1$ then there is $Y\in M$ with $|X\cap Y|=1$. It follows that $|\phi(X)\cap\phi(Y)|=|\phi(X\cap Y)|=1$, so $\phi(X)\in M_1$. Hence ϕ sends M_1 to M_1 and M_2 to M_2, i.e., it sends rows and columns to rows and columns and 3×3 squares to 3×3 squares.

Note that if $X\cap Y\neq\emptyset$ then $\phi(X)\cap\phi(Y)\neq\emptyset$, so for any $X\in M_1$ ϕ sends $\{Y\in M_1\mid X\cap Y\neq\emptyset\}$ to $\{Y\in M_1\mid \phi(X)\cap Y\neq\emptyset\}$. Take $X=r_1$. Then $\phi(r_1)=r_h$ or c_h for some $h\in I$. In the first case ϕ will send $\{Y\in M_1\mid r_1\cap Y\neq\emptyset\}=\{c_i\mid i\in I\}$ to $\{Y\in M_1\mid r_h\cap Y\neq\emptyset\}=\{c_i\mid i\in I\}$. Hence ϕ sends columns to columns and rows to rows. In the second case ϕ sends $\{c_i\mid i\in I\}$ to $\{Y\in M_1\mid c_h\cap Y\neq\emptyset\}=\{r_i\mid i\in I\}$. Hence ϕ sends columns to rows and rows to columns. We consider the two cases separately.

If ϕ sends rows to rows and columns to columns then $\phi=\sigma^r\tau^c$ for some $\sigma,\tau\in\Sigma_I$. We have $\phi(r_i)=r_{\sigma(i)}$ and $\phi(c_i)=c_{\tau(i)}$, $\forall i\in I$. Let $k\in\{1,2,3\}$. Then ϕ sends $S_{k,1}$ to another 3×3 square, say $S_{m,n}$. Then for any $i\in I_k$ we have $r_i\cap S_{k,1}\neq\emptyset$ and therefore $r_{\sigma(i)}\cap S_{m,n}=\phi(r_i)\cap\phi(S_{k,1})\neq\emptyset$. It follows that $\sigma(i) \in I_m$. Hence $\sigma(I_k) \subseteq I_m$ so, since σ is bijective, $\sigma(I_k) = I_m$. It follows that there is some $\lambda \in S_3$ with $\sigma(I_k) = I_{\lambda(k)}$ $\forall k \in \{1,2,3\}$. Hence $\sigma \in H$. By a similar reasoning $\tau \in H$ and so $\phi \in H^r H^c$.

If ϕ sends rows to columns and columns to rows then so does ε. Thus $\varepsilon\phi \in G$ will send rows to rows and colums to columns. It follows that $\varepsilon\phi \in H^r H^c$, so $\phi \in \varepsilon H^r H^c$. □

Remark. Recall that H_1 is the kernel of the surjective homomorphism $\Phi : H \to S_3$ and $H_\lambda = \Phi^{-1}(\lambda)$ $\forall \lambda \in S_3$. Hence H_λ are the classes of H/H_1. Since $\sigma_\lambda \in H_\lambda$, we have $H_\lambda = \sigma_\lambda H_1$. So any $\sigma \in H$ writes as $\sigma = \sigma_0\sigma'$, where $\sigma_0 = \sigma_\lambda$ for some $\lambda \in S_3$ and $\sigma' \in H_1$. But H_1 is the internal direct product of $\Sigma_{I_1}, \Sigma_{I_2}, \Sigma_{I_3}$, so $\sigma' = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$ with $\sigma_k \in \Sigma_{I_k}$.

It follows that $\sigma^r = \sigma_0^r\sigma_1^r\sigma_2^r\sigma_3^r$. Since σ_0 permutates by translation the sets I_1, I_2, I_3, σ_0^r permutates by translation the blocks R_1, R_2, R_3. For $k = 1,2,3$ $\sigma_k \in \Sigma_{I_k}$, so σ_k^r will permutate the rows of the block $R_k = I_k \times I$. We proceed similarly with τ^c when $\tau \in H$. In conclusion, an element of G has the form

$$\phi = \varepsilon^s \sigma_0^r\sigma_1^r\sigma_2^r\sigma_3^r\tau_0^c\tau_1^c\tau_2^c\tau_3^c,$$

where $s \in \{0,1\}$, ε is the reflection in the diagonal of the grid, σ_0^r permutates the blocks R_1, R_2, R_3, $\sigma_1^r, \sigma_1^r, \sigma_3^r$ permutate the rows within R_1, R_2, R_3, τ_0^c permutates the blocks C_1, C_2, C_3, and $\tau_1^c, \tau_2^c, \tau_3^c$ permutate the columns within the blocks C_1, C_2, C_3.

360. Let $M_n(\mathbb{C})$ be the ring of square matrices of size n and $A \in M_n(\mathbb{C})$. The adjugate (classical adjoint) $\operatorname{adj}(A)$ of A is defined as follows: the (i,j)-minor M_{ij} of A is the determinant of the $(n-1) \times (n-1)$ matrix that results from deleting row i and column j of A, and the i,j cofactor of A as $C_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$. The adjugate of A is the transpose of the "cofactor matrix" C_{ij} of A.

Show that if for all positive integers k we have $\det((\operatorname{adj}(A))^k + I_n) = 1$, then $(\operatorname{adj}(A))^2 = O_n$.

Proposed by Marius Cavachi, Ovidius University of Constanţa, Romania, and Cezar Lupu, University of Pittsburgh, USA.

Solution by the authors. First of all, we prove the following.

Lemma 1. *If $A \in M_n(\mathbb{C})$ is a matrix such that the adjugate* $\operatorname{adj}(A)$ *is nilpotent, then* $(\operatorname{adj}(A))^2 = O_n$.

Proof. From the hypothesis, it follows that $\det(\operatorname{adj}(A)) = 0$. If A would be invertible, from the identity $A\operatorname{adj}(A) = \det(A)I_n$ (which follows from the Laplace development for the determinant) it would result that $\operatorname{adj}(A)$ is invertible as well. This contradiction shows that one has $\det(A) = 0$. Thus, $\operatorname{rank}(A) \le n-1$. If $\operatorname{rank}(A) \le n-2$ then $\operatorname{adj}(A) = O_n$ and the conclusion is obvious. If $\operatorname{rank}(A) = n-1$, from $A\operatorname{adj}(A) = O_n$ and Sylvester's inequality, we deduce

$$0 = \operatorname{rank}(A \operatorname{adj}(A)) \geq \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(\operatorname{adj}(A)) - n = \operatorname{rank}(\operatorname{adj}(A)) - 1.$$

Since $\operatorname{rank}(\operatorname{adj}(A)) = 1$, it follows that there exist $M \in M_{1,n}(\mathbb{C})$ and $N \in M_{n,1}(\mathbb{C})$ such that $\operatorname{adj}(A) = NM$ and $MN = \lambda \in \mathbb{C}$. As $\operatorname{adj}(A)$ is nilpotent, there exists a positive integer k such that $(\operatorname{adj}(A))^k = O_n$. On the other hand, by iteration, we deduce that

$$O_n = (\operatorname{adj}(A))^k = N \cdot (MN)^{k-1} \cdot M = \lambda^{k-1} NM = \lambda^{k-1} \operatorname{adj}(A).$$

Since $\operatorname{adj}(A) \neq O_n$, we have $\lambda = 0$ and the conclusion follows immediately from $(\operatorname{adj}(A))^2 = N \cdot (MN) \cdot M = \lambda \operatorname{adj}(A)$. $\square$

Lemma 2. *If X is a square matrix of size n with complex entries such that for any positive integer k we have $\det(X^k + I_n) = 1$, then $X^n = O_n$.*

Proof. Indeed, let $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ be the eigenvalues of the matrix X. It is easy to see that $1 + \lambda_1^k, 1 + \lambda_2^k, \dots, 1 + \lambda_n^k$ are the eigenvalues of $X^k + I_n$. By the hypothesis we have

$$(1 + \lambda_1^k)(1 + \lambda_2^k) \cdots (1 + \lambda_n^k) = 1.$$

By expanding this writes as

$$x_1^k + \cdots + x_m^k = 0,$$

where $x_1, \dots, x_m$ are the products $\lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_t}$ with $1 \leq t \leq n$ and $1 \leq i_1 < \ldots < i_t \leq n$. (We have $m = 2^n - 1$.)

We denote by S_k the elementary symmetric polynomials defined by $S_k = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq m} x_{i_1} \cdots x_{i_k}$ and $P_k = x_1^k + \cdots + x_m^k$. Since $P_1 = \ldots = P_m = 0$ (see above), from the well-known Newton's identities

$$kS_k = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} S_{k-i} P_i$$

valid for all integers $k \geq 1$ we readily get $S_1 = \cdots = S_m = 0$. It follows that $x_1 = \cdots = x_m = 0$. This in turn implies $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. By Hamilton-Cayley theorem we deduce that $X^n = O_n$. $\square$

Applying Lemma 2 for $X = \operatorname{adj}(A)$, we obtain that $(\operatorname{adj}(A))^n = O_n$. By Lemma 1 this implies $(\operatorname{adj}(A))^2 = O_n$. $\square$

361. 88% of the surface of a sphere is colored in red. Prove that there is a cube inscribed in the sphere with all vertices red.

`George Stoica, Department of Mathematical Sciences, University of New Brunswick, Canada.`

Solution by the author. For $1 \leq i \leq 8$ we denote by X_i the event that the vertex A_i of a random cube with vertices $A_1, \dots, A_8$ inscribed in the sphere is not red. By hypothesis

$$\mathrm{Prob}(X_i) = \frac{12}{100} \text{ for } i = 1, \ldots, 8,$$

where $\mathrm{Prob}(X_i)$ is the probability of the event X_i.

By Boole's inequality we have

$$\mathrm{Prob}\left(\bigcup_{i=1}^{8} X_i\right) \leq \sum_{i=1}^{8} \mathrm{Prob}(X_i) = \frac{96}{100},$$

so the probability that at least a vertex of the cube is not red is $\leq \frac{96}{100}$. Hence the probability that all vertices are red is $\geq \frac{4}{100} > 0$. Thus there are cubes with all vertices red.

362. Given a function $f : X \to X$, we will make the notations

$$f_0(X) := X,\ f_n(X) := f(f_{n-1}(X)) \ \text{ for } n \geq 1,\ f_\omega(X) := \bigcap_{n\geq 0} f_n(X).$$

(i) Prove that $f(f_\omega(X)) \subseteq f_\omega(X)$.

(ii) Prove that for $X = \mathbb{R}$ and f a continuous mapping, $f_\omega(\mathbb{R})$ is $\mathbb{R}$, a half-line, a bounded segment, a singleton, or the empty set $\emptyset$.

Moreover, let it now be given that $f(f_\omega(\mathbb{R})) = f_\omega(\mathbb{R})$.

(iii) Prove that if $f_\omega(\mathbb{R})$ is bounded, then it is a closed interval (inclusively degenerate cases — a singleton, or the empty set $\emptyset$); also give examples for each of these cases.

(iv) Give an example for $f_\omega(\mathbb{R})$ being an open half-line.

`Proposed by Dan Schwarz, Bucharest, Romania.`

Solution by the author. (i) We have $f_\omega(X) \subseteq f_n(X) \subseteq f_{n-1}(X) \subseteq X$ for all $n \geq 1$. We also have $f(f_\omega(X)) \subseteq f_\omega(X)$, since

$$f(f_\omega(X)) = f\Big(\bigcap_{n\geq 0} f_n(X)\Big) \ \subseteq \ \bigcap_{n\geq 0} f(f_n(X)) = \bigcap_{n\geq 0} f_{n+1}(X) = f_\omega(X).$$

(ii) f being continuous, $f_n(\mathbb{R})$ is a connex set for all n, hence $f_\omega(\mathbb{R})$ is a connex set, thus belonging to the given list.

(iii) An example for $f_\omega(\mathbb{R}) = \emptyset$ is $f(x) = x^2 + 1$; for $f_\omega(\mathbb{R}) = \{C\}$ is $f(x) = C$ (constant); while for $f_\omega(\mathbb{R}) = [a, b]$, $a < b$, is $f(x) = a$ for $x \leq a$, $f(x) = b$ for $b \leq x$ and $f(x) = x$ for $a \leq x \leq b$.

Assume that $f_\omega(\mathbb{R}) = (a, b)$, $a < b$. Let $y_n = a + (b - a)/2n \in (a, b)$ for $n \geq 1$, hence $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$. Then there exists $x_n \in (a, b)$ for which $y_n = f(x_n)$.

Since the sequence $(x_n)_{n\geq 1}$ is bounded, it will contain a convergent subsequence $(x_{k_n})_{n\geq 1}$; let its limit be ℓ. But then $a = \lim\limits_{n\to\infty} y_{k_n} = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_{k_n}) = f(\ell)$, since f is continuous.

Will it be $\ell \in (a, b)$, it would follow $a = f(\ell) \in (a, b)$, absurd. So $\ell \notin (a, b)$, but as $x_n \in (a, b)$, it will follow $\ell \in [a, b]$, hence $\ell \in \{a, b\}$.

But $f(a) = a$ is absurd, since then $a \in f_\omega(\mathbb{R}) = (a, b)$, thus $f(b) = a$. A similar argumentation leads to $f(a) = b$, thus $f(f(a)) = a$, and again $a \in f_\omega(\mathbb{R}) = (a, b)$, absurd.

Analogously it is shown that $f_\omega(\mathbb{R}) = [a, b)$ or $f_\omega(\mathbb{R}) = (a, b]$, $a < b$, leads to a contradiction.

(iv) Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be given by $f(x) = 1$ for $x \leq 1$ and

$$ef(x) = (1 - \{x\})x^{(-1)^{\lfloor x \rfloor}} + \{x\}x^{(-1)^{\lceil x \rceil}} \text{ for } x \geq 1.$$

(For $n \in \mathbb{N}^*$, $f(n) = n$ for n even, $f(n) = \frac{1}{n}$ for n odd, while for $x \geq 1$, $f(x)$ is defined as the broken line connecting these points on the graph of f — f is piecewise linear). It is then clear that $f_\omega(\mathbb{R}) = f(\mathbb{R}) = (0, \infty)$. □

Remarks. Assume that $f_\omega(\mathbb{R}) = [a, b]$, $a < b$. Consider the obviously closed set $f^{-1}(a) = \{x \mid f(x) = a\}$. Were it $f^{-1}(a) \cap [a, b] \neq \emptyset$, then $a \in f([a, b])$. Were it $f^{-1}(a) \cap [a, b] = \emptyset$, then there exists some $\varepsilon > 0$ such that $f^{-1}(a) \cap [a - \varepsilon, b + \varepsilon] = \emptyset$, but this contradicts the fact that $a = \sup_{n \geq 1} \inf f_n(\mathbb{R})$. Similar considerations lead to $b \in f([a, b])$. It follows $[a, b] \subseteq f([a, b]) \subseteq [a, b]$, therefore $f(f_\omega(\mathbb{R})) = f_\omega(\mathbb{R})$.

Thus, when $f_\omega(\mathbb{R})$ is bounded, then $f(f_\omega(\mathbb{R})) = f_\omega(\mathbb{R})$ if and only if $f_\omega(\mathbb{R})$ is a closed interval (inclusively the degenerate cases — a singleton, or the empty set $\emptyset$), which strengthens point (iii).

363. For a given sequence $(x_n)_{n \geq 1}$ of real numbers and n_0 a fixed positive integer, consider the following conditions:

(C_1): $n^2(x_{n+1} - x_n) - (2n + 1)x_n$ has the same sign for all $n \geq n_0$;

(C_2): $x_{n+m} \leq x_n + x_m$ for all $n, m \neq n_0$;

(C_3): $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-2} x_n < \infty$;

(C_4): $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{x_n}{n} = 0$.

Prove that:

(a) none of (C_1), (C_2), (C_3) implies (C_4);

(b) (C_4) follows from (C_3) and either (C_1) or (C_2);

(c) the converse of (b) is false.

`Proposed by Arpad Benyi, Western Washington University, Bellingham, WA, and Kasso Okoudjou, University of Maryland, College Park, Washington DC, WA, USA.`

Solution by the authors. Let us start by noting that the condition (C_1) about the sequence $(n^2(x_{n+1} - x_n) - (2n + 1)x_n)_{n \geq n_0}$ having a constant sign is equivalent to

$\widetilde{(C_1)}$: $(n^{-2}x_n)_{n \geq n_0}$ *is monotone (increasing or decreasing).*

For example,

$$n^2(x_{n+1} - x_n) - (2n + 1)x_n \geq 0, n \geq n_0$$

is equivalent to

$$n^2 x_{n+1} - (n+1)^2 x_n \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x_{n+1}}{(n+1)^2} \geq \frac{x_n}{n^2}, n \geq n_0.$$

For the remainder of our solution, we will work with statement $(\widetilde{C_1})$ instead of (C_1).

(a) We want to show that neither one of the conditions $(C_1), (C_2), (C_3)$ implies (C_4).

To see that $(C_1) \not\Rightarrow (C_4)$, let $x_n = 2^n$. Clearly, the sequence $\frac{x_n}{n^2} = \frac{2^n}{n^2}$ is increasing for $n \geq 3$. To make it decreasing, pick $x_n = -2^n$. In both cases, $\frac{x_n}{n} = \pm\frac{2^n}{n} \to \pm\infty$ as $n \to \infty$.

For $(C_2) \not\Rightarrow (C_4)$, let $x_n = -n^2$. Clearly, $x_{n+m} = -(n+m)^2 \leq -n^2 - -m^2 = x_n + x_m$, but $\frac{x_n}{n} = -n \to -\infty$.

Finally, for $(C_3) \not\Rightarrow (C_4)$, let $x_n = (-1)^n n$. We have $\sum n^{-2} x_n = = \sum (-1)^n n^{-1}$ which is well known to converge as an alternating series, while $n^{-1} x_n = (-1)^n$ diverges.

(b) We want to show that either of the combinations $(C_1) \wedge (C_3)$ or $(C_2) \wedge (C_3)$ implies (C_4). We start with the first combination.

(b1) We know that $(n^{-2} x_n)$ is a monotone (increasing or decreasing) sequence. If we combine this with the convergence of the series given in (C_3), and use Pringsheim's theorem, we conclude that $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot n^{-2} x_n = 0$, and we are done.

We recall here Pringsheim's theorem: If $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ and (a_n) is monotone (increasing or decreasing), then $\lim\limits_{n\to\infty} n a_n = 0$; see, for example, W.L. Ferrar, *A Text-Book of Convergence*, Oxford, 1938.

(b2) We note first that, given (C_2), the sequence $(n^{-1} x_n)_{n \geq 1}$ is convergent on the extended line $\overline{\mathbb{R}}$, that is $\lim\limits_{n\to\infty} n^{-1} x_n$ exists (and is either finite or $-\infty$). We sketch the proof of this "standard" fact here.

Let $l = \inf\limits_{n \geq 1} n^{-1} x_n$. If $l > -\infty$, then for all $\epsilon > 0$, there exists $m \geq 1$ such that $m^{-1} x_m < l + \epsilon$. For all $n > m$, we can write $n = qm + r$, for some $0 \leq r \leq m - 1$. Therefore,

$$\begin{aligned} l \leq n^{-1} x_n &= (qm+r)^{-1} x_{qm+r} \leq (qm+r)^{-1}(q x_m + x_r) \\ &= m^{-1} x_m \frac{qm}{qm+r} + n^{-1} x_r \leq (l+\epsilon) \frac{qm}{qm+r} + n^{-1} x_r, \end{aligned}$$

where in the second inequality we used the condition $x_{n+m} \leq x_n + x_m$ for all n, m. From here we immediately conclude that

$$l \leq \liminf n^{-1} x_n \leq \limsup n^{-1} x_n \leq l + \epsilon,$$

which proves that $\lim\limits_{n\to\infty} n^{-1} x_n = l$. A similar argument works if $l = -\infty$.

We turn now our attention to the other condition of the hypothesis.

Using Kronecker's lemma we see that the convergence of the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(n^{-1}x_n)$ implies $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k^{-1}x_k = 0$. Since $(n^{-1}x_n)$ is convergent on the extended line, we can use the Cesaro-Stolz lemma to conclude that

$$0 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k^{-1}x_k = \lim_{n\to\infty} n^{-1}x_n,$$

and we are done.

We recall Kronecker's lemma: If $(u_n)_{n\geq 1}$ is a monotone increasing, unbounded sequence of positive numbers, and $(v_n)_{n\geq 1}$ is a sequence of real numbers such that the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n}{u_n}$ is convergent, then $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{u_n} \sum_{k=1}^{n} v_k = 0$.

(c) To see that $(C_4) \not\Rightarrow ((C_1) \vee (C_2)) \wedge (C_3)$, select, for example, $x_n = \frac{n}{\ln n}$, $n \geq 2$. In this case, $n^{-1}x_n = \frac{1}{\ln n} \to 0$, so (C_4) holds, but (C_3) clearly fails since

$$\sum n^{-2}x_n = \sum \frac{1}{n \ln n} = \infty.$$

Incidentally, for the sequence considered, both (C_1) and (C_2) are satisfied. The simple modification $x_n = \frac{(-1)^n n}{\ln n}$, $n \geq 2$, provides an example for which neither one of (C_1) or (C_2) holds, while (C_3) does. $\square$

364. Let $(x_n)_{n\geq 1}$ be a sequence of real numbers such that

$$\limsup_{n\to\infty} (1 - x_n) \log n < \infty.$$

Show that if the series of positive reals $\sum_{n\geq 1} a_n$ converges then the series $\sum_{n\geq 1} a_n^{x_n}$ also converges.

`Proposed by Cristian Ghiu, Politehnica University of Bucharest, Romania.`

Solution by the author. From $\limsup_{n\to\infty} (1 - x_n) \log n < \infty$ we get that $(1 - x_n) \log n \leq M$, so $1 - x_n \leq \frac{M}{\log n}$, $\forall\, n \geq 2$ for some $M > 0$ large enough.

Since $\sum_{n\geq 1} a_n$ is convergent, we have $a_n \longrightarrow 0$, so there is some $N_1 \in \mathbb{N}^*$ such that $a_n < 1$, $\forall n \geq N_1$.

We take an integer $N_2 > e^{2M}$. Then $\frac{M}{\log n} < \frac{1}{2}$, $\forall n \geq N_2$. In particular for $n \geq N_2$ we have $1 - x_n \leq \frac{M}{\log n} < \frac{1}{2}$, so that $x_n > \dfrac{1}{2}$.

Let $n_0 := \max\{N_1, N_2\}$.

If $n \geq n_0$ then $a_n \in (0; 1)$ and $x_n > \frac{1}{2}$. There are two cases:

Case I: $x_n < 1$. We use the inequality

$$A^t \cdot B^{1-t} \leq tA + (1 - t)B, \quad \forall\, t \in [0; 1], \quad \forall\, A, B \in (0; \infty), \tag{37}$$

which follows immediately from the concavity of the logarithm function.

Since $x_n < 1$ and $1 - x_n \leq \frac{M}{\log n}$, we have $\frac{1}{1-x_n} \geq \frac{\log n}{M}$.

From (37) and the inequality above we get

$$a_n^{x_n} \cdot \frac{1}{e^{2M}} = a_n^{x_n} \cdot \left(\left(\frac{1}{e^{2M}} \right)^{\frac{1}{1-x_n}} \right)^{1-x_n} \leq x_n a_n + (1 - x_n) \left(\frac{1}{e^{2M}} \right)^{\frac{1}{1-x_n}} \leq$$

$$\leq x_n a_n + (1 - x_n) \left(\frac{1}{e^{2M}} \right)^{\frac{\log n}{M}} = x_n a_n + (1 - x_n) \frac{1}{e^{2 \log n}} =$$

$$= x_n a_n + (1 - x_n) \frac{1}{n^2} \leq a_n + \frac{1}{n^2}.$$

It follows that $a_n^{x_n} \leq e^{2M} \cdot a_n + \frac{e^{2M}}{n^2}$.

Case II: $x_n \geq 1$. Now it is clear that we have $a_n^{x_n} \leq a_n \leq e^{2M} \cdot a_n + \frac{e^{2M}}{n^2}$.

So we have proved that for any $n \geq n_0$ it holds

$$a_n^{x_n} \leq e^{2M} \cdot a_n + \frac{e^{2M}}{n^2}.$$

Since the series $\sum\limits_{n \geq 1} a_n$ and $\sum\limits_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ are convergent, this implies that $\sum\limits_{n \geq n_0} a_n^{x_n}$ is also convergent, and so is $\sum\limits_{n \geq 1} a_n^{x_n}$. $\square$