GAZETA MATEMATICĂ

SERIA A

ANUL XXVII(CVI) **Nr. 1 / 2009**

O introducere în teoria mecanismelor

Liviu Nicolaescu[1)]

Abstract. Given a region in the plane, we study the problem of finding a plane mechanism that one of its edges desing the given region. This can be done in many cases.

Keywords: Plane regions, Mechanisms.
MSC : 00A08, 51-01.

Introducere

Un mecanism plan este un sistem de bare rigide îmbinate la capete. Barele se pot roti în jurul capetelor, dar unele din capetele lor pot avea o pozitie fixă în plan. Spre deosebire de situaţia reală, permitem barelor să se intersecteze şi în interiorul lor. Să ne imaginăm că într-unul din capetele barelor fixăm un stilou perpendicular pe plan după care deformăm mecanismul în toate modurile posibile. Stiloul va trasa o regiune în plan.

În această lucrare dorim să investigăm problema inversă: dată fiind o regiune în plan, dorim să construim un mecanism plan astfel încât unul din vârfurile sale să traseze regiunea dată. Surprinzator, acest lucru este posibil pentru foarte multe regiuni, iar teorema de universalitate a lui *Kempe* descrie explicit care sunt aceste regiuni. Ele sunt regiunile semialgebrice, adică submulţimile din plan care pot fi descrise într-un număr finit de paşi folosind egalitaţi şi inegalitaţi polinomiale. Iată pe scurt organizarea lucrării.

În secţiunea 1 definim riguros noţiunea de mecanism plan şi analizăm câteva exemple fundamentale pentru a înţelege subtilităţile problemei. Secţiunea 2 este ceva mai abstractă. Introducem puţin din limbajul geometriei algebrice reale şi dăm o formulare riguroasă teoremei de universalitate. Deşi rezultatele menţionate în această secţiune nu sunt necesare înţelegerii ideilor de bază din demonstraţia teoremei de universalitate, am considerat că este foarte util să expunem cititorul unui mod de gândire modern. În secţiunea 3 formulăm o teorema de reprezentabilitate şi aratam că implică teorema

[1)] Department of Mathematics, University of Notre Dame, Notre Dame, IN 46556-4618; E-mail address: nicolaescu.l@nd.edu; URL: http://www.nd.edu/-lnicolae/

de universalitate. În secţiunea 4 demonstrăm teorema de reprezentabilitate. Surprinzător, demonstraţia foloseşte numai nişte idei elementare de geometrie euclidiană plană, teoria mulţimilor şi algebra numerelor complexe.

1. Mecanisme plane

Un *graf metric* este o pereche $\mathcal{M} = (G, \ell)$ unde G este un graf finit (fără muchii multiple şi fără muchii care pornesc şi se încheie în acelaşi vârf), iar ℓ este o funcţie de la mulţimea E de muchii a lui G la mulţimea numerelor reale positive, $\ell : E \to (0, \infty)$. Funcţia ℓ se numeşte *funcţia lungime* sau *metrica*. Vom nota cu $V = V_G$ mulţimea de vârfuri.

Deorece o muchie este unic determinată de captele sale, vom identifica E cu o submulţime simetrică a lui $V \times V$, i.e., $(v_0, v_1) \in E \Leftrightarrow (v_1, v_0) \in E$.

În cele ce urmează vom identifica planul euclidian cu planul compex $\mathbb{C}$.

O *realizare geometrică* a unui graf metric $\mathcal{M} = (G, \ell)$ este o funcţie $\zeta : V \to \mathbb{C}$ astfel încât

$$|\zeta(u) - \zeta(v)| = \ell(u, v), \quad \forall\, (u, v) \in E.$$

Un mecanism plan (*abstract*) este un quadruplu $\mathcal{M} = (G, \ell, V_f, \phi)$ unde:
- (G, ℓ) este un graf metric,
- V_f este o submulţime a lui V_G,
- $\phi : V_f \to \mathbb{C}$ este o funcţie cu proprietatea că pentru orice pereche de puncte $u, v \in V_f$ unite (printr-o muchie din E) are loc egalitatea

$$|\phi(u) - \phi(v)| = \ell(u, v).$$

Submulţimea V_f se numeşte submulţimea *punctelor fixe* ale mecanismului.

O *realizare geometrică* sau *configuraţie* a unui mecanism plan $\mathcal{M} = (G, \ell, V_f, \phi)$ este o realizare geometrică $\zeta : V \to \mathbb{C}$ a lui (G, ℓ) astfel încât $\zeta|_{V_f} = \phi$. Notăm cu $\mathcal{C}(\mathcal{M})$ mulţimea tuturor configuraţiilor posibile ale mecanismului $\mathcal{M}$. Mulţimea $\mathcal{C}(\mathcal{M})$ se mai numeşte şi *spaţiul de moduli* al mecanismului $\mathcal{M}$.

Putem gândi o configuraţie ca o mulţime de puncte din plan (corespunzătoare vârfurilor V) unite prin bare liniare rigide (corespunzătoare muchiilor E) şi de lungime prescrise de metrica ℓ. Aceste puncte se mai numesc şi *încheieturile* mecanismului. Barele se mai numesc şi *braţele* mecanismului. Ele se pot roti în jurul *încheieturilor*. Vârfurile din V_f se numesc *încheieturile fixe* ale mecanismului, iar încheieturile din $V \setminus V_f$ se numesc *încheieturile libere* sau *mobile*.

Punctele fixe sunt înţepenite în poziţiile lor iniţiale descrise de funcţia ϕ, dar punctele mobile se pot mişca în plan. Barele se pot intersecta şi în interior. Când reprezentăm grafic o configuraţie a unui mecanism folosim simbolul $\circ$ pentru a indica un vârf mobil şi simbolul $\bullet$ pentru a indica un vârf fix.

Exemplul 1. 1 (Braţ de robot). Să considerăm mecanismul din Figura 1 care constă din trei vârfuri a, b, c şi muchiile (a, b) şi (b, c). Vârful a este fix.

Vedem că locul geometric al vârfului b este un cerc cu centrul în a. De îndata ce fixăm poziţia lui b, vârful c mai are încă un grad de libertate: se poate roti pe un cerc cu centrul în vârful b. Cu alte cuvinte, pentru a determina o configuraţie a acestui mecanism trebuie mai întâi să precizăm poziţia lui b, şi apoi poziţia lui c relativ b. Prin urmare, spaţiul de configuraţii se poate identifica cu un produs cartezian de cercuri:

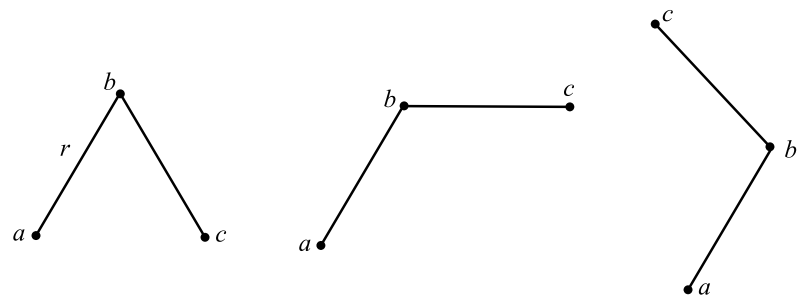


Fig. 1.1. Diferite configuraţii ale unui mecanism simplu

$$\mathcal{C} = \left\{ (z_b, z_c) \in \mathbb{C}^2; \quad |z_b| = \text{lungimea}(a, b), \quad |z_c| = \text{lungimea}(b, c) \right\}.$$

Un astfel de produs de două cercuri se numeşte tor de dimensiune 2. Îl putem vizualiza ca suprafaţa unei camere umflate de maşină.

Exemplul 1.2 (Paralelogramul cu o muchie fixa). Să considerăm un mecanism descris de muchiile unui dreptunghi $abcd$, în care vârfurile a şi d sunt fixe. În Figura 1.2 am descris diferite configuraţii ale acestui mecanism. Lungimile muchiilor (a, d) şi (a, b) sunt respectiv x şi y.

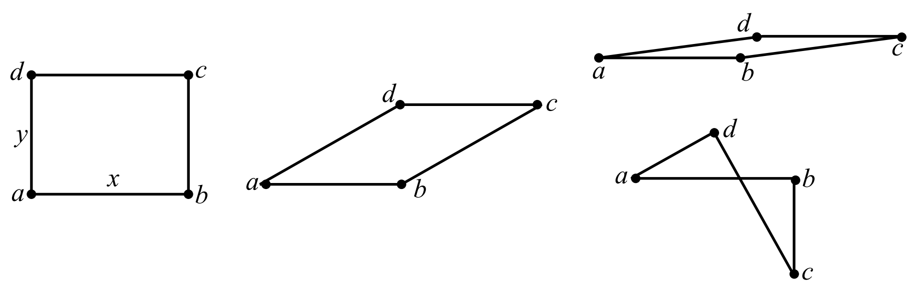


Fig. 1.2. Diferite configuraţii ale unui paralelogram.

Observăm un fenomen interesant. Ultima configuraţie arată foarte diferit de primele trei. Se numeşte *contraparalelogramul* şi nu se poate obţine din primele trei printr-o deformare continuă. Spaţiul de configuraţii $\mathcal{C}$ are două componente: o componentă $\mathcal{C}_+$ conţinând primele trei configuraţii din Figura 1.2 şi o componentă $\mathcal{C}_-$ conţinând contraparalelogramul.

Fiecare din aceste componente se poate identifica cu cercul descris de vârful mobil b. Cele două cercuri au două puncte în comun care corespund la configuraţii în care punctele a, b, c, d sunt colineare. Punctele de intersecţie sunt puncte *singulare* ale spaţiului de configuraţii.

Putem modifica acest mecanism încât spaţiul de configuraţii al noului mecanism este doar componenta $\mathcal{C}_+$. Noul mecanism se numeşte *rigidizarea paralelogramului* şi se obţine printr-un artificiu numit *adăugarea unei proteze*. Acest proces este descris în Figura 1.3:

Noul mecanism are două noi vârfuri u şi v, ambele mobile, care se află pe muchiile orizontale ale dreptunghiului din cauza modului în care am ales lungimile muchiilor protezei. Vedem că acest proces este echivalent cu

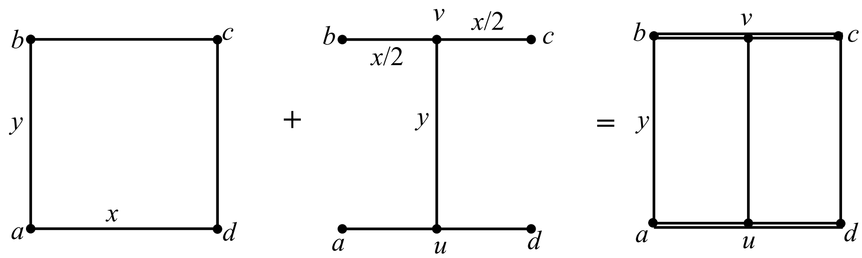


Fig. 1.3. Rigidizarea unui paralelogram prin adaugarea unei proteze.

adăugarea unei bare rigide de lungime y care uneşte mijloacele muchiilor verticale. Mijloacele devin încheieturi situate nu la capetele muchiilor, ci în interiorul lor. Noul braţ vertical se poate roti în jurul acestor încheieturi.

Exemplul 1.3. (Inversorul lui Peaucellier). Este o construcţie clasică de geometrie euclidiană familiară probabil multor cititori. Mecanismul plan cu acest nume este descris în Figura 1.4.

În aceasta figură, patrulaterul $PMQN$ este romb. Pentru a nu crea un contraromb îl rigidizăm cu ajutorul unei proteze ca în Exemplul 1.2. Obţinem în acest fel *inversorul lui Peaucellier rigidizat*. Punctul M se mişcă pe cercul de centru S şi rază r. În tratatul clasic de geometrie al lui *J. Hadamard* este arătat că punctul N se miscă pe o dreapta perpendiculară pe dreapta OS; vezi [4, Teorema 241]. Mai precis, N este inversul lui M prin inversiunea de centru O şi putere $|OP|^2 - |PM|^2$.

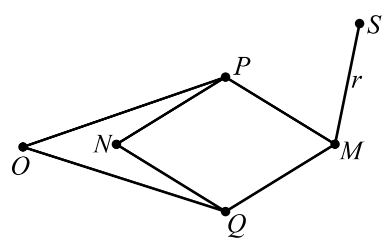


Fig. 1.4. Inversorul lui Peaucellier.

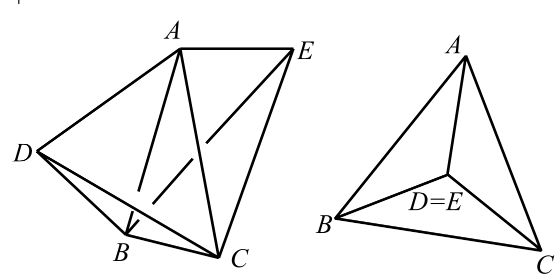


Fig. 1.5. Mecanismul canonic.

Deorece M se mişcă pe un cerc cu centrul în S, locul geometric al lui N este un segment de dreaptă.

Exemplul 1.4 (Mecanismul canonic). Să considerăm graful ilustrat în partea stângă a Figurii 1.5, unde metrica este dată de

$$\ell(A,B) = \ell(B,C) = \ell(C,A) = 1,$$

$$\ell(D,A) = \ell(E,A) = \ell(D,B) = \ell(E,B) = \ell(D,C) = \ell(E,C) = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Această metrică defineşte un mecanism abstract cu toate vârfurile libere, pe care-l numim mecanismul canonic. Orice configuraţie a acestui mecanism arată ca în partea dreaptă a Figurii 1.5, în care ABC este un triunghi echilateral, iar ambele vârfuri D şi E coincid cu baricentrul triunghiului.

Să presupunem că $\mathcal{M} = (G, \ell, V_f, \phi)$ este un mecanism plan cu mulţimea de vârfuri V. Fixăm un vârf $v \in V$. Pentru fiecare configuraţie $\zeta \in \mathcal{C}(\mathcal{M})$ obţinem un punct în plan $\zeta(v)$. Mulţimea

$$\mathcal{C}(M, v) := \{\zeta(v) \in \mathbb{C};\ \zeta \in \mathcal{C}(\mathcal{M})\}$$

se numeşte *urma* vârfului v a mecanismului $\mathcal{M}$. Dacă, de exemplu, plasăm un stilou în acest vârf, şi începem să mişcăm mecanismul în toate felurile posibile, atunci stiloul trasează o regiune în plan. Când vârful v este fix, urma lui constă dintr-un singur punct, $\phi(v)$.

În Exemplul 1.1 urma vârfului b este un cerc cu centrul în a. În Exemplul 1.3 urma vârfului N conţine un segment de dreaptă. În Exemplul 1.4 urma vârfului D este întreg planul.

În acestă lucrare dorim să adresăm următoarea întrebare:

Care mulţimi plane sunt urme ale unui vârf liber al unui mecanism?

Răspunsul surprinzător la această întrebare este conţinut în teorema de universalitate a lui Kempe. Folosind un limbaj familiar unui cititor din secolul 21, putem oferi o primă formulare a acestei teoreme: orice mulţime plană care se poate vizualiza pe un ecran de calculator este urma unui vârf liber al unui mecanism. Matematicianul american *Bill Thurston* a formulat teorema acesta în termeni şi mai concreţi: pentru orice semnătura se poate găsi un mecanism care să o traseze.

Formularea precisă a teoremei necesită puţină terminologie din geometria algebrică reală pe care o vom introduce în secţiune a următoare.

2. Puţină geometrie semialgebrică

Definiţia 2.1. Numim *mulţime algebrică* (*reală*) o submulţime a unui spaţiu euclidian $\mathbb{R}^n$ descrisă de un sistem de ecuaţii polinomiale în n variabile. Mai exact, o submulţime S a unui spaţiu euclidian $\mathbb{R}^n$ se numeşte algebrică dacă există polinoame $P_1, \ldots, P_v \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ astfel încât:

$$S = \{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n;\ P_1(\overrightarrow{x}) = \ldots = P_v(\overrightarrow{x}) = 0\}.$$

Exemplul 2.2 (a) Un plan în spaţiu este o mulţime algebrică. De asemenea, un cerc în plan sau o sferă în spaţiu sunt mulţimi algebrice.

(b) Orice intersecţie finita[1)] de mulţimi algebrice în $\mathbb{R}^n$ este o mulţime algebrică în $\mathbb{R}^n$. În particular, o dreaptă în spaţiu este o mulţime algebrică deorece este intersecţie de plane.

(c) Dacă S este o submulţime algebrică a lui $\mathbb{R}^n$ descrisă de ecuaţiile

$$P_1(x_1, \ldots, x_n) = \ldots = P_v(x_1, \ldots, x_n) = 0,\ P_1, \ldots, P_v \in \mathbb{R}\left[x_1, \ldots, x_n\right],$$

atunci S poate fi privită şi ca submulţime algebrică a spaţiului euclidian $\mathbb{R}^{n+1}$ descrisă de ecuaţiile

$$x_{n+1} = P_1\left(x_1, \ldots . x_n\right) = \ldots = P_v(x_1, \ldots, x_n) = 0,\ P_1, \ldots, P_v \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n].$$

Din acest motiv, putem fi ceva mai vagi în a preciza spaţiul euclidian ambiant al unei mulţimi algebrice.

Definiţia 2.3. O aplicaţie $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ descrisă de

$$\mathbb{R}^m :\ni (u_1, \ldots, u_m) \to \left(v_1\left(u_1, \ldots, u_m\right), \ldots, v_n\left(u_1, \ldots, u_m\right)\right) \in \mathbb{R}^n$$

se numeşte o *aplicaţie polinomială reală* dacă fiecare din componentele $v_k(u_1, \ldots, u_m)$ este polinom cu coeficienţi reali în variabilele $(u_1, \ldots, u_m)$.

Convenţie. În cele ce urmează vom identifica spaţiul euclidian complex $\mathbb{C}^n$ cu spaţiul euclidian real $\mathbb{R}^{2n}$ în felul următor: Punctul $\overrightarrow{z} = (z_1, \ldots, z_n) \in$ $\in \mathbb{C}^n$ îl identificăm cu punctul $(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n) \in \mathbb{R}^{2n}$, unde

$$z_k = x_k + \mathrm{i} y_k, \quad \mathrm{i} = \sqrt{-1}, \quad \forall\, k = \{1, \ldots, n),$$

Să observăm că inelul de polinoame $\mathbb{R}\left[x_j, y_k;\ 1 \leq j,\ k \leq n\right]$ se poate identifica cu un subinel al inelului de polinoame cu coeficienţi complecşi în variabile z_j, $\overrightarrow{z}_k$, $1 \leq j,\ k \leq n$.

Conform Exemplului 2.2 (c), orice mulţime algebrică reală poate fi gândită ca o submulţime algebrică reală a unui spaţiu $\mathbb{C}^n$ identificat ca mai sus cu spaţiul real $\mathbb{R}^{2n}$. Lăsăm în grija cititorului demonstraţia următorului rezultat:

Propoziţia 2.4. *Dacă $S \subset \mathbb{C}^n$ este o submulţime algebrică reală atunci există o aplicaţie polinomială reală $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ astfel încât $S = F^{-1}(0)$. Mai mult, putem alege aplicaţia F încât $m = 1$.*

Propoziţia 2.5. *Spaţiul de configuraţii al unui mecanism $\mathcal{M} =$ $= (G, \ell, V_f, \phi)$ se poate identifica natural cu o mulţime algebrică reală.*

Demonstraţie. Să presupunem că mulţimea de vârfuri a lui $\mathcal{M}$ este $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Notăm cu E mulţimea de muchii a lui G.

Putem identifica orice configuraţie $\zeta \in \mathcal{C}(\mathcal{M})$ cu un punct $(z_1, \ldots, z_n) \in$ $\in \mathbb{C}^n$, unde $z_k = \zeta(v_k)$, pentru orice $k = 1, \ldots, n$. Pentru fiecare muchie $e = (v_j, v_k)$ a lui G notăm cu P_e polinomul:

$$P_e = (z_j - z_k)\,(\overrightarrow{z}_j - \overrightarrow{z}_k) - \ell(e)^2 =$$

[1)]Folosind teorema bazei lui Hilbert se poate arată că orice intersecţie, finită sau infinită, de submulţimi algebrice este o submulţime algebrică. (N.A.)

$$= |z_j - z_k|^2 - \ell(e)^2 \in \mathbb{R}\Big[\underbrace{x_1, \dots, x_n}_{=\overrightarrow{x}}, \underbrace{y_1, \dots, y_n}_{=\overrightarrow{y}}\Big].$$

Atunci $\mathcal{C}(\mathcal{M})$ se poate identifica cu mulţimea zerourilor comune polinoamelor P_e, $e \in E$.

Definiţia 2.6. O mulţime semialgebrică este o submulţime S a unui spaţiu euclidian $\mathbb{R}^n$ care se poate scrie ca o reuniune finită $S = S_\cup \ldots \cup S_v$, unde fiecare din mulţimile S_j este descrisă de un sistem finit de inecuaţii polinomiale.

Exemplul 2.7. (a) Orice mulţime algebrică este semialgebrică. Într-adevăr, dacă $S \in \mathbb{R}^n$ este descrisă de ecuaţiile

$$P_1(\overrightarrow{x}) = \ldots = P_v(\overrightarrow{x}) = 0, P_i \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n],$$

atunci se poate descrie şi de sistemul de inecuaţii

$$P_1(\overrightarrow{x}) \geq 0, \quad P_i(\overrightarrow{x}) \leq 0, \quad \forall\, i = 1, \dots, n.$$

(b) Un semispaţiu, sau un semiplan sunt mulţimi semialgebrice. De asemenea, discul închis de rază 1 cu centrul într-un punct (x_0, y_0) din plan este submulţime semialgebrică întrucât este descris de inecuaţia polinomială

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq 1.$$

(c) Orice reuniune sau intersecţie finită de submulţimi semialgebrice ale lui $\mathbb{R}^n$ este o submulţime semialgebrică.

(d) Complementul unei submulţimi algebrice a lui $\mathbb{R}^n$ este o submulţime algebrică a lui $\mathbb{R}^n$.

(e) Mulţimea Cantor de pe axa reală nu este semi-algebrică. În general, o mulţime care necesită o infinitate de paşi pentru a o descrie are o şansă foarte mică să fie semialgebrică.

Exerciţiul 2.8. Demonstraţi afirmaţiile (c) şi (d) din Exemplul 2.7.

Următorul rezultat este foarte profund şi ne permite construcţia multor exemple netriviale de mulţimi semialgebrice.

Teorema 2.9 (Tarski-Seidenberg). *Dacă $S \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ este submulţime semialgebrică, iar π este proiecţia canonică, $\pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, atunci $\pi(S)$ este o submulţime semialgebrică.*

Demonstraţia aceste teoremei este elementară, dar foarte delicată. Pentru detalii şi mai multe informaţii despre mulţimile semialgebrice trimitem la cursul [2] care se poate găsi şi pe Internet.

Observaţia 2.10. Teorema lui Tarski şi Seidenberg este cunoscută în literatura matematică şi sub numele *de teorema de eliminare a cuantificatorilor*. Să explicăm raţiunea din spatele acestei terminologii.

Mulţimea $\pi(S)$ se poate descrie cu ajutorul cuantificatorului existenţial $\exists$ în felul următor:

$$\pi(S) = \{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n;\ \exists\, \overrightarrow{y} \in S\}.$$

Teorema lui Tarski-Seidenberg ne spune că există o colectie $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_v$ de submulţimi finite de polinoame în variabilele $\overrightarrow{x}$ astfel încât

$$\pi(S) = \bigcup_{k=1}^{v} \underbrace{\left(\bigcap_{P \in \mathcal{P}_k} \{ \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n; \quad P(\overrightarrow{x}) \geq 0 \} \right)}_{A_k} = \bigcup_{k=1}^{v} A_k.$$

Descrierea de mai sus nu utilizeaza nici un cuantificator, de unde şi numele de *eliminarea cuantificatorilor*.

Pentru a aprecia puterea acestei teoreme, considerăm spaţiul euclidian $\mathbb{R}^{n+1}$ în care coordonatele sunt notate cu $(c_0, \ldots, c_{n-1}, x)$. Pentru simplitate notăm $\overrightarrow{c} := (c_0, \ldots, c_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$. şi definim:

$$P_{\overrightarrow{c}}(x) := c_0 + c_1 x + \ldots + c_{n-1} x^{n-1} + x^n \in \mathbb{R}[x].$$

Să consideram mulţimea algebrică

$$Z = \left\{ \overrightarrow{c}, x \in \mathbb{R}^{n+1};\ c_0 + c_1 x + \ldots + c_{n-1} x^{n-1} + x_n = 0 \right\} =$$
$$= \left\{ \overrightarrow{c}, x \in \mathbb{R}^{n+1};\ P_{\overrightarrow{c}}(x) = 0 \right\}.$$

Dacă $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ este proiecţia canonică $(\overrightarrow{c}, x) \to \overrightarrow{c}$, atunci $\pi(Z)$ se poate indentifica cu mulţimea polinoamelor de grad n cu coeficienţi reali care au cel puţin o rădăcină reală,

$$\pi(Z) = \{ \overrightarrow{c} \in \mathbb{R}^n;\ \exists\, x \in \mathbb{R} :\ P_{\overrightarrow{c}}(x) = 0 \}.$$

Teorema Tarski-Seidenberg ne spune că $\pi(Z)$ este submulţime semialgebrică şi deci se poate scrie ca o reuniune finită $Z = Z_1 \cup \ldots \cup Z_v$, unde fiecare din mulţimile Z_k constă din soluţiile unui sistem finit de inecuaţii polinomiale în n variable.

Cu alte cuvinte, pentru a decide dacă un polinom de grad n cu coeficienţi reali $\overrightarrow{c}$ are o rădăcină reală este suficient să arătăm că vectorul coeficienţilor $\overrightarrow{c}$ este soluţie a unuia din sistemele polinomiale care definesc mulţimile Z_k.

Din cauza teoremei Tarski-Seidenberg, geometria semialgebrică are o legătură strânsă cu logica matematică[1)]. Matematicienii descriu diferitele mulţimi folosind operatorii logici $\vee$ (= SAU), $\wedge$ (=ŞI) , $\neg$ (= NEGAŢIE) precum şi cuantificatorii $\exists$ şi $\forall$. Operatorii logici $\vee$, $\wedge$, $-$, corespund operaţiilor booleene de reuniune, intersecţie şi complement. După cum am văzut, cuantificatorul $\exists$ se traduce în teoria mulţimilor prin construcţia imaginii unei mulţimi dintr-un produs cartezian via una din proiecţiile canonice ale produsului. De exemplu, dacă $S \subset A \times B$, atunci mulţimea

$$\{x \in A;\ \exists\, y \in B;\ (x, y) \in S\}$$

coincide cu $\pi_A(S)$, unde $\pi_A : A \times B \to \pi_A$ este proiecţia canonică, $(a, b) \to a$.

1) *Alfred Tarski*, unul din autorii acestei teoreme, a fost unul din cei mai iluştri logicieni ai secolului 20. (N.A.)

Cuantificatorul $\forall$ se poate exprima folosind cuantificatorul $\exists$ şi operatorul negaţie. Să consideram de exemplu mulţimea

$$M = x \in A;\ \forall\, y \in B,\ (x, y) \in S.$$

Un logician ar spune că mulţimea M este definită de formula

$$x \in A:\ \forall\, y \in B,\ (x, y) \in S,$$

adică M constă din acei x pentru care formula de mai sus este adevarată. Atunci

$$A \setminus M = \{x \in A:\ \exists\, y \in B,\ (x, y) \in (A \times B) \setminus S\} = \pi_A\left((A \times B) \setminus S\right)$$

şi deci

$$M = A \setminus \pi_A\left((A \times B) \setminus S\right).$$

Putem descrie M prin următoarea formulă :

$$x \in A : \neg(\exists\, y \in B, \neg\left((x, y) \in (A \times B)\right).$$

Din observaţiile de mai sus deducem următorul principiu extrem de folositor:

Orice formula în care apar doar operatorii $\vee$, $\wedge$, $\neg$, cuantificatorii $\exists$, $\forall$ şi mulţimi semialgebrice defineşte o submulţime semialgebrică.

Iată o simplă aplicaţie a acestui principiu. Să consideram o mulţime semialgebrică $S \subset \mathbb{R}^n$. Atunci mulţimea

$$xi\mathbb{R}^n:\ \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, s \in S:\ |x - s|^2 < \varepsilon^2 \tag{2.1}$$

este o mulţime semialgebrică deoarece mulţimile $\{\varepsilon > 0\}$ şi

$$\left\{(x, s, \varepsilon) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R};\quad |x - s|^2 < \varepsilon^2\right\}$$

sunt semialgebrice. Pe de altă parte, este clar că mulţimea din (2.1) este tocmai închiderea lui S. Deducem că dacă S este submulţime semialgebrică, atunci şi închiderea ei este semialgebrică.

Să reamintim o notaţie din teoria mulţimilor. Dacă A şi B sunt două mulţimi, atunci B^A este mulţimea de funcţii $A \to B$. De exemplu, dacă avem o mulţime $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ atunci $\mathbb{C}^v = \mathbb{C}^n$.

Să presupunem că $\mathcal{M} = (G, \ell, V_f, \phi)$ este un mecanism plan cu mulţimea de vârfuri V. Atunci spaţiul de configuraţii $\mathcal{C}(\mathcal{M})$ este o submulţime algebrică în spaţiul euclidian $\mathbb{C}^v$. Să observăm că pentru orice vârf $v \in V$ avem o proiecţie canonică $\pi_v : \mathbb{C}^V \to \mathbb{C}$ dată de

$$\mathbb{C}^V \ni \zeta \mapsto \pi_v(\zeta) := \zeta(v) \in \mathbb{C}.$$

Observăm că urma unui vârf v se poate descrie prin egalitatea $\mathcal{C}(\mathcal{M}, v) = \pi_v\left(\mathcal{C}(\mathcal{M})\right)$. Folosind teorema Tarski-Seidenberg, deducem următorul rezultat:

Corolarul 2.11. *Urma unui vârf liber a unui mecanism este o submulţime semialgebrică a planului.*

Putem acum oferi un enunţ mult mai precis al teoremei de universalitate.

Teorema 2.12 (de universalitate a lui Kempe). *Orice submulţime compactă*[1] *semialgebrică este urma unui vârf liber al unui mecanism plan.*

Observaţia 2.13. (a) Formularea de mai sus este doar un caz special al teoremei de universalitate. Pentru o versiune mai generală trimitem la lucrarea [8]. Acolo sunt descrise toate mulţimile semialgebrice din plan, compacte sau necompacte, care pot fi trasate cu ajutorul unui mecanism plan.

(b) Imaginile pe un ecran de calculator sunt reuniuni finite de pixeli. Un pixel este un pătrăţel foarte mic pe suprafaţa ecranului. Orice poligon convex este mulţime semialgebrică întrucât este intersecţie de semiplane. Prin urmare, un pixel este o mulţime semialgebrică compactă şi deci orice regiune care se poate vizualiza pe un calculator este compactă.

Pentru a înţelege formularea lui *Thurston* a acestei teoreme să observăm mai întâi că orice curbă compactă din plan care este reuniune finită de arcuri parametrizate de polinoame este o submulţime semialgebrică. Astfel de curbe, numite *spline* în analiza numerică, sunt folosite pentru a aproxima curbe arbitrare în plan. În particular, putem găsi aproximări spline arbitrar de precise pentru curba în plan descrisă de semnătura unei persoane. Aproximarea poate fi mai precisă decât rezoluţia celui mai fin microscop. Din teorema de universalitate deducem că pentru orice curbă descrisă de semnătura unei persoane pe o foaie de hârtie putem găsi un mecanism care să traseze o aproximare a ei capabilă să inducă în eroare cel mai performant microscop.

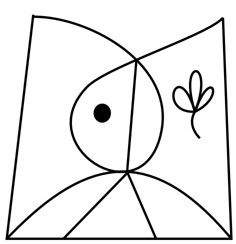


Fig. 2.1. Mâzgâleală semialgebrică.

Orice curbă sau regiune plană care se poate produce cu un software de grafică este o curbă spline sau o regiune delimitată de curbe spline şi în particular, este o curbă semialgebrică compactă. Mâzgâleala din figura de mai jos a fost produsă cu un astfel de software (Adobe Illustrator), şi prin urmare, este o submulţime semialgebrică compactă plană. Teorema de universalitate spune că există un mecanism astfel încât un vârf al său traseează imaginea din Figura 2.1.

1) Pentru cititorul nefamiliarizat cu noţiunea de compactitate, iată-i definiţia: O submulţime $S \subset \mathbb{R}^n$ se numeşte *compactă* dacă este *mărginită* (adică este conţinută într-o bilă de rază suficient de mare) şi *închisă* (dacă limita oricărui şir de puncte din S este de asemenea un punct din S).(N. A.)

(c) Teorema de universalitate are o istorie interesantă. A fost formulată şi demonstrată pentru prima data de *A. Kempe*[1)] în 1876, [6].

Deşi principiul foarte ingenios de demonstraţie şi ideile de bază erau corecte, demonstraţia avea o eroare. În termeni abstracţi, el a neglijat să considere rolul singularităţilor în spaţiul de configuraţii al unui mecanism. În termeni concreţi, el a neglijat să considere rolul unor configuraţii de genul contraparalelogramului descris în Exemplul 1.2.

Demonstraţia a fost reparată mai bine de un secol mai târziu de matematicienii *M. Kapovich* şi *J. Millson* în lucrarea [5]. Demonstraţia lor se bazează pe acelaşi principiu ca şi *Kempe*, dar paşii intermediari au fost modificaţi substanţial folosind puncte de vedere şi rezultate moderne de geometrie. În această lucrare ei demonstrează rezultate mult mai generale, dar enunţurile lor sunt mult prea sofisticate pentru a le include aici.

În 2005, doi tineri studenţi americani *T. Abbot* şi *R. Barton*, au reabilitat demonstraţia lui *Kempe* în teza lor de Master de la Massachusets Institute of Technology [1].

(d) Probabil că cititorul este curios să afle cât de complicat este de construit concret un mecanism care să traseze o curbă plană dată. Metoda de demonstraţie este constructivă, dar conduce la mecanisme extrem de complexe. *T. Abbot* şi *R. Barton* (care sunt informaticieni) au estimat în [1] această complexitate. Pentru mai multe informaţii privind această teoremă trimitem la recenta monografie [3].

În secţiunea care urmează dorim să schiţăm demonstraţia lui *Kapovich* şi *Millson* a teoremei de universalitate.

3. Reprezentarea aplicaţiilor polinomiale cu ajutorul mecanismelor

Să explicăm, în reformularea modernă a lui *Kapovich* şi *Millson*, tehnica de bază propusă de *Kempe*. Fie $\mathbb{M} = (G, \ell, V_f, \phi)$ un mecanism plan abstract. Ca de obicei, notăm cu V mulţimea de vârfuri. Să presupunem că $\mathbb{I}$, $\mathbb{O}$ sunt submulţimi ale lui V. Mulţimea $\mathbb{I}$ este mulţimea de inputuri, iar $\mathbb{O}$ este mulţimea de outputuri. Mulţimile $\mathbb{I}$ şi $\mathbb{O}$ pot avea vârfuri în comun. Să observăm că avem nişte proiecţii canonice

$$\pi_{\mathbb{I}} : \mathbb{C}^V \to \mathbb{C}^{\mathbb{I}}, \quad \mathbb{C}^V \ni \zeta \to \zeta|_{\mathbb{I}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{I}}.$$

Reamintim că în egalitatea de mai sus privim ζ ca o funcţie $\zeta : V \to \mathbb{C}$. Atunci $\zeta|_{\mathbb{I}}$ este restricţia ei la submulţimea $\mathbb{I}$. În mod similar definim o proiecţie canonică $\pi_{\mathbb{O}} : \mathbb{C}^V \to \mathbb{C}^{\mathbb{O}}$. Spaţiul de configuraţii $\mathcal{C}(\mathcal{M})$ este, după

[1)] El a fost avocat de profesie, dar mare amator de matematică. Printre altele, a dat şi o demonstraţie (incompletă) a problemei celor patru culori. În pofida erorii, ideile lui s-au dovedit a fi fundamentale. Demonstraţia din 1976 a acestei teoreme cu ajutorul calculatorului se bazează pe ideile propuse de *Kempe*. (N. A.)

cum ştim, o submulţime algebrică reală a lui $\mathbb{C}^V$. Definim

$$D(\mathcal{M}, \mathbb{I}) := \pi_{\mathbb{I}}(\mathcal{C}(\mathcal{M})) \subset \mathbb{C}^{\mathbb{I}}.$$

Numim această mulţime *domeniul* tripletului $(\mathcal{M}, \mathbb{I}, \mathbb{O})$. Din teorema Tarski-Seidenberg deducem că domeniul este o mulţime semialgebrică.

Fie $F : D(F) \subset \mathbb{C}^{\mathbb{I}} \to \mathbb{C}^{\mathbb{O}}$ o aplicaţie definită pe o submultime $D(F)$ a lui $\mathbb{C}^{\mathbb{I}}$. Spunem că tripletul $(\mathcal{M}, \mathbb{I}, \mathbb{O})$ *reprezintă aplicaţia* F dacă domeniul $D(\mathcal{M}, \mathbb{I})$ este conţinut în domeniul $D(F)$ al aplicaţiei F şi în plus

$$\pi_{\mathbb{O}} = F\left(\pi_{\mathbb{I}}(\zeta)\right), \quad \forall\, \zeta \in \mathcal{C}(\mathcal{M}),$$

În limbaj moderm, egalitatea de mai sus spune că diagrama de mai jos este comutativă.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{C}(\mathcal{M}) \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_0"] & \\
D(F) \arrow[rr, "F"'] & & \mathbb{C}^{\mathbb{O}}
\end{tikzcd}$$

Să observăm că dacă $(\mathcal{M}, \mathbb{I}, \mathbb{O})$ reprezintă F, atunci pentru fiecare punct $\overrightarrow{z} \in D(\mathbb{M}, I)$ pot exista mai multe configuraţii $\zeta \in \mathcal{C}(\mathcal{M})$ astfel încât $\zeta|_{\mathbb{I}} = z$. Toate aceste configuraţii au însă proprietatea că poziţia outputului $\zeta|_{\mathbb{O}}$ este unic determinată. Mai precis, dacă inputul $\zeta|_{\mathbb{I}}$ este punctul $\overrightarrow{z} \in \mathbb{C}^{\mathbb{I}}$, atunci output-ul $\zeta|_{\mathbb{O}}$ este punctul $F(\overrightarrow{z}) \in \mathbb{C}^{\mathbb{O}}$. Cu alte cuvinte, poziţia vârfurilor input determină unic poziţia vârfurilor output, deşi poate exista o multitudine de configuraţii pentru cu aceleaşi vârfuri input şi output.

Exemplul 3.1. (a) Să considerăm mecanismul canonic $\mathcal{M}_{can}$ definit în Exemplul 1.4. Definim $\mathbb{I} = \{D\}$ şi $\mathbb{O} = \{E\}$. Este clar că $(\mathcal{M}_{can}, \mathbb{I}, \mathbb{O})$ reprezintă aplicaţia identitate $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

(b) Să notăm cu $\mathcal{M}$ inversorul lui Peaucellier rigidizat[1)] în care vârful S este liber; vezi Figura 3.1. Am introdus vârful F pentru a elimina unele degenerări. În Figura 3.1 avem $c < b < a$

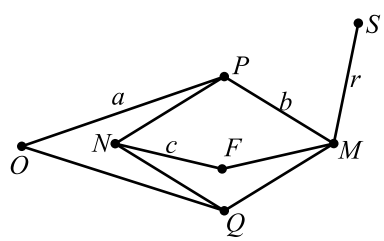


Fig. 3.1. Inversorul lui Peaucellier cu vârful S liber.

[1)] Reamintim că rigidizarea revine la adăugarea unei proteze rombului $MPNQ$. Pentru simplitate, nu am mai înclus proteza în Figura 3.1. (N.A.)

Dacă definim $\mathbb{I} = \{M\}$ şi $(\mathbb{O}) = \{N\}$, atunci tripletul $(\mathcal{M}, \mathbb{I}, \mathbb{O})$ reprezintă restricţia la coroana circulară

$$\sqrt{a^2 - b^2 + c^2} - c \leq |z - O| \leq \sqrt{a^2 - b^2 + c^2} + c$$

a transformării prin inversiune de centru O şi de putere $a^2 - b^2$; vezi [1, Teorema 241].

(c) Să considerăm din nou braţul de robot din Exemplul 1.1, Figura 1.1. Notăm cu $\mathcal{B}$ acest mecanism plan şi definim $\mathbb{I} = \{c\}$, $\mathbb{O} = \{a\}$. Domeniul tripletului $(\mathcal{B}, \mathbb{I}, \mathbb{O})$ este discul $D(a, 2r)$ de rază $2r$ centrat în punctul a. Acest triplet reprezintă funcţia constantă $F : D(a, 2r) \to \mathbb{C}$, $z \mapsto a$.

Înainte de a introduce următorul concept cheie datorat lui *Kapovich* şi *Millson* trebuie să mai facem câteva observaţii elementare. Să observăm că orice bijecţie $\alpha : A \to B$ induce un izomorfism liniar

$$\alpha^* : \mathbb{C}^B \to \mathbb{C}^A$$

care asociază functiei $\zeta : B \to \mathbb{C}$ funcţia $\alpha^*(\zeta) = \zeta \circ \alpha : A \to \mathbb{C}$. Astfel, dacă notăm cu $[n]$ multimea $\{1, 2, \ldots, n\}$, atunci spaţiul $\mathbb{C}^{[n]}$ se identifică natural cu spaţiul $\mathbb{C}^n$, iar orice bijecţie $\alpha : [n] \to I$ induce un izomorfism $\alpha^* : \mathbb{C}^I \to \mathbb{C}^n$.

Definiţia 3.2. Fie $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ o funcţie polinomială reală. Spunem că F este *reprezentabilă prin mecanisme plane* dacă pentru orice rază $R > 0$, oricât de mare, există un mecanism

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_R = (G, \ell, V_f, \phi)$$

cu mulţimea de vârfuri $V = V_R$, submulţimi $\mathbb{I}, \mathbb{O} \subset V$ şi bijecţii $\alpha : [n] \to \mathbb{I}$, $\beta : [m] \to \mathbb{O}$ astfel încât au loc următoarele condiţii:

(a) $\mathbb{I} \cap \mathbb{O} = \emptyset$.

(b) Domeniul $D(\mathcal{M}, \mathbb{I})$ conţine bila de rază R în $\mathbb{C}^2$ cu centrul în origine.

(c) Tripletul $(\mathcal{M}, \mathbb{I}, \mathbb{O})$ reprezintă funcţia polinomială $(\beta*)^{-1} \circ F \circ \alpha^* : \mathbb{C}^{\mathbb{I}} \to \mathbb{C}^{\mathbb{O}}$, adică diagrama alăturată este comutativă.

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{C}(\mathcal{M}) \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_0"] & \\ \mathbb{C}^{\mathbb{I}} \arrow[d, "\alpha^*"'] & & \mathbb{C}^{\mathbb{O}} \arrow[d, "\beta^*"] \\ \mathbb{C}^n \arrow[rr, "F"'] & & \mathbb{C}^m \end{tikzcd}$$

Exemplul 3.3. Să considerăm aplicaţia polinomială $F : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, $F(z, w) = \dfrac{1}{2}(z, w)$. Aceasta se poate reprezenta cu ajutorul unor mecanisme numite *pantografe*; vezi Figura 3.2.

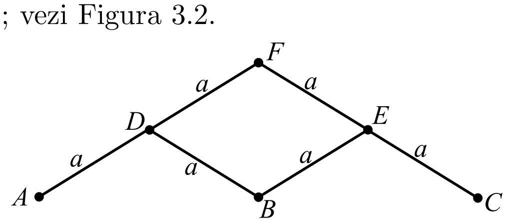


Fig. 3.2. Pantograf.

Să notăm cu $\mathcal{P}$ acest mecanism. Rombul $CDFE$ este rigidizat, dar pentru simplitate nu am inclus proteza. În Figura 3.2 am notat cu $z \in \mathbb{C}$ coordonata complexă a lui A, şi cu $w \in \mathbb{C}$ coordonata complexă a lui B. Atunci coordonata complexă a lui C este $\frac{1}{2}(z+w)$ deoarece punctul C este mijlocul segmentului $[AB]$. Observăm că $|z-w| \leq 4a$. Definim $\mathbb{I} = \{A, B\}$ şi $\mathbb{O} = \{C\}$. Atunci tripletul $(\mathcal{P}, \mathbb{I}, \mathbb{O})$ are domeniul:

$$D(\mathcal{P}, \mathbb{I}) = \left\{(z, w) \in \mathbb{C}^2;\ |z-w| \leq 4a\right\}.$$

Acest domeniu conţine bila din $\mathbb{C}^2$ cu centrul în origine şi de diametru $4a$,

$$\left\{(z, w) \in \mathbb{C}^2; |z|^2 + |w|^2 \leq 4a^2\right\}.$$

Variind lungimea a deducem că această familie de pantografe reprezintă funcţia F.

Are loc următorul rezultat fundamental care generalizează Exemplul 3.3.

Teorema 3.4. (De reprezentabilitate a lui Kapovich-Millson). *Orice aplicaţie polinomială reală $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ este reprezentabilă prin mecanisme plane.*

Înainte de a schiţa demonstraţia acestei teoreme dorim să arătăm cum putem deduce din ea teorema de universalitate.

Demonstraţia teoremei de universalitate. Urmăm strategia din [8]. În demonstraţie avem nevoie de următorul rezultat de geometrte semialgebrică.

Lema 3.5. *Fie $S \subset \mathbb{R}^m$ o mulţime semialgebrică compactă. Atunci există o mulţime algebrică compactă $A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ astfel încât $S = \pi(A)$, unde $\pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ este proiecţia canonică.*

Demonstraţia nu este lungă, dar foloseşte rezultate delicate de geometrie algebrică reală şi de aceea nu o includem. Dificultatea constă în a găsi o mulţime algebrică *compactă* A astfel încât $\pi(A) = S$. Se pot găsi foarte uşor mulţimi algebrice necompacte A astfel încât $\pi(A) = S$. Cititorul interesat poate consulta [8, Lemma 3.1].

Să considerăm o mulţime semialgebrică compactă S din planul euclidian $\mathbb{C}$. Folosind lema de mai sus putem găsi o submulţime algebrică reală compactă $A \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$ astfel încât $S = \pi(A)$, unde $\pi : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ este proiecţia canonică

$$(z_1, \ldots, z_{n+1}) \mapsto z_{n+1}. \tag{3.1}$$

Folosind Propoziţia 2.4 deducem că există o aplicaţie polinomială reală $p : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$ astfel încât $A = p^{-1}(0)$. Deoarece A este compactă,[1)] este inclusă intr-o bilă B_R de rază R cu centrul în $O \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$. Din teorema Kapovich-

[1)] Aici avem nevoie de compacitatea lui S. Dacă S nu este compact a, atunci A nu poate fi compactă. (N.A.)

Millson deducem că aplicaţia p este reprezentabilă prin mecanisme. Prin urmare, putem găsi un mecanism $\mathcal{M} = (G, i, V_f, \phi)$, sub mulţimi disjuncte $\mathbb{I}, \mathbb{O} \subset V$, o bijecţie $[n+1] \xrightarrow{\alpha} \mathbb{I}$ astfel încât:

• mulţimea $\mathbb{O}$ are cardinal $\mathbb{I}$, $\mathbb{O} = \{v_0\}$,

• imaginea lui $D(\mathcal{M}, \mathbb{I})$ prin izomorfismul $\alpha^* : \mathbb{C}^{\mathbb{I}} \to \mathbb{C}^{n+1}$ conţine mulţimea algebrică compactă $A, \alpha^*(D(\mathcal{M}, \mathbb{I})) \supset A$,

• tripletul $(\mathcal{M}, \mathbb{I}, \mathbb{O})$ reprezintă aplicaţia $\mathbb{C}^{\mathbb{I}} \xrightarrow{\alpha^*} \mathbb{C}^{n+1} \xrightarrow{p} \mathbb{C} = \mathbb{C}^{\mathbb{O}}$.

Definim acum un nou mecanism $\mathcal{M}'$ fixând vârful v_0 din $\mathbb{O}$ în originea planului complex. Mai precis

$$\mathcal{M}' = (G, \ell, V_j', \phi'), \quad V_f' = V_f \cup \{v_0\}, \quad \phi'(v) = \begin{cases} \phi(v), & v \in V_f \\ 0, & v = v_0. \end{cases}$$

Atunci $\alpha^*(\mathcal{C}(\mathcal{M}')) = A$. Să notăm cu v vârful $\alpha(n+1)$. Atunci urma $\mathcal{C}(\mathcal{M}', v)$ a vârfului v al mecanismului $\mathcal{M}'$ coincide cu imaginea lui A prin proiecţia π descrisă de (3.1). Această imagine este, prin construcţie, mulţimea semialgebrică compactă $S \subset \mathbb{C}$.

4. Demonstraţia teoremei de reprezentabilitate

Principiul de demonstraţie datorat lui *Kempe* este simplu: reducem problema reprezentabilităţii la o clasă de aplicaţii polinomiale mai simple care generează prin operaţii elementare (adunare, înmulţire, compunere etc.) întreaga familie de aplicaţii polinomiale.

Să considerăm două aplicaţii polinomiale $F_0 : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^{m_0}$ şi $F_1 : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^{m_1}$. Atunci avem o nouă aplicaţie polinomială $F_0 \times F_1 : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^{m_0} \times \mathbb{C}^{m_1}$. Dacă restricţia lui F_j, $j = 0, 1$, la o bilă B a spaţiului $\mathbb{C}^n$ este reprezentabilă printr-un triplet $(\mathcal{M}_j, \mathbb{I}_j, \mathbb{O}_j)$ şi bijecţii

$$\alpha_j : [n] \to \mathbb{I}_j, \qquad \beta_j : [m_j] \to \mathbb{O}_j,$$

atunci putem forma un nou mecanism $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 \times \mathcal{M}_1$ obţinut identificând vârfurile din $\mathbb{I}_0$ cu vârfurile din $\mathbb{I}_1$ cu ajutorul bijecţiei

$$\mathbb{I}_0 \xrightarrow{\alpha_0^{-1}} [n] \xrightarrow{\alpha_i} \mathbb{I}_1.$$

Mulţimile $\mathbb{I}_0$ şi $\mathbb{I}_1$ se identifică natural cu o submulţime de vârfuri a lui $\mathcal{M}_0 \times \mathcal{M}_1$. Definim $\mathbb{O} = \mathbb{O}_0 \cup \mathbb{O}_1$. Atunci tripletul $(\mathcal{M}_0 \times \mathcal{M}_1, \mathbb{I}, \mathbb{O})$ reprezintă restricţia $F_0 \times F_1$ la bila B a spaţiului $\mathbb{C}^n$. Am arătat astfel că dacă două aplicaţii polinomiale $F_j : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^{m_j}$ sunt reprezentabile la cazul special al aplicaţiilor polinomiale reale $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$.

În exemplul 3.1. (a) am arătat că aplicaţia identică $\mathbb{I} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Prin urmare şi produsul cartezian

$$\Delta_n = \underbrace{\mathbb{I} \times \ldots \times \mathbb{I}}_{n} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}_n, \quad z \mapsto \Big(\underbrace{z, \ldots, z}_{n} \Big)$$

este reprezentabilă.

Lema 4.1. (a) *Compunerea a două aplicaţii polinomiale reprezentabile este o aplicaţie polinomială, reprezentabilă.*

(b) *Dacă* $F_j : \mathbb{C}_{n_j} \to \mathbb{C}^{m_j}$, $j = 0, 1$ *sunt două aplicaţii reprezentabile, atunci funcţia*

$$(F_0, F_1) : \mathbb{C}_{n_0} \times \mathbb{C}^{n_1} \to \mathbb{C}^{m_0} \times \mathbb{C}^{m_1},$$
$$\mathbb{C}^{n_0} \times \mathbb{C}^{n_1} \ni (\overrightarrow{z}_0, \overrightarrow{z}_1) \to (F_0(\overrightarrow{z}_0), F_1(\exists \overrightarrow{z}_1))).$$

este reprezentabilă. În particular, aplicaţia identică $\mathbb{I}_n : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ *este reprezentabilă.*

(c) *Funcţiile*

$$z \xmapsto{M_c} cz,\ c \in \mathbb{R}^*,\ z \xmapsto{S} z^2,\ c \in \mathbb{R}^*,\ z \xmapsto{C} \overline{z}$$

sunt reprezentabile. Mai general, operaţia de reflexie într-o dreaptă în plan este reprezentabilă.

(d) Aplicaţia de adunare $\mathcal{A} : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}, \ni (w) \mapsto z + w \in \mathbb{C}$ este reprezentabilă.

Pentru a nu întrerupe firul logic al expunerii vom prezenta demonstraţia acestei leme ceva mai târziu. Să presupunem că $F, G : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ sunt două aplicaţii reprezentabile. Atunci suma lor $F + G : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ se poate scrie ca o compunere:

$$\mathbb{C}^n \xmapsto{\mathbb{I}_n \times \mathbb{I}_n} \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \xmapsto{(F,G)} \mathbb{C}^2 \xmapsto{A} \mathbb{C}.$$

Prin urmare, suma lor este de asemenea reprezentabilă. Rezultă că pentru a arăta reprezentabilitatea aplicaţiilor polinomiale este suficient să arătam că aplicaţiile monomiale

$$\mathbb{C}^n \mapsto \mathbb{C}\,(z_1, \ldots, \mathbb{Z}_n) \mapsto \mu z_1^{a_1} \overline{z_1}^{b_1} \cdot \ldots \cdot z_n^{a_n} \overline{z_n}^{b_n}, \quad \mu \in \mathbb{C}, \quad a_i, b_j \in \mathbb{N}, \quad (4.1)$$

sunt reprezentabile. Identitatea

$$zw = \frac{1}{4}\left((z+w)^2 - (z-w)^2\right)$$

împreuna cu Lemma 4.1 ne arată că funcţia produs $(z, w) \xmapsto{P} zw$ este reprezentabilă. Deducem în acest fel că produsul a două funcţii reprezentabile este o funcţie reprezentabilă.

Deoarece orice rotaţie a planului în jurul originii se poate descrie ca şi compunerea a două reflexii[1)] deducem că orice rotaţie a planului este reprezentabilă. O rotaţie este echivalentă cu înmulţirea cu un număr complex de lungime 1. Deoarece înmulţirea cu orice scalar real este reprezentabilă, deducem că şi înmulţirea cu orice scalar complex este reprezentabilă.

Exemplul 3.1 (c) arată că monomul constant, 1, de grad zero, este reprezentabil pentru că este descris de funcţia constantă.

Pentru a arată că funcţia $(z_1, \ldots, z_n) \mapsto z_k$ este reprezentabilă considerăm mecanismul $\mathcal{D}_n$ care constă din n vârfuri $V_n = \{v_1, \ldots, v_n\}$ şi nici

[1)] Ştiţi să arătaţi acest lucru ? (N. A.)

o muchie. Dacă notăm $\mathbb{I} = V_n$, $\mathbb{O} = \{v_k\}$ atunci deducem că tripletul $(\mathcal{D}_n, \mathbb{I}, \mathbb{O})$ reprezintă funcţia de mai sus. Avem însă o problemă: condiţia (a) din Definiţia 3.2 este violată deoarece mulţimile $\mathbb{I}$ şi $\mathbb{O}$ nu sunt disjuncte. Pentru a repara această problemă ne folosim de următorul truc:

Înlocuim vârful v_k cu mecanismul canonic descris în Exemplul 1.4. Obţinem un nou mecanism $\mathcal{D}_{n,k}$ a cărui mulţime de vârfuri este

$$V_{n,k} = (V_n \setminus \{v_d\}) \cup \{A, B, C, D, E\},$$

unde reamintim (vezi Figura 1.5) că A, B,C, D, E sunt vârfurile mecanismului canonic. Singurele muchii ale noului mecanism sunt doar muchiile care apar în mecanismul canonic. Definim:

$$\mathbb{I}_{n,k} := (V_n \setminus \{v_k\}) \cup \{D\}, \quad \mathbb{O}_{n,k} := \{E\}.$$

Atunci tripletul $(\mathcal{D}_{n,k}, \mathbb{I}_{n,k}, \mathbb{O}_{n,k})$ reprezintă funcţia monomială $(z_1, \dots, z_k) \mapsto z_k \to$.

Deducem astfel că orice aplicaţie monomială de forma (4.1) este reprezentabilă. Demonstraţia teoremei de reprezentabilitate este încheiată dacă demonstrăm Lemma 4.1:

Demonstraţia Lemei 4.1. (a) Să presupunem că avem două aplicaţii polinomiale reprezentabile

$$\mathbb{C}^{n_0} \xrightarrow{F_0} \mathbb{C}^{n_1} \xrightarrow{F_1} \mathbb{C}_{n_2}.$$

Fixăm o bilă B_0 de rază R_0 cu centrul în originea lui $\mathbb{C}^{n_0}$. Întrucât F_0 este continuă există o bilă B_1 de rază R_1 cu centrul în originea lui $\mathbb{C}^{n_1}$ astfel încât

$$F_0\left(B(0, R_0)\right) \subset B(0, R_1).$$

Întrucât aplicaţiile F_0 şi F_1 sunt reprezentabile, există mecanisme $\mathcal{M}_j = (G_j, \ell j, V_f^j, \phi_j)$, $j = 0, 1$, cu mulţimile de vârfuri V_j, submulţimi disjuncte $\mathbb{I}_j, \mathbb{O}_j \subset V_j$ şi bijecţii

$$\alpha_j : [n_j] \to \mathbb{I}_j, \quad \beta_j : [n_{j+1}] \to \mathbb{O}_j, \quad j = 0, 1,$$

astfel încât tripletul $(\mathcal{M}_j, \mathbb{I}_j, \mathbb{O}_j)$ reprezintă funcţia

$$\Phi_j = \left(\beta_{j+1}^*\right)^{-1} \circ F_j \circ \alpha_j^* : B_j \to \mathbb{C}^{n_{j+1}}.$$

$$\begin{tikzcd}
B_j \arrow[r, "\Phi_j"] \arrow[d, "\alpha_j^*"] & \mathbb{C}^{m_{j+1}} \arrow[d, "\beta_{j+1}^*"] \\
\mathbb{C}^{n_j} \arrow[r, "F_j"'] & \mathbb{C}^{m_{j+1}}
\end{tikzcd}$$

Formăm acum mecanismul $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 \#_{\mathbb{O}_0 \mathbb{I}_j} \mathcal{M}_1$ obţinut identificând vârfurile din $\mathbb{O}_0$ cu vârfurile din $\mathbb{I}_1$ cu ajutorul bijecţiei

$$\mathbb{O}_0 \xrightarrow{\beta_0^{-1}} [n_1] \xrightarrow{\alpha_1} \mathbb{I}_1.$$

Notăm cu V mulţimea de vârfuri a noului mecanism. Atunci $\mathbb{I}_0$ şi $\mathbb{O}_1$ se identifică cu submulţimi disjuncte $\mathbb{I}, \mathbb{O} \subset V$, iar tripletul $(\mathcal{M}_0 \#_{\mathbb{O}_0 \mathbb{I}_1} \mathcal{M}_1, \mathbb{I}, \mathbb{O})$ reprezintă funcţia polinomială $F_1 \circ F_0$ restricţionată la bila B_0.

(b) Demonstraţia acestei afirmaţii o lăsăm ca un exerciţiu cititorului.

(c) Pentru a demonstra că M_c este reprezentabilă folosim pantograful rigidizat cu un punct fix: Figura 4.1.

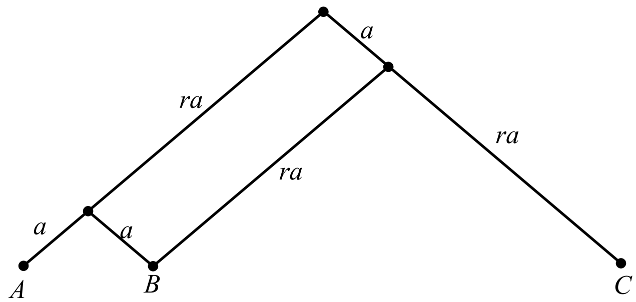


Fig. 4.1. Pantograful cu un punct fix.

Notăm cu $\mathcal{P}$ acest mecanism, în care vârful A este fixat în originea planului. Definim $\mathbb{I} = \{B\}$, $\mathbb{O} = \{C\}$ şi notăm cu z coordonatele lui B. Din teorema lui Thales deducem că tripletul $(\mathcal{P}, \mathbb{I}, \mathbb{O})$ reprezintă funcţia M_c, $c = (1+r)z$, pe domeniul $\{|z| \leq 2a\}$. Dacă alegem a şi r arbitrar deducem că toate funcţiile M_c, $c > 1$, sunt reprezentabile. Dacă schimbăm rolurile lui B şi C, adică definim $\mathbb{I} = \{C\}$ şi $\mathbb{O} = \{B\}$, deducem că şi funcţiile M_c, $c \in (0,1)$, sunt reprezentabile.

Dacă în pantograful din Figura 4.l fixăm vârful B în origine şi alegem $r = 1$, obţinem un mecanism pe care-l notăm cu $\mathcal{P}_B$. Definim $\mathbb{I} = \{A\}$ şi $\mathbb{O} = \{C\}$. Atunci tripletul $((\mathcal{P}, \mathbb{I}, \mathbb{O}))$ reprezintă funcţia M_{-1} pe domeniul $\{|z| < 2a\}$. Rezultă că înmulţirea cu orice scalar real $c \neq 0$ este reprezentabilă.

Deoarece funcţia $(z, w) \mapsto \dfrac{1}{2}(z+w)$ este reprezentabilă (Exemplul 3.3) deducem că şi compunerea

$$(z, w) \mapsto \frac{1}{2}(z+w) \overset{M_2}{\mapsto} z + w$$

este reprezentabilă. Aceasta ne arată că funcţia adunare este reprezentabilă şi deci partea (d) a lemei este demonstrată.

Notăm cu h inversiunea de centru originea şi putere t^2, $t > 0$. În coordonate complexe putem scrie

$$h(z) = \frac{t^2}{|z|^2}\, z. \tag{4.2}$$

După cum am văzut în Exemplul 3.1 (b), Figura 3.1, putem folosi inversorul lui Peaucellier pentru a reprezenta această inversiune pe coroane circulare. Dacă în Figura 3.1 alegem $t = \sqrt{a^2 - b^2} = 4r$ şi $c = 3r$ acest mecanism reprezintă inversiunea h pe coroana circulară $\{2r \leq |z| \leq 8r\}$.

Folosind (4.2) deducem imediat egalitatea

$$z^2 = t^2 - th\left(\frac{1}{2}\left(h(t+z) + h(t-z)\right)\right).$$

Dacă alegem $|z| \leq r$, atunci $z + t$ şi $z - t$ se află în coroana circulară $\{2r \leq |z| \leq 8r\}$ şi deci $h(z + t)$ şi $h(z - t)$ se pot reprezenta prin mecanisme pe discul $\{|z| \leq t\}$. Cu alte cuvinte, funcţia z^2 se obţine prin adunare, compunere şi înmulţire cu scalari din funcţii reprezentabile şi prin urmare este reprezentabilă.

Ca să reprezentăm funcţia conjugare $z \mapsto \overline{z}$ folosim un mecanism descris în Figura 4.2.

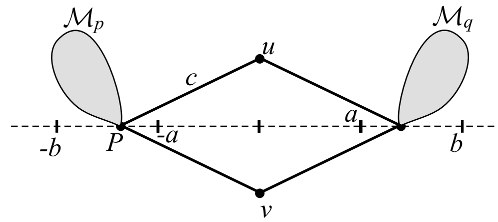


Fig. 4.2. Simulând conjugarea.

Să explicăm puţin această figură. Dreapta punctată este axa reală $\mathcal{M}_p$ şi $\mathcal{M}_q$ sunt mecanisme independente conţinând vârfurile p şi respectiv q astfel încât urma lui p este intervalul $[-b, -a]$, iar urma lui q este intervalul $[a, b]$. (De exemplu, $\mathcal{M}_p$ şi $\mathcal{M}_q$ sunt inversoare *Peaucellier* rigidizate ca în Exemplul 1.3.) În mjilocul figurii avem un romb rigidizat $puqv$ ale cărui laturi au lungimea c. Notăm cu $\mathcal{C}$ acest mecanism şi definim $\mathbb{I} = \{u\}$, $\mathbb{O} = \{v\}$. Observăm că tripletul $(\mathcal{C}, \mathbb{I}, \mathbb{O})$ reprezintă aplicaţia de conjugare întrucât v este reflexia lui u în axa reală. Dacă alegem a, b, c astfel încât

$$\min(b - c, c - a) > R > 0$$

atunci domeniul acestui triplet contine discul $\{|z| \leq R\}$. Aceasta arată că aplicaţia de conjugare este reprezentabilă.

Bibliografie

[1] T. G. Abbot, R.W. Barton, *Generalizations of Kempe's Universality Theorem*, Teză de Master, Massachusets Institute of Techno1ogy, 2005. Se poate găsi pe Internet: http://web.mit.edll/tabbott/www/papers/mthesis.pdf

[2] M. Coste, *An introduction to semialgebraic geometry*, Real Algebraic and Analytic Geometry Network. Se poate găsi pe Internet: http://www.ihp-raag.org/publications.php

[3] E.D. Demaine, J. O'Rourke, *Geometric Folding Algorithms. Linkages, Origami, Polyhedra*, Cambridge University Press, 2007.

[4] J. Hadamard, *Lecţii de Geometrie Elementară. Geometrie Plană*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1962.

[5] M. Kapovich, J. J. Millson, *Universality theorems for configuration spaces of plan linkages*, Topology, 41 (2002), 1051-1107, sau pe Internet: http://front.math.ucdavis.edu/9803.5150

[6] A. B. Kempe, *On a general method of describing plane curves of the nth degree by linkwork*, Proc. London Math. Soc., 7 (1876), 213-216.

[7] H. C. King, *Planar linkages and algebraic sets*, Turkish 1. Math., 23 (1999), 33-56. Se poate găsi pe Internet http://front.math.ucdavis.edu/9807.5023
[8] $*\ *\ *$ *Semiconfiguration spaces of plan linkages*, preprint. Se poate găsi pe Internet: http://font. math. ucdavis. edu/9810.5130

Asupra procedeului de evaluare asimptotică a lui De Bruijn

DUMITRU POPA[1)]

Abstract. We present an approach for obtaining the asymptotic evaluations for some recurrent sequences. Our approach follows the seminal ideas of De Bruijn.

Keywords: recurrent sequences, De Bruijn.
MSC : 62G20, 40-99.

În acest articol ne propunem să indicăm un mod de a obţine evaluările asimptotice pentru unele şiruri definite recurent. Pentru aceasta vom urma ideile lui *N. De Bruijn* din [2] pag. 154-159. Evaluări asimptotice până la cele de ordinul II pe care le vom prezenta în continuare sunt probabil binecunoscute cititorilor, vezi de exemplu [6, cap. II]. În cele ce urmează vom pune în evidenţă procedeul general de obţinere a evaluărilor asimptotice de ordin superior, care, din câte cunoaştem, este mai puţin cunoscut. Rezultatele pe care le vom prezenta ne-au fost sugerate de cele din [2] în care este analizat cazul particular al şirului de numere reale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definit prin

$$x_1 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ şi } \ x_{n+1} = \sin x_n, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Nu putem încheia această scurtă introducere fără a menţiona cartea clasică [4] şi o alta, relativ recentă [3], pe care le recomandăm cu deosebită căldură cititorilor interesaţi de problematica evaluărilor asimptotice pentru şiruri şi nu numai.

Simbolurile o şi O ale lui Landau

Vom prezenta, pe scurt, aceste două simboluri binecunoscute, indicând acele proprietăţi de care vom avea nevoie ulterior şi care în fapt reprezintă transpunerea în acest nou limbaj a unor proprietăţi binecunoscute. Pentru mai multe detalii, cititorul interesat poate consulta [1].

Definitia 1. a) *Fie* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *un şir de numere reale cu proprietatea că există* $n_0 \in \mathbb{N}$ *astfel încât* $b_n \neq 0$, *oricare ar fi* $n \geq n_0$. *Spunem că:*

(i) *Un şir de numere reale* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este o de sirul* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *si scriem* $a_n = o\,(b_n)$ *dacă şi numai dacă* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$.

[1)]Facultatea de matematică şi informatică, Universitatea Ovidius din Constanţa

(ii) Un sir de numere reale $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *echivalent cu sirul* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *si scriem* $a_n \backsim b_n$ *daca si numai daca* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=1$.

b) Fie $g:(a,\infty)\to\mathbb{R}$ *o funcţie cu proprietatea că* $g(x)\neq 0$, $\forall x\in(a,\infty)$. *Spunem că funcţia* $f:(b,\infty)\to\mathbb{R}$ *este o de funcţia* g *şi scriem* $f(x)=o(g(x))$ *pentru* $x\to\infty$ *dacă şi numai dacă* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$.

c) Fie I *interval deschis care conţine pe* 0, $g:I\to\mathbb{R}$ *o funcţie cu proprietatea că* $g(x)\neq 0$, $\forall x\in I$. *Fie* J *interval deschis care conţine pe* 0 *şi* $f:J\to\mathbb{R}$. *Spunem că* f *este o de funcţia* g*şi scriem* $f(x)=o(g(x))$ *pentru* $x\to 0$ *dacă şi numai dacă* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$.

Pentru a nu complica inutil notaţiile tot timpul când vom scrie $a_n=o(b_n)$, $a_n\backsim b_n$, respectiv $f(x)=o(g(x))$ pentru $x\to\infty$ (sau $x\to 0$) subînţelegem că sunt îndeplinite condiţiile din definiţia 1. De asemenea $o(b_n)$ va desemna un şir $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cu proprietatea $a_n=o(b_n)$.

Notaţia $x_n=y_n+o(b_n)$ va înseamna $x_n-y_n=o(b_n)$. Să observăm că $a_n\backsim b_n$ revine la $a_n=b_n+o(b_n)$.

O semnificatie analoagă au $f(x)=h(x)+o(g(x))$ pentru $x\to\infty$ (sau $x\to 0$). De asemenea să remarcăm, că de exemplu, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$ revine la $f(x)=g(x)+o(g(x))$ pentru $x\to 0$.

Observaţia 2. a) Un mod util de a obţine evaluări asimptotice pentru şiruri rezultă din formula lui Mc Laurin. Fie I un interval deschis care conţine pe 0 şi $f:I\to\mathbb{R}$.

i) Dacă f este derivabilă în 0 atunci, conform definiţiei, $f(x)=f(0)+$ $+\dfrac{f'(0)}{1!}x+o(x)$ pentru $x\to 0$, iar de aici, din definiţia limitei cu şiruri, $\dfrac{1}{n}\to 0$, va rezulta $f\left(\dfrac{1}{n}\right)=f(0)+\dfrac{f'(0)}{1!}\cdot\dfrac{1}{n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

ii) Dacă f este de două ori derivabilă în 0, atunci conform formulei lui Mc Laurin avem $f(x)=f(0)+\dfrac{f'(0)}{1!}x+\dfrac{f''(0)}{2!}x^2+o\left(x^2\right)$ pentru $x\to 0$, de unde $f\left(\dfrac{1}{n}\right)=f(0)+\dfrac{f'(0)}{1!}\cdot\dfrac{1}{n}+\dfrac{f''(0)}{2!}\cdot\dfrac{1}{n^2}+o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

b) Deoarece $\dfrac{1}{1+x}=1-x+o(x)$, $\dfrac{1}{1+x}=1-x+x^2+o\left(x^2\right)$, $\dfrac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+o\left(x^3\right)$ pentru $x\to 0$, obţinem: pentru orice şir $a_n\to 0$, cu proprietatea că $\exists n_0\in\mathbb{N}$ astfel încât $a_n\neq 0$, $\forall n\geq n_0$, avem:

$$\frac{1}{1+a_n}=1-a_n+o(a_n),\ \frac{1}{1+a_n}=1-a_n+a_n^2+o\left(a_n^2\right),$$

$$\frac{1}{1+a_n} = 1 - a_n + a_n^2 - a_n^3 + o\left(a_n^3\right).$$

Indicăm fără demonstraţie, câteva poprietaţi ale simbolului o, pe care le vom folosi uneori fără explicaţii suplimentare.

Proprietăţi ale simbolului o.

1. *Dacă* $x_n = o(b_n)$ *şi* $y_n = o(b_n)$, *atunci* $x_n + y_n = o(b_n)$.

2. *Dacă* $x_n = o(b_n)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, *atunci* $\lambda x_n = o(b_n)$.

Proprietaţile 1 şi 2 se exprimă sub o formă sugestivă astfel: $o(b_n) + o(b_n) = o(b_n)$ *si* $\lambda o(b_n) = o(b_n)$ *dacă* $\lambda \neq 0$.

Ca o exemplificare a celor de mai sus indicăm următorul exemplu. Cititorul interesat poate găsi altele în [1], [2], [4], [6].

Exemplul 3. *Avem* $\ln(n+1) = \ln n + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$, $\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$ si $\frac{\ln(n+1)}{n+1} = \frac{\ln n}{n} - \frac{\ln n}{n^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{\ln n}{n^3} + o\left(\frac{\ln n}{n^3}\right)$.

Demonstraţie. Din formula lui Mc Laurin sau direct, cu regula lui L'Hospital, avem $\ln(1+x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)$ pentru $x \to 0$, iar de aici, cum $\frac{1}{n} \to 0$, obţinem prima relaţie din enunţ. Pentru cea de a doua, ţinând cont de observaţia 2 b), avem:

$$\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Pentru ultima relaţie folosind cele demonstrate anterior şi proprietăţile simbolului o avem: $\frac{\ln(n+1)}{n+1} =$

$$= \left(\ln n + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) =$$

$$= \frac{\ln n}{n} - \frac{\ln n}{n^2} + \frac{\ln n}{n^3} + o\left(\frac{\ln n}{n^3}\right) + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) =$$

$$= \frac{\ln n}{n} - \frac{\ln n}{n^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{\ln n}{n^3} + o\left(\frac{\ln n}{n^3}\right).$$

Definiţia 4. *Fie* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *un sir de numere reale pozitive. Spunem că un şir de numere reale* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este O de şirul* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$*şi scriem* $a_n = O(b_n)$ *dacă şi numai dacă*

$$\exists M > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ astfel incit } |a_n| \leq M b_n,\ \forall n \geq n_0.$$

Pentru a nu complica inutil notaţiile, scrierea $O(b_n)$ va însemna un şir $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cu proprietatea $a_n = O(b_n)$. De asemenea, notaţia $x_n = y_n + O(b_n)$ înseamnă $x_n - y_n = O(b_n)$.

Următoarele proprietăţi rezultă simplu din definiţie (omitem demonstraţia lor), şi ele vor fi folosite frecvent, uneori fără explicaţie.

Proprietăti ale simbolului O.

1. *Dacă* $x_n = O(b_n)$ *şi* $y_n = O(b_n)$, *atunci* $x_n + y_n = O(b_n)$.
2. *Dacă* $x_n = O(b_n)$, *iar* $\lambda \in \mathbb{R}$, *atunci* $\lambda x_n = O(b_n)$.

Proprietăţile 1 *şi* 2 *se exprimă sub o formă sugestivă astfel*

$$O(b_n) + O(b_n) = O(b_n) \text{ şi } \lambda O(b_n) = O(b_n) \text{ dacă } \lambda \neq 0.$$

3. *Dacă* $x_n = O(b_n)$ *şi* $y_n = O(c_n)$, *atunci* $x_n y_n = O(b_n c_n)$. *În particular, dacă* $x_n = O(b_n)$, *atunci* $x_n^2 = O(b_n^2)$, $x_n^3 = O(b_n^3)$ *etc.*
4. *Dacă* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este mărginit şi* $a_n = O(b_n)$, *atunci* $a_n x_n = O(b_n)$.

Comentariu. *Fie* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *un sir de numere reale pozitive. Dacă notăm*

$$O(b_n) = \left\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \mid \exists\, M > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \text{ astfel încât } |a_n| \leq M b_n,\ \forall\, n \geq n_0\right\},$$

atunci, cu această definiţie, notaţia $O(b_n)$ *capătă o interpretare algebrică evidentă. De exemplu proprietăţile* 1 *şi* 2 *afirmă că* $O(b_n)$ *este spaţiu liniar relativ la operaţiile uzuale de adunare şi înmulţire cu scalari pentru şiruri. O semnificatie analoagă o are* $o(b_n)$.

Din faptul binecunoscut că orice şir convergent (în cazul nostru către zero) este mărginit, rezultă

Propozitia 5. *Dacă* $x_n = o(b_n)$, *atunci* $x_n = O(b_n)$. *În particular orice relaţie adevărată pentru o este adevărată şi pentru O.*

Din propoziţia 5 şi observaţia 2 b), deducem că dacă $a_n \to 0$, *atunci*

$$\frac{1}{1+a_n} = 1 - a_n + O\left(a_n^2\right),\ \frac{1}{1+a_n} = 1 - a_n + a_n^2 + O\left(a_n^3\right), \text{ etc.}$$

Vom avea nevoie de următorul rezultat binecunoscut.

Propozitia 6. a) *Pentru orice* $\alpha > 0$ *seriile* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^\alpha n}{n^{\alpha+1}}$ *sunt convergente, în plus*:

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{\ln^\alpha k}{k^{\alpha+1}} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\ln^\alpha n}{n^\alpha} + o\left(\frac{\ln^\alpha n}{n^\alpha}\right).$$

În particular,

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{\ln^\alpha k}{k^{\alpha+1}} = O\left(\frac{\ln^\alpha n}{n^\alpha}\right).$$

b) *Pentru orice* $\alpha > 1$ *seriile* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ *sunt convergente şi*

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}} = \frac{1}{(\alpha-1)\, n^{\alpha-1}} + o\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}}\right),$$

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}} = \frac{1}{(\alpha-1)\, n^{\alpha-1}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^{\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right).$$

În particular:

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^{2}} = \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^{2}}\right) = \frac{1}{n} + O\left(\frac{\ln^2 n}{n^{2}}\right).$$

c) *Avem* $\sum\limits_{k=n}^{\infty} \frac{\ln k}{k^{2}} = \frac{\ln n}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\ln n}{n^2} + o\left(\frac{\ln n}{n^{2}}\right).$

În particular:

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{\ln k}{k^{2}} = \frac{\ln n}{n} + \frac{1}{n} + O\left(\frac{\ln n}{n^{2}}\right) = \frac{\ln n}{n} + \frac{1}{n} + O\left(\frac{\ln^2 n}{n^{2}}\right).$$

Demonstraţie. a) Rezultă simplu din evaluările pentru serii şi integrale, vezi [5] sau [6, cap. VI].

b) Să notăm $\alpha_n = \sum\limits_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}} - \frac{1}{(\alpha-1)\, n^{\alpha-1}}$. Atunci:

$$\alpha_n - \alpha_{n+1} = \frac{1}{n^{\alpha}} - \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}\right) =$$

$$= \frac{1}{n^{\alpha-1}}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{\alpha-1}\left(1 - \left(1+\frac{1}{n}\right)^{1-\alpha}\right)\right). \tag{1}$$

Deoarece $(1+x)^r = 1 + rx + \frac{r\,(r-1)}{2}x^2 + o\left(x^2\right)$ dacă $x \to 0$ obţinem:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1-\alpha} = 1 - (1-\alpha) \cdot \frac{1}{n} - \frac{\alpha\,(1-\alpha)}{2} \cdot \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right). \tag{2}$$

Folosind (2), din (1) după calcule simple, deducem:

$$\alpha_n - \alpha_{n+1} = -\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{1}{n^{\alpha+1}} + o\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right)$$

i.e.

$$\alpha_n - \alpha_{n+1} \backsim -\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{1}{n^{\alpha+1}}. \tag{3}$$

Conform lemei Stolz-Cesàro, cazul $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ şi evaluările pentru serii şi integrale, vezi [5] sau [6, cap. VI], din (3) obţinem:

$$\alpha_n \backsim -\frac{\alpha}{2}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^{\alpha+1}} \backsim -\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{n^{\alpha}} = -\frac{1}{2n^{\alpha}}.$$

c) Analoagă celei de la b). Să notăm $\beta_n = \sum_{k=n}^{\infty}\frac{\ln k}{k^2} - \frac{\ln n}{n} - \frac{1}{n}$. Avem

$$\beta_n - \beta_{n+1} = \frac{\ln n}{n^2} + \left(\frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{\ln n}{n}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right),$$

de unde, folosind exemplul 3, după calcule simple obţinem:

$$\beta_n - \beta_{n+1} = \frac{\ln n}{n^3} + o\left(\frac{\ln n}{n^3}\right),$$

i.e.

$$\beta_n - \beta_{n+1} \backsim \frac{\ln n}{n^3}. \tag{4}$$

Din (4) folosind lema Stolz-Cesàro, cazul $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ şi evaluările pentru serii şi integrale din [5] sau [6, cap. VI] obţinem:

$$\beta_n \backsim \sum_{k=n}^{\infty}\frac{\ln k}{k^3} \backsim n\cdot\frac{\ln n}{2n^3} = \frac{\ln n}{2n^2}.$$

Următoarea propoziţie, vezi [2] pag. 156, este un rezultat general care ne permite să obţinem evaluarea asimptotică de ordinul I pentru o clasă suficient de largă de şiruri. Demonstraţia de mai jos este diferită de cea din [2].

Propozitia 7. *Fie $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de numere reale astfel încât $w_n \to \infty$ şi*

$$w_{n+1} = w_n + 1 + O\left(\frac{1}{w_n}\right).$$

Atunci

$$\frac{1}{w_n} = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad w_n = n + O(\ln n), \quad \frac{1}{w_n} = \frac{1}{n} + O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right);$$

în particular

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{w_n} = 1.$$

Demonstraţie. Relaţia din enunţ afirmă că:

$$\exists\, M > 0,\ \exists\, n_1 \in \mathbb{N} \text{ astfel încât } |w_{n+1} - w_n - 1| \le \frac{M}{w_n},\ \forall\, , n \ge n_1. \tag{1}$$

Cum $w_n \to \infty$, $\dfrac{M}{w_n} \to 0$, deci:

$$\exists\, n_2 \in \mathbb{N} \text{ astfel încât } \frac{M}{w_n} \leq \frac{1}{2},\ \forall\, n \geq n_2. \tag{2}$$

Fie $n_0 = \max(n_1, n_2)$. Din (1) şi (2) rezultă $|w_{n+1} - w_n - 1| \leq \dfrac{1}{2}$, pentru orice $n \geq n_0$ şi de aici $w_{n+1} - w_n - 1 \geq -\dfrac{1}{2}$, pentru orice $n \geq n_0$ i.e.

$$w_{n+1} - w_n \geq \frac{1}{2},\ \forall\, n \geq n_0. \tag{3}$$

În (3) dând lui n valorile n_0, $n_0 + 1$, $\ldots$, $n - 1$ şi adunând obţinem $w_n - w_{n_0} \geq \dfrac{n - n_0}{2}$ de unde

$$\frac{n}{w_n} \leq \frac{n}{w_{n_0} + \dfrac{n - n_0}{2}},\ \forall\, n \geq n_0 + 1. \tag{4}$$

Cum membrul drept din (4) are limita 1, rezultă că există $L > 0$, $p_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$\frac{n}{w_n} \leq L, \quad \forall n \geq p_0, \tag{5}$$

i.e. $\dfrac{1}{w_n} = O\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Folosind (5), din (1) obţinem că există $A = ML > 0$, există $n_3 = \max(p_0, n_1) \in \mathbb{N}$ astfel încât:

$$|w_{n+1} - w_n - 1| \leq \frac{A}{n},\ \forall\, n \geq n_3. \tag{6}$$

Fie $a_n = w_n - n$ i.e. $w_n = a_n + n$. Din (6) deducem

$$|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{A}{n},\ \forall\, n \geq n_3. \tag{7}$$

Folosind $|x + y| \leq |x| + |y|$ din (7) prin adunare deducem:

$$|a_n - a_{n_3+1}| \leq A\left(\frac{1}{n_3 + 1} + \frac{1}{n_3 + 2} + \ldots + \frac{1}{n}\right),\ \forall\, n \geq n_3 + 1$$

de unde:

$$|a_n| \leq |a_{n_3+1}| + A\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) - A\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n_3}\right),\ \forall\, n \geq n_3 + 1,$$

iar de aici:

$$\frac{|a_n|}{\ln n} \leq \frac{|a_{n_3}| - A\left(1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n_3}\right)}{\ln n} + A \cdot \frac{1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}}{\ln n}, \tag{8}$$

$\forall n \geq n_3 + 1$.

Cum $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln n} = 1$, iar:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n_3}| - A\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n_3}\right)}{\ln n} = 0$$

din (8) rezultă că:

$$\exists\, B>0,\ \exists\, n_4 \in \mathbb{N} \text{ astfel încât } \frac{|a_n|}{\ln n} \le B,\ \forall\, n \ge n_4,$$

i.e. $w_n - n = a_n = O(\ln n)$.

Din $w_n = n + O(\ln n)$, prin împărţire la n rezultă:

$$\frac{w_n}{n} = 1 + O\left(\frac{\ln n}{n}\right)$$

şi ţinând cont că $\dfrac{\ln n}{n} \to 0$, deci din cleşte $O\left(\dfrac{\ln n}{n}\right) \to 0$, rezultă $\dfrac{w_n}{n} \to 1$.

Conform celor arătate anterior avem:

$$\frac{1}{w_n} - \frac{1}{n} = \frac{w_n - n}{n} \cdot \frac{1}{w_n} = \frac{O(\ln n)}{n} \cdot O\left(\frac{1}{n}\right) = O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)$$

şi propoziţia este complet demonstrată.

Următoarea lemă este utilizată implicit în [2] pag. 158.

Lema 8. *Dacă* $r_{n+1} - r_n = a_n + O(b_n)$, *seriile de numere reale pozitive* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *şi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *sunt convergente, atunci există* $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = r \in \mathbb{R}$ *şi în plus*:

$$r - r_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_n + O\left(\sum_{k=n}^{\infty} b_n\right).$$

Demonstraţie. Relaţia din enunţ revine la:

$$\exists\, M>0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \text{astfel încât } |r_{n+1} - r_n - a_n| \le M b_n,\ \forall\, n \ge n_0. \quad (1)$$

Din (1) si proprietatea $|x+y| \le |x| + |y|$ rezultă simplu că:

$$|r_{n+p} - r_n - (a_n + \cdots + a_{n+p})| \le M\,(b_n + \cdots + b_{n+p}), \quad (2)$$

$\forall n \ge n_0, \forall p \in \mathbb{N}$ şi de aici:

$$|r_{n+p} - r_n| \le a_n + \cdots + a_{n+p} + M\,(b_n + \cdots + b_{n+p}), \forall n \ge n_0, \forall\, p \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

Din convergenţa seriilor $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ şi (3) rezultă simplu că şirul $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este şir Cauchy de numere reale, prin urmare, convergent şi fie

$\lim\limits_{n\to\infty} r_n = r \in \mathbb{R}$. Din (2) trecând la limită pentru $p \to \infty$ obţinem:

$$\left| r - r_n - \sum_{k=n}^{\infty} a_n \right| \le M \sum_{k=n}^{\infty} b_n, \quad \forall\, n \ge n_0,$$

ceea ce conform definiţiei simbolului O revine la relaţia din enunţ.

Propoziţia următoare constituie cheia evaluărilor asimptotice de ordinul III pentru o clasă suficient de generală de şiruri. Cazul particular $a = 1$ apare în [2] pag. 157.

Propozitia 9. *Fie $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de numere reale astfel încât $w_n \to \infty$ şi*

$$w_{n+1} = w_n + 1 + \frac{a}{w_n} + O\left(\frac{1}{w_n^2}\right).$$

Atunci:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{w_n}{n} = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\ln n}\left(\frac{w_n}{n} - 1\right) = a$;

(ii) *există* $\lim\limits_{n\to\infty} \ln n \left(\frac{n}{\ln n}\left(\frac{w_n}{n} - 1\right) - a\right) = c \in \mathbb{R}$ *şi în plus*:

$$w_n = n + a\ln n + c + r_n, \qquad \textit{iar} \qquad r_n = O\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$

(iii) *Dacă notăm* $x_n = \frac{1}{w_n}$, *atunci*

$$x_n = \frac{1}{n} - \frac{a\ln n}{n^2} - \frac{c}{n^2} + O\left(\frac{\ln^2 n}{n^3}\right),$$

în particular:

$$\lim_{n\to\infty} n x_n = 1, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\ln n}(n x_n - 1) = -a,$$

există:

$$\lim_{n\to\infty} \ln n \left(\frac{n}{\ln n}(n x_n - 1) + a\right) = -c \in \mathbb{R}.$$

Demonstraţie. Deoarece $w_n \to \infty$, rezultă $\frac{1}{w_n} \to 0$, de unde:

$$O\left(\frac{1}{w_n^2}\right) = O\left(\frac{1}{w_n}\right),$$

care înlocuită în relaţia din enunţ ne va da:

$$w_{n+1} = w_n + 1 + O\left(\frac{1}{w_n}\right).$$

Din propoziţia 7 rezultă:

$$\frac{1}{w_n} = \frac{1}{n} + O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right). \tag{1}$$

Înlocuind în relaţia din enunţ în membrul drept pe $\dfrac{1}{w_n}$ cu relaţia (1) rezultă:

$$w_{n+1} = w_n + 1 + \frac{a}{n} + O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right) + O\left(\frac{1}{w_n^2}\right). \tag{2}$$

Deoarece din propoziţia 7, $\dfrac{1}{w_n^2} = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right) = O\left(\dfrac{\ln n}{n^2}\right)$, din (2) obţinem:

$$w_{n+1} = w_n + 1 + \frac{a}{n} + O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right). \tag{3}$$

Fie $t_n = w_n - (n + a\ln n)$. Atunci:

$$t_{n+1} - t_n = w_{n+1} - w_n - 1 - a\left[\ln(n+1) - \ln n\right]$$

sau, dacă ţinem cont de (3):

$$t_{n+1} - t_n = -a\left(\ln(n+1) - \ln n - \frac{1}{n}\right) + O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right). \tag{4}$$

Din exemplul 3, $\ln(n+1) = \ln n + \dfrac{1}{n} + \dfrac{2}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, iar de aici:

$$\ln(n+1) - \ln n - \frac{1}{n} = O\left(\frac{1}{n^2}\right) = O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right). \tag{5}$$

Folosind (5), relaţia (4) ne va da:

$$t_{n+1} - t_n = O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right) + O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right) = O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right). \tag{6}$$

Dar cum seria $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ este convergentă, din (6) şi lema 8, rezultă că şirul $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este şir Cauchy. Fie $c = \lim\limits_{n\to\infty} t_n = \lim\limits_{n\to\infty}(w_n - (n + a\ln n)) \in \mathbb{R}$.

Din (6) prin sumare, i.e. folosind lema 8 şi rezultatul din propoziţia 6 a), $\displaystyle\sum_{k=n}^{\infty} \frac{\ln k}{k^2} = O\left(\frac{\ln n}{n}\right)$, deducem:

$$c - t_n = \sum_{k=n}^{\infty}(t_{k+1} - t_k) = O\left(\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\ln k}{k^2}\right) = O\left(\frac{\ln n}{n}\right)$$

sau $t_n = c + r_n$ unde $r_n = O\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)$ i.e.

$$w_n = n + a\ln n + c + r_n \text{ iar } r_n = O\left(\frac{\ln n}{n}\right). \tag{7}$$

Aşadar (i), (ii) sunt demonstrate.

(iii) Vom folosi relaţia: dacă $a_n \to 0$, atunci:

$$\frac{1}{1+a_n} = 1 - a_n + O\left(a_n^2\right) \tag{8}$$

vezi cele ce urmează după propoziţia 5.

Din (7) şi (8) deducem:

$$\frac{1}{w_n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 + \dfrac{a\ln n}{n} + \dfrac{c}{n} + \dfrac{r_n}{n}} = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{a\ln n}{n} - \frac{c}{n} - \frac{r_n}{n} + O\left(a_n^2\right)\right), \tag{9}$$

unde $a_n = \dfrac{a\ln n}{n} + \dfrac{c}{n} + \dfrac{r_n}{n}$.

Avem $a_n = O\left(\dfrac{\ln n}{n}\right) + O\left(\dfrac{\ln n}{n}\right) + \dfrac{1}{n} O\left(\dfrac{\ln n}{n}\right) = O\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)$, de unde

$$a_n^2 = O\left(\frac{\ln^2 n}{n^2}\right), \text{ iar } \frac{r_n}{n} = O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right) = O\left(\frac{\ln^2 n}{n^2}\right). \tag{10}$$

Înlocuind (10) în (9) obţinem:

$$x_n = \frac{1}{w_n} = \frac{1}{n} - a\frac{\ln n}{n^2} - \frac{c}{n^2} + O\left(\frac{\ln^2 n}{n^3}\right). \tag{11}$$

Din (11) rezultă imediat limitele din enunţ.

Propoziţia 9 ne permite să putem obţine şi evaluarea asimptotică de ordinul III pentru un şir binecunoscut. Noutatea faţă de relaţiile binecunoscute o reprezintă ultimul punct din următorul corolar, celelalte fiind binecunoscute, vezi [6, cap. II].

Corolarul 10. *Considerăm şirul de numere reale* $(x_n)_{n\in\mathbb{R}}$ *definit prin* $x_1 \in (0,1)$, $x_{n+1} = x_n - x_n^2$ *pentru orice* $n \in \mathbb{N}$.

Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\ln n}(nx_n - 1) = -1$, *există*

$$\lim_{n\to\infty} \ln n \left(\frac{n}{\ln n}(nx_n - 1) + 1\right) = -c \in \mathbb{R}.$$

Demonstraţie. Avem, după cum este simplu de arătat, $x_n \searrow 0$. Notăm $w_n = \dfrac{1}{x_n}$. Atunci $w_n \to \infty$ şi în plus, din observaţia 2 b):

$$\frac{1}{x_{n+1}} = \frac{1}{x_n} \cdot \frac{1}{1-x_n} = \frac{1}{x_n}\left(1 + x_n + x_n^2 + x_n^3 + o\left(x_n^3\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{x_n} + 1 + x_n + x_n^2 + o\left(x_n^2\right).$$

De aici rezultă, ţinând cont de propoziţia 5, că:

$$\frac{1}{x_{n+1}} = \frac{1}{x_n} + 1 + x_n + O\left(x_n^2\right),$$

i.e.

$$w_{n+1} = w_n + 1 + \frac{1}{w_n} + O\left(\frac{1}{w_n^2}\right).$$

Din propoziţia 10 rezultă enunţul.

Comentariu. *Dacă în evaluările asimptotice de ordinul I şi II rezultatul era constant, la evaluarea asimptotica de ordinul III, limita, care există şi este un număr real, va depinde de primul termen* $x_1 \in (0, 1)$.

În măsura în care spaţiul editorial va permite vom reveni indicând procedeul prin care se obţin evaluări asimptotice până la ordinul VI inclusiv.

Bibliografie

[1] N. Bourbaki, *Fonctions d'une variable reelle*, *(Theorie elementaire)*, Paris, Hermann, 1961.

[2] N. G. De Bruijn, *Asymptotic methods in analysis*, Dower Publications, Inc., New York, 1981.

[3] B. M. Makarov, M. G. Goluzina, A. A. Lodkin, A.N. Podkorytov, *Selected problems in real analysis*, în limba rusă, sau, Transl. Math. Monographs, 107, A.M.S., 1992.

[4] G. Polya, G. Szegö, *Problems and theorems in analysis I*, Springer Verlag, 1998.

[5] D. Popa, *Evaluări asimptotice pentru serii şi integrale*, Gazeta Matematică, seria A, nr.1, 2001, 4-15.

[6] D. Popa, *Exerciţii de analiză matematică*, Colecţia Biblioteca SSMR, Editura Mira, Bucureşti 2007.

Clifford chain for equal ellipses

by Alexandru Bobe and Wladimir Boskoff[1)]

Abstract. The elementary Tzitzeica-Johnson problem has been known by Tzitzeica since 1908 (see e.g. [8], p.160; [5], p. 16; or [6], p.86) and it is included as Problem 197 in the sixth edition of his problem book [7]. It was also known and published by Johnson in *Amer. Math. Monthly* in [4], and was proposed in a mathematical competition in Hungary in 1923 (according to [8], p.161). The statement of Tzitzeica-Johnson theorem in Euclidean geometry is the following: *Consider three circles of equal radii R and centers O_1, O_2, O_3 that have a common point H. They intersect also two by two in three other points different than H, denoted A, B, C. Then the circumradius of ΔABC is also R.* It is known that Tzitzeica-Johnson configuration is equivalent to Euler's identity in a triangle and to Poncelet's ciclicity theorem (see [5], pp.179-180). Barbilian showed (see [1]) how the configuration can be extended to more than four circles, producing a Clifford chain. Our goal is to extend the configuration to ellipses and to see under which conditions the previous results still hold. The intrinsec properties of the Euclidian geometry are the only used in all proofs of this article.

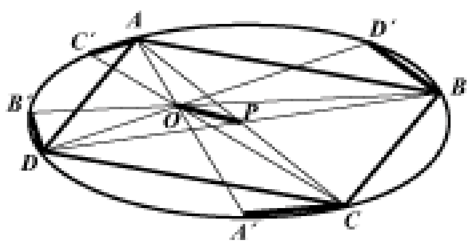
Keywords: Clifford chain, Tzitzeica, ellipses.

MSC : 51N20, 01A60

1. Introduction

First of all, for the future developments, we have to prove two results concerning the geometry of the ellipse.

Lemma 1. *Let $ABCD$ be a parallelogram inscribed in an ellipse $\mathcal{E}$, and $\{P\} = AC \cap BD$. Then the center O of the ellipse coincide with P.*



Proof. We suppose that $P \neq O$. Let us denote with A', B', C', D' the symmetrical points of A, B, C, D. The points A', B', C' and D' lie on $\mathcal{E}$ because O is a symmetry center for the ellipse.

The four segments AC', BD', CA' and DB' are parallel to OP and equal with $2{\cdot}OP$ because OP is a midline in the triangles ACC', BDD', CAA' and DBB', respectively. But for a given direction OP it exists at most 2 parallel and equal segments to the edges on the ellipse. Thus, we have that $P = O$.

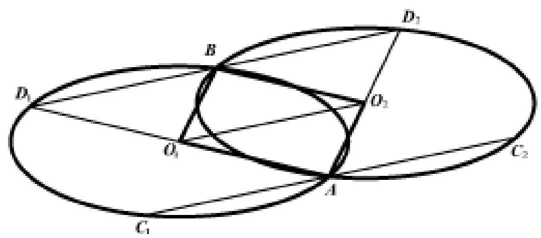
Definition 1.1. *Two ellipses having parallel major axis and the same semi-axes lengths are called equal.*

We denote by $\mathcal{E}_1(O_1, a, b)$ and $\mathcal{E}_2(O_2, a, b)$ such two ellipses, where O_1, O_2 are the centers, and a, b are the lengths of the major semiaxis and of the minor semiaxis, respectively.

1) Universitatea Ovidius din Constanţa

Lemma 2. *Let $\mathcal{E}_1(O_1,a,b)$ and $\mathcal{E}_2(O_1,a,b)$ be two equal ellipses. If $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2 = \{A,B\}$ then AO_1BO_2 is a parallelogram.*

Proof. We construct C_1C_2 through A and D_1D_2 through B such that C_1C_2 and D_1D_2 are parallel to O_1O_2, $C_1, D_1 \in \mathcal{E}_1$, $C_2, D_2 \in \mathcal{E}_2$.



Since the translation $O_1 \longrightarrow O_2$ overlaps O_1 over O_2, then $C_1 \longrightarrow A$, $A \longrightarrow C_2$, $D_1 \longrightarrow B$ and $B \longrightarrow D_2$. So, we have that $C_1A \equiv AC_2 \equiv D_1B \equiv$ $\equiv BD_2 \equiv O_1O_2$. It results that C_1ABD_1 and AC_2D_2B are parallelograms. According to Lemma 1 we have that A, O_1 and D_1 are collinear and analogously A, O_2 and D_2 are collinear. Then O_1O_2 is a midline in the triangle D_1AD_2 and this implies that AO_1BO_2 is a parallelogram.

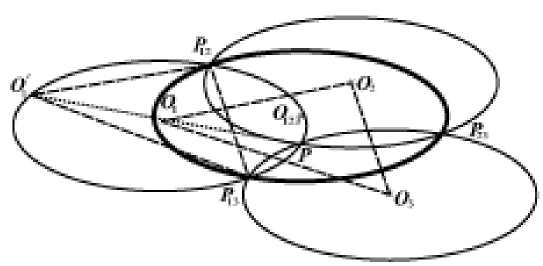
Remark 1. Under the conditions of Lemma , if A, O_1, O_2 have the affixes $0, z_1$ and z_2, respectively, then the affix of B is $z_1 + z_2$.

2. A step forward for the Tzitzeica-Johnson configuration for equal ellipses

First of all, we have to prove the following result:

Theorem 1. If *three equal ellipses $\mathcal{E}_i(O_i,a,b), i = \overline{1,3}$ pass through a common point P, then their other three intersection points P_{ij}, $i,j = \overline{1,3}$, $i<j$ lie on an ellipse equal with the initial ones.*

Proof. Without loosing the generality of the problem we take P as the origin O. We consider that the centers of the ellipses have the following complex number as affixes: $O_1(z_1), O_2(z_2)$ and $O_3(z_3)$. Using Consequence , the intersection points have the affixes: $P_{12}(z_1+z_2), P_{13}(z_1+z_3)$ and $P_{23}(z_2+z_3)$.



We'll prove that P_{12}, P_{13}, P_{23} lie on an ellipse $\mathcal{E}_{123}$ having as center O_{123} with affix $z_1 + z_2 + z_3$. We make the translation $\mathcal{T}(-z_1 - z_2 - z_3)$.

It results that $O_{123}\left(z_1+z_2+z_3\right) \longrightarrow O\left(0\right)$, $P_{12}\left(z_1+z_2\right) \longrightarrow P'_{12}\left(-z_3\right)$, $P_{13}\left(z_1+z3\right) \longrightarrow P'_{13}\left(-z_2\right)$ and $P_{23}\left(z_2+z_3\right) \longrightarrow P'_{23}\left(-z_1\right)$. By symmetry $\mathcal{S}\left(O\right)$ we have the following transformations:

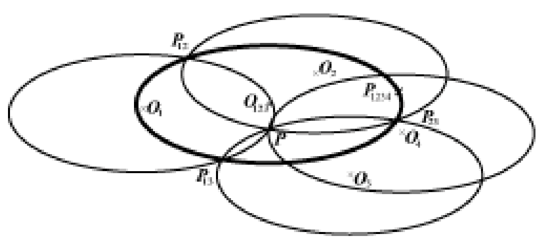
$$P'_{12}\left(-z_3\right) \longrightarrow O_3\left(z_3\right), P'_{13}\left(-z_2\right) \longrightarrow O_2\left(z_2\right), P'_{23}\left(-z_1\right) \longrightarrow O_1\left(z_1\right).$$

Now, we only have to prove that O_1, O_2, O_3 lie on an ellipse equal with the initial ones. Let us observe that if we make the translation $\mathcal{T}\left(z_1\right)$ then $O_1\left(z_1\right) \longrightarrow O'_1\left(2z_1\right)$, $O_2\left(z_2\right) \longrightarrow P_{12}\left(z_1+z_2\right)$, $O_3\left(z_3\right) \longrightarrow P_{13}\left(z_1+z_3\right)$ i.e. the triangle $O_1O_2O_3$ is translated into the triangle $O'_1P_{12}P_{13}$. Taking into account the fact that $O'_1\left(2z_1\right)$ is the symmetrical point of $O\left(0\right)$ with respect to O_1, the triangle $O'_1P_{12}P_{13}$ obviously becomes inscribed into the ellipse $\mathcal{E}_1$.

Having the the Tzitzeica-Johnson configuration for equal ellipses (Theorem 1), we cand make a step forward:

Theorem 2. *Let $\mathcal{E}_i\left(O_i, a, b\right), i=\overline{1,4}$ be four equal ellipses, all passing through a point P and let $\mathcal{E}_i$ and $\mathcal{E}_j$ meet also in P_{ij}, $i,j=\overline{1,4}$, $i<j$. Then the four ellipses (according Theorem 1) $\mathcal{E}_{ijk}\left(O_{ijk}, a, b\right)$, $i,j=\overline{1,4}$, $i<j<k$ through P_{ij}, P_{ik}, and P_{jk} have a common point P_{1234}.*

Proof. Without loosing the generality of the problem we take P to be the origin O. Considering that the centers of the ellipses are $O_i\left(z_i\right), i=\overline{1,4}$, we have from Consequence that the affixes of the intersection points are $P_{ij}\left(z_i+z_j\right)$, $i,j=\overline{1,4}$, $i<j$ and from Theorem we have that the centers of the ellipses $\mathcal{E}_{ijk}$ have the affixes $O_{ijk}\left(z_i+z_j+z_k\right)$, $i,j=\overline{1,4}$, $i<j<k$.



We'll prove by transforming the configuration in two steps that the ellipses $\mathcal{E}_{123}$, $\mathcal{E}_{124}$, $\mathcal{E}_{134}$ and $\mathcal{E}_{234}$ have as common point P_{1234} with the affix $z_1+z_2+z_3+z_4$.

Making the translation $\mathcal{T}\left(-z_1-z_2-z_3-z_4\right)$, we have: $P_{1234} \to O\left(0\right)$, $O_{123} \to O'_{123}\left(-z_4\right)$, $O_{124} \to O'_{124}\left(-z_3\right)$, $O_{134} \to O'_{134}\left(-z_2\right)$ and $O_{234} \to$ $\to O'_{234}\left(-z_1\right)$. Using the symmetry $\mathcal{S}\left(O\right)$, we obtain that $O'_{123} \longrightarrow O_4\left(z_4\right)$, $O'_{124} \longrightarrow O_3\left(z_3\right)$, $O'_{134} \longrightarrow O_2\left(z_2\right)$ and $O'_{234} \longrightarrow O_1\left(z_1\right)$. So we transformed our configuration of four ellipses $\mathcal{E}_{123}$, $\mathcal{E}_{124}$, $\mathcal{E}_{134}$, $\mathcal{E}_{234}$ in the initial configuration for which we know that O is the common point. By inverting the two transformations $\left(\mathcal{T}\left(z_1+z_2+z_3+z_4\right) \circ \mathcal{S}\left(O\right)\right)$ we have that the ellipses $\mathcal{E}_{123}$, $\mathcal{E}_{124}$, $\mathcal{E}_{134}$ and $\mathcal{E}_{234}$ have as common point $P_{1234}\left(z_1+z_2+z_3+z_4\right)$.

3. The generalization

Theorem 2 asserts the existence of a common point P_{1234} of intersection of the four ellipses determined by Theorem 1 in a configuration having four equal ellipses passing through a given point P. Is natural to think forward what's happen in a configuration of five equal ellipses passing through a common point P. According to Theorem 2, each four determine a point. Do the five points obtained above lie on an ellipse equal to the given one? If so, we can continue. Consider a configuration of six equal ellipses passing through a common point P. Each five will produce one ellipse equal to the given ones. Will the six ellipses meet in a common point P_{123456}? Can we obtain such results? Can we find the general results corresponding to Theorem 1 and Theorem 2 ? The answer is yes.

Definition 3.1. *In the Euclidian plane, a sequence of theorems of increasing complexity, each building on the last in a natural progression are called Clifford Chain Theorems.*

Let us prove the general results corresponding to Theorem 1 and Theorem 2:

Theorem 3. *Given $2n+1$ equal ellipses $\mathcal{E}_i\left(O_i,a,b\right), i=\overline{1,2n+1}$, $n\in\mathbb{N}^*$, all passing through a point P, then the $2n+1$ points $P_{1\ldots\bar{i}\ldots 2n+1}$, $i=\overline{1,2n+1}$, each given by the intersection of the $2n$ ellipses $\mathcal{E}_{12\ldots\bar{i}\ldots\bar{j}\ldots 2n+1}$, $j=\overline{1,2n+1}$, $j\neq i$, lie on an ellipse equal with the initial ones (where $\bar{i}$ means the omission of i).*

Proof. Without loosing the generality of the problem we take P to be the origin O. We consider that the centers of the ellipses have the affixes $O_i\left(z_i\right)$. We want to prove that the $2n+1$ points lie on an ellipse having as center the point $O_{1\ldots 2n+1}$ with affix $z_1+\ldots+z_{2n+1}$.

Following the ideas from Theorem 1 we'll make three transformations:

$$P_{1\ldots\bar{i}\ldots 2n+1}\left(z_1+\ldots+\overline{z_i}+\ldots+z_{2n+1}\right)\overset{\mathcal{T}(-z_1-\ldots-z_{2n+1})}{\longrightarrow}P'_{1\ldots\bar{i}\ldots 2n+1}\left(-z_i\right),$$

$$P'_{1\ldots\bar{i}\ldots 2n+1}\left(-z_i\right)\overset{\mathcal{S}(O)}{\longrightarrow}O_i\left(z_i\right), i=\overline{1,2n+1},$$

$$O_1,O_i\left(z_i\right)\overset{\mathcal{T}(z_1)}{\longrightarrow}O'_1\left(2z_1\right),P_{1i}\left(z_1+z_i\right), i=\overline{2,2n+1}.$$

The last points $O'_1\left(2z_1\right),P_{1i}\left(z_1+z_i\right), i=\overline{2,2n+1}$ lie on the ellipse $\mathcal{E}_1$ because $O'_1\left(2z_1\right)$ is the symmetrical point of $O\left(0\right)$ in the ellipse $\mathcal{E}_1$, and the points $P_{1i}\left(z_1+z_i\right)$ are the intersection points of $\mathcal{E}_1$ with $\mathcal{E}_i, i=\overline{2,2n+1}$.

Making the inverse transformations we conclude that the $2n+1$ points $P_{1\ldots\bar{i}\ldots 2n+1}, i=\overline{1,2n+1}$ lie on the ellipse $\mathcal{E}_{1\ldots 2n+1}\left(O_{1\ldots 2n+1},a,b\right)$.

Theorem 4. *Given $2n+2$ equal ellipses $\mathcal{E}_i\left(O_i,a,b\right)$, $i=\overline{1,2n+2}$, $n\in\mathbb{N}^*$, all passing through a point P, then the $2n+2$ ellipses $\mathcal{E}_{1\ldots\bar{i}\ldots 2n+2}\left(O_{1\ldots\bar{i}\ldots 2n+2},a,b\right)$, $i=\overline{1,2n+2}$, each determined (according Theorem 3) by the $2n+1$ points $P_{1\ldots\bar{i}\ldots\bar{j}\ldots 2n+2}$, $j=\overline{1,2n+2}, j\neq i$, have a common point $P_{1\ldots 2n+2}$.*

Proof. We'll prove that the $2n+2$ ellipses meet in $P_{1\ldots 2n+2}$ witch has the affix $z_1+\ldots+z_{2n+2}$. Consider two transformations:

$$O_{1\ldots\bar{i}\ldots 2n+2}\left(z_1+\ldots+\overline{z_i}+\ldots+z_{2n+2}\right)\overset{\mathcal{T}(-z_1-\ldots-z_{2n+2})}{\longrightarrow}O'_{1\ldots\bar{i}\ldots 2n+2}\left(-z_i\right),$$

$$O'_{1\ldots\bar{i}\ldots 2n+2}\left(-z_i\right)\overset{\mathcal{S}(O)}{\longrightarrow}O_i\left(z_i\right),i=\overline{1,2n+2}.$$

These transformations overlap the ellipses $\mathcal{E}_{1\ldots\bar{i}\ldots 2n+2}$ to the initial ellipses $\mathcal{E}_i, i=\overline{1,2n+2}$ which meet in $P=O$. But in the same time $P_{1\ldots 2n+2}$ is overlapped to O, thus we can conclude that $P_{1\ldots 2n+2}$ is the common point of the $2n+2$ ellipses $\mathcal{E}_{1\ldots\bar{i}\ldots 2n+2}$, $i=\overline{1,2n+2}$.

References

[1] D. Barbilian, *Pagini inedite*, volume 2, Editors G. Barbilian and V. G. Vodă, Editura Albatros, 1984.

[2] W. Boskoff, L. Homentcovschi, B. Suceava, *Tzitzeica-Johnson's Theorem. The History of a Famous Configuration* (to appear).

[3] A. Emch, *Remarks on the foregoing circle theorem*, Amer. Math. Monthly, **23**(1916), 162–164.

[4] R. A. Johnson, *A Circle Theorem*, Amer. Math. Monthly, **23**(1916), 161–162.

[5] N. N. Mihăileanu, *Complementary Lessons in Geometry* (in Romanian: *Lecţii complementare de geometrie*), Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1976.

[6] N. N. Mihăileanu, *A Problem Book of Synthetic and Projective Geometry* (in Romanian: *Culegere de probleme de geometrie sintetică şi proiectivă*), Editura didactică şi pedagogică, 1971.

[7] G. Ţiţeica, *Problems of Geometry* (in Romanian: *Probleme de geometrie*, Sixth Edition, with foreword by Gh. D. Simionescu, Editura Tehnică, 1962, reprinted 1981.

[8] Gh. Vodă, *The Charm of Old-Fashioned Geometry* (in Romanian: *Vraja geometriei demodate*), Editura Albatros, 1983.

Teste de primalitate şi de factorizare. Aplicaţii

Daniela Chendrea[1)], Cristina Flaut[2)] şi Mihai Polceanu[3)]

Abstract. There are reviewed some primality tests.
Keywords: prime numbers, primality tests.
MSC : 11-01.

Problema verificării primalităţii unui număr sau a descompunerii în factori primi este o problemă uşoară din punct de vedere teoretic dar foarte grea din punct de vedere practic, atunci când numerele sunt foarte mari. Tocmai pe această dificultate, a descompunerii în factori primi a numerelor foarte mari, se bazează securitatea unui sistem criptografic şi anume criptosistemul cu cheie publică RSA.

În cele ce urmează, dorim să arătăm unele aplicaţii ale Micii Teoreme a lui Fermat în verificarea primalităţii unui număr.

Mica teoremă a lui Fermat. *Fie p un număr prim. Atunci pentru orice $a \in \mathbb{Z}$ cu $(a,p)=1$ avem $a^{p-1} \equiv 1 \mathrm{mod} p$.*

Propoziţia 1. *Este următoarea reciprocă a Micii Teoreme a lui Fermat adevărată:*

„Fie $p \in \mathbb{N}^*$, $p \neq 1$. Dacă $x^{p-1} \equiv 1$ mod p pentru orice x, cu x nedivizibil prin p, atunci p este prim"?

Demonstraţie. Dacă pentru orice x astfel încât $p \nmid x$ avem $x^{p-1} \equiv \equiv 1 \bmod p$, atunci, orice element nenul $\widehat{x} \in \mathbb{Z}_p$ are un invers şi anume $\widehat{x}^{p-2}$. Deci p este număr prim.

Propoziţia 2. *Este următoarea reciprocă a Micii Teoreme a lui Fermat adevarată:*

Fie $p \in \mathbb{N}^*$, $p \neq 1$. Dacă $x^{p-1} \equiv 1 \mathrm{mod}\, p$ pentru orice x, cu $(x,p)=1$ atunci p este prim?

Demonstraţie. Nu, în acest caz sunt inversabile în $\mathbb{Z}_p$ doar acele elemente $\widehat{x}$ cu proprietatea că $(x,p)=1$, deci nu toate. Obţinem că p nu este prim.

Observaţia 3

i) Se observă diferenţa dintre enunţurile Propoziţiilor 1 şi 2. În cazul în care p este prim, pentru un număr natural nenul a, condiţia $(a,p)=1$ este echivalentă cu $p \nmid a$. Dacă p nu este prim, se poate întâmpla ca $p \nmid a$ dar $(a,p)=d>1$.

[1)]Şcoala generală Ciprian Porumbescu din Constanţa.
[2)]Facultatea de Matematică şi Informatică, Universitatea Ovidius din Constanţa.
[3)]Facultatea de Matematică şi Informatică, Universitatea Ovidius din Constanţa.

ii) Dacă vom calcula a^{n-1} mod n pentru un $a \in \{2, 3, ..., n-1\}$ cu $(a, n) = 1$ şi nu vom găsi 1, atunci vom şti că n este compus.

iii) Dacă aplicăm testul Fermat pentru numărul n şi anumite baze $a \in \{2, 3, ..., n-1\}$ cu $(a, n) = 1$ şi găsim că $a^{n-1} \equiv 1$ mod$n$, putem trage concluzia că n este probabil prim. Ca să ştim cu siguranţă că n este prim, trebuie ca să facem verificările pentru orice bază $a \in \{2, 3, ..., n-1\}$. Pentru numere foarte mari, acest lucru este practic imposibil.

Cum putem calcula mai repede a^{n-1}mod n pentru un număr n foarte mare? Putem face acest lucru cu exponenţierea rapidă pe care o prezentăm în cele ce urmează.

Exponenţierea rapidă

Dacă avem daţi întregii pozitivi, a, k, n, vrem să calculăm:

$$a^k \text{ mod } n.$$

Aceasta înseamnă să găsim intregul b satisfăcând relaţiile:

$$b \equiv 1 \bmod n, \qquad 0 \leq b < n.$$

Cât durează să facem acest calcul? Metoda obişnuită este să calculăm $a_2 = a \cdot a$, să-l reducem pe a_2 modulo n, să calculăm $a_3 = a_2 \cdot a$, să-l reducem pe a_3 modulo n, etc. Dacă am calculat $a_{k,}$ am găsit răspunsul facând următoarele calcule: cele k operaţii în care fiecare operaţie constă dintr-o multiplicare şi o reducere modulo n. O metodă mai bună ar fi exponenţierea rapidă pe care o prezentam în cele ce urmează.

Exemplul 4. ([5]) Fie $k = 1000$. Îl vom scrie în baza 2, şi obţinem:

$$1000 = 2^3 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9.$$

Atunci:

$$a^{1000} = a^{2^3} \cdot a^{2^5} \cdot a^{2^6} \cdot a^{2^7} \cdot a^{2^8} \cdot a^{2^9}.$$

Numărul a^{2^i} poate fi calculat doar prin i multiplicări a ridicărilor succesive la pătrat. Notăm $A_0 = a$ şi facem următoarele calcule:

$$A_1 = A_0 \cdot A_0 = a^2 \text{ mod } n$$

$$A_2 = A_1 \cdot A_1 = a^4 \text{ mod } n$$

$$A_3 = A_2 \cdot A_2 = a^{2^3} \text{ mod } n$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A_9 = A_8 \cdot A_8 = a^{2^9} \text{ mod } n.$$

Vom avea:

$$a^{1000} = A_3 \cdot A_5 \cdot A_6 \cdot A_7 \cdot A_8 \cdot A_9 \text{ mod } n.$$

Deci vom avea 9 operaţii să-i găsim pe A_i şi încă 6 operaţii pentru calculul lui a^{1000}. Este mult mai convenabil decât 1000 de operaţii efectuate cu metoda iniţială. Dacă numărul $k \approx 10^{100}$ se salvează foarte mult din calcule.

În general, pentru a calcula a^k mod n vom scrie:

$$k = k_0 + k_1 \cdot 2 + k_2 \cdot 2^2 + k_3 \cdot 2^3 + ... + k_r \cdot 2^r,$$

unde fiecare k_i este 0 sau 1. Pe urmă, vom calcula:

$$A_0 = a,\ A_1 = A_0^2,\ A_2 = A_1^2, \dots, A_r = A_{r-1}^2,$$

toate calculele făcându-se modulo n. În final, vom găsi a^k ca fiind:

$$a^k = \text{produs de } A_i \text{ pentru } k_i = 1.$$

Vom face r operaţii pentru a găsi A_i şi încă cel mult r operaţii pentru a-l calcula pe a^k. Viteza acestei metode depinde de mărimea lui r. (Presupunem că avem $k_r = 1$ deoarece k ar avea o dezvoltare în baza doi mai mică). Obţinem:

$$k = k_0 + k_1 \cdot 2 + k_2 \cdot 2^2 + k_3 \cdot 2^3 + ... + k_r \cdot 2^r \geq 2^r,$$

deci $r \leq \log_2 k$.

Propoziţia 5. ([5]) *Se poate calcula* a^k mod n *în cel mult* $2\log_2 k$ *operaţii, unde fiecare operaţie constă dintr-o multiplicare şi o reducere modulo* n.

Deoarece funcţia logaritm creşte foarte încet, obţinem o metodă foarte practică de a calcula a^k mod n pentru un k foarte mare.

Definiţia 6. *Fie N un întreg impar. Numărul N se numeşte pseudo-prim în baza a, cu* $\gcd(a, N) = 1$, *dacă* $a^{N-1} \equiv 1 \textit{ mod } N$. *Spunem că acest număr trece testul lui Fermat.*

Se numeşte număr Carmichael un număr N care trece testul Fermat pentru orice bază a cu $\gcd(a, N) = 1$. (De exemplu, $561 = 3 \cdot 11 \cdot 17$ este primul număr Carmichael. Următoarele numere Carmichael sunt: 1105, 1729, 2465, 2821, 6601, 8911, 10585, 15841, 29341, $\dots$. Există o infinitate de numere Carmichael.)

Propoziţia 7. *Fie n un număr natural nenul impar, $n \geq 7$ şi* $N = \underbrace{\overline{11...1}}_{n-1 \text{ ori}}$. *Dacă $n \mid N$, atunci n este prim. Este adevarată această afirmaţie?*

Demonstraţie. Nu este adevarată. Se observă că $N = \dfrac{10^{n-1} - 1}{9}$. Cum $n \mid N$, rezultă că $10^{n-1} - 1 = 9nt$, $t \in \mathbb{N}^*$. Obţinem că $10^{n-1} \equiv 1 \text{mod} n$. Atunci n este sau prim, sau pseudo-prim în baza 10, cu $(n, 10) = 1$.

Observaţia 8. În propoziţia anterioară, faptul că $(n, 10) = 1$ este de la sine înţeles pentru că niciodată nu vom verifica primalitatea unui număr dacă el are ultima cifră 2 sau 5. Deci, baza 10 este foarte bine aleasă. Primul contraexemplu în acest sens, este al treilea număr Carmichael şi anume 1729. Utilizând **Python**, acest test a mers pentru toate numerele până la 1729 şi chiar şi pentru altele foarte mari, după cum se vede în programul care urmează:

```
Cod:
------------------------------
def mytest(n):
    """Test primalitate"""
    c=n-1
    nrstr=''
    while c!=0:
        nrstr=nrstr+str(1)
        c=c-1
    if int(nrstr)%n==0:
        return '(prime)'
    else:
        return '(not prime)'
    return '(error)'
------------------------------
Rezultat:

>>> mytest(561)
'(not prime)'
>>> mytest(1729)
'(prime)'
```

Definiţia 9. *Fie N un întreg impar. Dacă $N - 1 = 2^t s$, cu s un număr întreg, atunci numărul N se numeşte puternic pseudo-prim în baza a, cu $\gcd(a, N) = 1$, dacă $a^s \equiv 1 \bmod N$ sau există un întreg $k, 0 \leq k < t$ astfel încât $a^{2^k s} \equiv -1 \bmod N$.*

Testul Miller-Rabin

Propoziţia 10. ([3]) *Fie $p > 2$ un număr prim şi $p - 1 = 2^t s$, cu s un număr impar. Fie $a \in \mathbb{Z}$, cu $\gcd(a, p) = 1$. Atunci $a^s \equiv 1 \bmod p$ sau există un întreg $k, 0 \leq k < t$ astfel încât $a^{2^k s} \equiv -1 \bmod p$.*

Demonstraţie. Dacă notăm $a_k = a^{2^k s} \bmod p$, $0 \leq k \leq t$, din Mica teoremă a lui Fermat, avem $a_t \equiv 1 \bmod p$. Atunci avem că $a_k \equiv 1 \bmod p$, pentru orice k, sau există $k \in \{1, 2, ..., t-1\}$, cu $p \nmid (a_k - 1)$ şi $a_{k+1} \equiv$ $\equiv 1 \bmod p$.

Rezultă că $a_{k+1} = a_k^2 \equiv 1 \bmod p$, deci $a_k \equiv -1 \bmod p$.

Propoziţia 11. *Fie n un întreg impar şi $n-1=2^t s$, cu s un număr impar. Dacă găsim un element $a \in \mathbb{Z}$, $2 \leq a \leq n-1$, astfel încât $n \nmid (a^s-1)$ şi $n \nmid (a^{2^k s}+1)$, pentru orice $k \in \{1, 2, ..., t-1\}$, atunci n nu este un număr prim.*

Algoritmul

Input: N un număr întreg impar pentru a fi testat dacă este prim.
Output: Compus, dacă N este compus, altfel N poate fi prim.

1) Fie N un număr intreg. Îl vom scrie $N-1=2^t s$.

2) Căutăm întâmplător un întreg a astfel încât $1 < a < N$. Dacă, pentru orice k, $N \nmid (a^s-1)$ şi $N \nmid (a^{2^k s}+1)$, atunci N este compus. Altfel, N este probabil prim.

Observaţia 12. ([4]) Complexitatea acestui algoritm este $O(k \times \log^3 N)$, unde k este numarul diferitelor valori ale lui a pe care le testăm. Din păcate, există numere care trec acest test şi care sunt compuse. De exemplu, numărul N de mai jos nu este prim dar trece testul Miller-Rabin pentru bazele $a \in \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31\}$:

$$N = 1195068768795265792518361315725116351898245581 =$$
$$= 24444516448431392447461 \cdot 48889032896862784894921.$$

Testul Miller-Rabin este un test bun de primalitate.

Dacă ştim că un număr nu este prim, atunci dorim să-l descompunem în factori primi. Cum putem face acest lucru? O primă metodă ar fi să calculăm toţi divizorii până la $\sqrt{n}$, şi atunci cu siguranţă vom găsi un factor pentru n. Această procedură este, în general, ineficientă. Un procedeu mai bun ar fi metoda ρ (RHO) a lui Pollard.

Metoda RHO (sau metoda MONTE CARLO)

Este datorată lui *J. M. Pollard* şi are ca punct de plecare „paradoxul zilei de naştere“: dacă într-o cameră sunt mai mulţi de 23 de oameni, atunci există doi, dintre cei numerotaţi impar, care să aibă aceeaşi zi de naştere. Putem reformula astfel: dacă avem o mulţime cu n elemente şi alegem la întâmplare o metodă de parcurgere a acestei mulţimi, atunci ne aşteptăm ca după $1, 2, \ldots, \sqrt{n}$ paşi să ne întoarcem în unul din locurile în care am mai fost. Exploatând acest lucru obţinem metoda ρ a lui Pollard. Acest algoritm a fost primul algoritm care a fost semnificativ mai rapid decât „testul $\sqrt{n}$“.

Algoritmul

Se caută o funcţie $f : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$, de obicei $f(x) = x^2+1$. Fie p un factor prim necunoscut al lui n. Se porneşte de la o valoare iniţială $x = x_0$, şi se *calculează succesiv* $x_1 = f(x_0), x_2 = f(f(x_0)), x_3 = f(f(f(x_0)))$..... *Definim deci*:

$$x_{j+1} = f(x_j),\ j = 0, 1, 2, ...\ \text{şi}\ \ y_k = x_k \mod p.$$

Această secvenţă y_k *este periodică şi se arată că această perioadă este de ordinul* $\sqrt{p}$. *Dacă avem* $y_{k+t} = y_k$ implică $x_{k+t} \equiv x_k \bmod p$, *deci* $d = \gcd(x_{k+t} - x_k, n) > 1$. *Avem foarte rar* $d = n$. *În felul acesta obţinem un divizor al lui* n *nu neapărat prim.*

Exemplul 13. 1) $n = 91$. Luăm $f(x) = x^2 + 1, x_0 = 1$. Atunci avem $x_1 = 2 \bmod n$, $x_2 = 5$, $x_3 = 26 \bmod n$, $x_4 = 40 \bmod n$, etc. Avem:

$\gcd(x_2 - x_1, 91) = \gcd(3, 91) = 1$, $\gcd(x_3 - x_2, 91) = \gcd(21, 91) = 7$, deci 7 este factor.

2) $n = 1357$ Luăm $f(x) = x^2 + 1$, $x_0 = 0$. Avem $x_1 = 1 \bmod n$,
$x_2 = 2 \bmod n$, $x_3 = 5 \bmod n$, $x_4 = 26 \bmod n$, $x_5 = 677 \bmod n$,
$x_6 = 1021 \bmod n$, $x_7 = 266 \bmod n$, $x_8 = 193 \bmod n$, $x_9 = 611 \bmod n$,
$x_{10} = 147 \bmod n$, $x_{11} = 1255 \bmod n$, $x_{12} = 906 \bmod n$ etc.
Se observă că $\gcd(x_{12} - x_6, n) = 23$, deci $1357 = 23 \cdot 59$.

Complexitatea: $O(n^{1/4} \ln^2 n)$.

Metoda RHO se aplică cu succes pentrut numere ce au între 8 şi 15 cifre.

BIBLIOGRAFIE

[1] J. H. Buchmann, *Introduction to Cryptography,* Springer Verlag, 2004.
[2] A. M. Cohen, H. Cuypers, H. Sterk, *Algebra interactive!*, Springer Verlag, 1999.
[3] C. Gherghe, D. Popescu, *Criptografie. Coduri. Algoritmi*, Editura Universităţii din Bucureşti, 2005.
[4] N. Koblitz, *A Course in Number Theory and Cryptography,* Springer Verlag, 1994.
[5] J. H. Silverman, J. Tate, *Rational points on elliptic curves*, Springer-Verlag, New-York, 1992.

Asupra teoremelor lui Aoki şi Rassias de stabilitate pentru ecuaţii funcţionale[1)]

de Claudia Zaharia[2)]

Abstract. There are presented the theorems of stability of Aoki and Rassias.

Keywords: stability.
MSC : 34Dxx.

1. Introducere

Studiul problemelor de stabilitate pentru ecuaţii funcţionale are la origine o problemă propusă în 1940 de către *S. M. Ulam* relativ la stabilitatea homomorfismelor de grupuri, anume:

Fie G un grup metric cu metrica d. Dat $\varepsilon > 0$, există $k > 0$ astfel încât dacă o funcţie $f : G \to G$ satisface:

$$d\left(f(x \cdot y), f(x) \cdot f(y)\right) \leq \varepsilon, \quad \forall\, x, y \in G,$$

există un automorfism a al lui G pentru care:

$$d\left(f(x), a(x)\right) \leq k\varepsilon, \quad \forall\, x \in G?$$

Un an mai târziu, *D. H. Hyers* oferă un răspuns afirmativ pentru cazul spaţiilor Banach.

Teorema 1. ([4]) *Fie E şi F două spaţii Banach şi $f : E \to F$ o funcţie astfel încât pentru un $\delta > 0$ are loc*:

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \leq \delta, \quad \forall\, x, y \in E.$$

Atunci:

(i) *pentru orice $x \in E$, există $\phi(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(2^n x)}{2^n}$, ϕ este aditivă şi*:

$$\|f(x) - \phi(x)\| \leq \delta, \quad \forall\, x \in E.$$

Mai mult, ϕ este unica funcţie aditivă care satisface inegalitatea de mai sus.[3)]

ii) *Dacă, în plus, pentru orice $x \in E$, funcţia $t \mapsto f(tx)$ este continuă, atunci ϕ este liniară.*

Scopul lucrării de faţă este de a prezenta (v. Teorema 5 şi Teorema 7) demonstraţii directe pentru proprietăţile de omogenitate ale soluţilor exacte

---

1) Lucrarea a fost prezentată la faza naţională a concursului „Traian Lalescu“, primind premiul III în cadrul secţiunii de Ecuaţii funcţionale şi Matematici Aplicate (secţiunea a II-a). Coordonatorul lucrării este prof. univ. *Viorel Radu* de la Universitatea de Vest din Timişoara. (N. R.)

2) Universitatea de Vest din Timişoara

3) f se numeşte soluţie aproximativă ($\delta-$ soluţie), iar ϕ se numeşte soluţie exactă pentru ecuaţia lui Cauchy. (N. A.)

corespunzătoare soluţiilor aproximative ale ecuaţiilor funcţionale aditive şi cuadratice în cazul stabilităţii Ulam- Hyers generalizate.

2. Stabilitate generalizată pentru ecuaţia lui Cauchy

O primă generalizare a rezultatului lui *Hyers* (i) este dată de *T. Aoki* în 1950.

Teorema 2. (Aoki, [1]). *Fie E şi F două spaţii Banach şi $f : E \to F$. Dacă există $\delta > 0$ şi $p \in [0, 1)$ astfel încât*:

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \leq \delta \left(||x||^p + ||y||^p\right), \quad \forall\, x, y \in E,$$

atunci există o unică funcţie aditivă $\phi : E \to F$ cu:

$$\|f(x) - \phi(x)\| \leq \delta ||x||^p.$$

Pentru $p = 0$ se obţine teorema lui Hyers (i). În 1978, *Th. M. Rassias* ([7]) reia acest rezultat şi, în ipoteza suplimentară (ii) că $t \mapsto f(tx)$ este continuă pentru orice $x \in E$, demonstrează că ϕ este liniară. *Z. Gajda* ([3]) obţine un rezultat similar pentru cazul $p > 1$, arată că teorema este valabilă şi pentru $p < 0$, dar nu şi în cazul $p = 1$, oferind un contraexemplu în acest sens. O prezentare unitară a tuturor acestor rezultate este următoarea

Teorema 3 (Hyers - Aoki - Rassias - Gajda). *Fie E un spaţiu normat real, F un spaţiu Banach real, $f : E \to F$ o funcţie şi $p \in [0, \infty) \setminus \{1\}$ astfel încât are loc*:

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \leq \delta \left(||x||^p + ||y||^p\right), \quad \forall\, x, y \in E. \tag{1}$$

Atunci există o unică funcţie aditivă $\phi : E \to F$ astfel încât:

$$\|f(x) - \phi(x)\| \leq \frac{2\delta}{|2 - 2^p|} ||x||^p, \quad \forall\, x \in E. \tag{2}$$

Acest fenomen de stabilitate este numit *stabilitate generalizată de tip Hyers- Ulam*. Demonstraţiile folosesc ideea lut *Hyers*, anume de a construi explicit funcţia aditivă $\phi(x)$ astfel:

1. Dacă $p < 1$, $\phi(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2^n} f\left(2^n x\right)$;
2. Dacă $p > 1$, $\phi(x) = \lim\limits_{n\to\infty} 2^n f\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$;

Demonstraţia cazului $p \in [0, 1)$, dată de *Aoki*, se găseţe în [1]. Celelalte cazuri se tratează similar.

În [5] este prezentată o altă demonstraţie, care utilizează următoarea alternativă de punct fix:

Teorema 4. ([8]) *Fie (X, d) un spaţiu metric complet generalizat şi $J : X \to X$ o contracţie strictă) adică*:

$$\exists\, L < 1 : \ d(Jx, Jy) \leq L d(x, y), \quad \forall\, x, y \in X.$$

Atunci, pentru fiecare element x din X fixat, este posibilă una din următoarele situaţii:

$$d\left(J^n x, J^{n+1}x\right) = +\infty, \quad \forall\, n \geq 0 \tag{A_1}$$

sau:

$$d\left(J^n x, J^{n+1}x\right) < +\infty, \quad \forall\, n > n_0 \tag{A_2}$$

pentru un n_0 natural. Dacă are loc (A_2), *atunci*:

(A_{21}) *Şirul* $(J^n x)$ *este convergent la y^*, un punct fix al lui J*;

(A_{22}) y^* este unicul punct fix al lui J în $Y = \{y \in X : d\,(J^{n_0}x, y) < \infty\}$;

(A_{23}) $d(y, y^*) \leq \dfrac{1}{1-L} d(y, Jy)$, pentru orice $y \in Y$.

Dacă punctul fix y^* există, el nu este în mod necesar unic în tot spaţiul X, ci poate depinde de x. În cazul în care (A_2) are loc, (Y, d) este spaţiu metric complet şi $J(Y) \subset Y$. Prin urmare, proprietăţile $(A_{21}) - (A_{23})$ derivă din principiul contracţiei al lui Banach.

În fapt, Teorema 4 se aplică operatorului funcţional definit prin $Jh(x) = \dfrac{1}{2}h(2x)$ sau $Jh(x) = 2h\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

Teorema 5. *Dacă sunt satisfăcute ipotezele teoremei* 3 *şi în plus aplicaţia $t \mapsto f(tx)$ este continuă pentru orice $x \in E$, atunci funcţia ϕ care verifică* (2) *este liniară.*

Observaţie. În [7], *Rassias* demonstrează acest fapt cu ajutorul unei teoreme a lui Banach referitoare la continuitatea funcţiilor măsurabile. Propunem în continuare o demonstraţie mai simplă decât cea dată de *Rassias*. Aceasta foloseşte doar proprietatea de continuitate a normei.

Demonstraţie. Fie $x \in E$ fixat. Definim: $\overline{f} : \mathbb{R} \to F$ prin $\overline{f}(t) = f(tx)$, funcţie care din ipoteză va fi continuă. Deoarece

$$||\overline{f}(t+s) - \overline{f}(t) - \overline{f}(s)|| = ||f(tx+sx) - f(tx) - f(sx)||,$$

presupunerea:

$$||f(tx+sx) - f(tx) - f(sx)|| \leq \delta\left(||tx||^p + ||sx||^p\right) = \delta\left(|t|^p + |s|^p\right)||x||^p,$$

se transcrie echivalent:

$$\left\|\overline{f}(t+s) - \overline{f}(t) - \overline{f}(s)\right\| \leq \delta'\left(|t|^p + |s|^p\right),$$

pentru $\delta' = \delta||x||^p$.

Aplicând Teorema 3 pentru $\overline{f}$ obţinem că există o unică funcţie $\overline{\phi} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aditivă cu proprietatea că

$$\left\|\overline{f}(t) - \overline{\phi}(t)\right\| \leq \frac{2\delta'}{|2-2^p|}|t|^p, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Deoarece $\overline{\phi}$ este aditivă, $\overline{\phi}(t) = t\overline{\phi}(1)$, pentru orice $t \in \mathbb{Q}$. Vom arăta că această relaţie are loc pentru orice t real.

Fie $t \in \mathbb{R}$ şi $(t_n) \subset \mathbb{Q}$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = t$. Atunci:

$$\left\|\overline{f}(t) - \overline{\phi}(1)\right\| = \left\|\lim_{n\to\infty} \overline{f}(t_n) - \lim_{n\to\infty} t_n\overline{\phi}(1)\right\| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\|\overline{f}(t_n) - \overline{\phi}(t_n)\right\| \le \lim_{n\to\infty} \frac{2\delta'}{|2-2^p|}|t_n|^p = \frac{2\delta'}{|2-2^p|}|t|^p.$$

Aplicaţia $t \mapsto t\overline{\phi}(1)$ este evident aditivă şi, din unicitatea lui $\overline{\phi}$ aditivă care satisface (3), rezultă că

$$\overline{\phi}(t) = t\overline{\phi}(1), \quad \forall\, t \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Să considerăm funcţia $\overline{\xi} : \mathbb{R} \to F$ definită prin relaţia $\overline{\xi}(t) = \phi(tx)$ şi să observăm că aceasta este aditivă. Dar din Teorema 3:

$$\left\|\overline{f}(t) - \overline{\xi}(t)\right\| = \left\|\overline{f}(tx) - \overline{\phi}(tx)\right\| \le \frac{2\delta}{|2-2^p|}\|tx\|^p = \frac{2\delta'}{|2-2^p|}|t|^p.$$

Din unicitatea lui $\overline{\phi}$ va rezulta că $\overline{\phi} = \overline{\xi}$, deci $\overline{\phi}(t) = \phi(tx)$ şi ţinând cont de (4), vom obţine:

$$\phi(tx) = t\phi(x), \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

adică ϕ este omogenă.

3. Stabilitate generalizată pentru ecuaţii cuadratice

Alternativa de punct fix poate fi folosită pentru a demonstra proprietăţi de stabilitate şi pentru alte tipuri de ecuaţii funcţionale. În cele ce urmează ne vom referi la ecuaţiile funcţionale cuadratice.

Fie X şi Y două spaţii vectoriale şi $f : X \to Y$ o funcţie cu proprietatea:

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y), \quad \forall\, x, y \in X. \tag{5}$$

Deoarece funcţiile definite pe $\mathbb{R}$ de forma $x \mapsto rx^2$ satisfac (5), aceasta se numeşte *ecuaţie funcţională cuadratică* şi orice soluţie a unei ecuaţii funcţionale cuadratice se va numi funcţie cuadratică. *S. Czerwik* ([2]) a obţinut rezultate de stabilitate în sens Aoki - Rassias pentru âceastă ecuaţie. Are loc următoarea teoremă de stabilitate generalizată:

Teorema 6. ([6]) *Fie E un spaţiu liniar (real sau complex), F un spaţiu Banach, şi*:

$$r_i = \begin{cases} 2, & i = 0 \\ \dfrac{1}{2}, & i = 1. \end{cases}$$

Fie $f : E \to F$ care satisface condiţia $f(0) = 0$ şi o inegalitate de tipul:

$$\|f(x+y) + f(x-y) - 2f(x) - 2f(y)\| \le \varphi(x,y), \quad \forall\, x, y \in E, \tag{6}$$

unde $\varphi : E \times E \to [0,\infty)$ este o funcţje dată.

Dacă există $L = L(i) < 1$ astfel încât aplicaţia:

$$x \mapsto \psi = \varphi\left(\frac{x}{2}, \frac{x}{2}\right)$$

are proprietatea:

$$\psi(x) \leq L \cdot r_1^2 \cdot \psi\left(\frac{x}{r_i}\right), \quad \forall\, x \in E \tag{Hi}$$

şi φ *are proprietatea*:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi\left(r_i^n x, r_i^n y\right)}{r_i^{2n}} = 0, \quad \forall\, x, y \in E, \tag{H_i^*}$$

atunci există o unică functie cuadratică $q : E \to F$ care satisface ecuaţia funcţională (5) şi inegalitatea:

$$\|f(x) - q(x)\| \leq \frac{L^{i-1}}{1-L}\,\psi(x), \quad \forall\, x \in E. \tag{7}$$

Putem acum demonstra

Teorema 7. *Dacă sunt satisfăcute ipotezele teoremei* 6 *şi în plus aplicaţiile* $t \mapsto f(tx)$ *şi* $t \mapsto \varphi(tx)$ *sunt continue, atunci* q *verifică relaţia*

$$q(tx) = t^2 q(x), \quad \forall\, x \in E, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

Demonstraţie. Fie $x \in E$ fixat şi aplicaţiile

$$\overline{f} : \mathbb{R} \to F, \quad \overline{f}(t) = f(tx),$$

$$\overline{\varphi} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0, \infty), \quad \overline{\phi}(t, s) = \varphi(tx, sx)$$

şi:

$$\overline{\varphi} : \mathbb{R} \to [0, \infty), \quad \overline{\psi}(t) = \psi(tx).$$

Se observă uşor că f satisface condiţia

$$\left\|\overline{f}(t+s) + \overline{f}(t-s) - 2\overline{f}(t) - 2\overline{f}(s)\right\| \leq \overline{\varphi}(t, s), \quad \forall\, t, s \in \mathbb{R},$$

iar $\overline{\psi}$ şi $\overline{\varphi}$ verifică respectiv (H_i) şi (H_i^*). Conform Teoremei 6, există o unică funcţie cuadratică $\overline{q} : \mathbb{R} \to F$ cu proprietatea că:

$$\left\|\overline{f}(t) - \overline{q}(t)\right\| \leq \frac{L^{1-i}}{1-L}\,\overline{\psi}(t). \tag{9}$$

Deoarece $\overline{q}$ este cuadratică, ea verifică relaţia $\overline{q}(t) = t^2\overline{q}(1)$ pentru orice $t \in \mathbb{Q}$.

Fie $t \in \mathbb{R}$ şi $t_n \in \mathbb{Q}$ cu $t_n \to n \to \infty tt$. Atunci:

$$\left\|\overline{f}(t) - t^2\overline{q}(1)\right\| = \left\|\lim_{n\to\infty} \overline{f}(t_n) - \lim_{n\to\infty} t_n^2 \overline{q}(l)\right\| = \lim_{n\to\infty} \left\|\overline{f}(t_n) - t_n^2\overline{q}(1)\right\| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\|\overline{f}(tn) - \overline{q}(t_n)\right\| \leq \frac{L^{1-i}}{1-L} \lim_{n\to\infty} \overline{\psi}(t_n) = \frac{L^{1-i}}{1-L}\,\overline{\psi}.$$

Să observăm că aplicaţia $t \mapsto t^2\overline{q}(1)$ este cuadratică şi satisface (9). Din unicitatea lui $\overline{q}$ cu aceste proprietăţi rezultă că $\overline{q}(t) = t^2\overline{q}(1)$, pentru orice $t \in \mathbb{R}$.

Fie acum $\overline{r} : \mathbb{R} \to F$, $\overline{r}(t) = q(tx)$. Deoarece q este cuadratică, şi r va avea această proprietate şi în plus avem că:

$$\left\|\overline{f}(t) - \overline{r}(t)\right\| = \|f(tx) - q(tx)\| \leq \frac{L^{1-i}}{1-L}\psi(t) = \frac{L^{1-i}}{1-L}\,\overline{\psi}(t).$$

Din unicitatea lui $\overline{q}$ obţinem că $\overline{q} = \overline{r}$, ceea ce este echivalent cu $\overline{q}(t) = q(tx)$. Prin urmare,

$$q(tx) = \overline{q}(t) = t^2\overline{q}(1) = t^2 q(x), \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Bibliografie

[1] T. Aoki, *On the stability of the linear transformation in Banach spaces*, J. Math. Soc. Japan 2 (1950), 64-66.
[2] S.Czerwik, *On the stability of quadratic mapping in normed spaces*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 62 (1992), 59-64.
[3] Z. Gajda, *On stability of additive mappings*, Internat. J. Math. Math. Sci. 14 (1991), 431-434.
[4] D. H. Hyers, *On the stability of the linear functional equation*, Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. 27 (1941), 222-224.
[5] V. Radu, *The fixed point alternative and the stability of functional equations*, Fixed Point Theory 4 (2003), No. 1, 91-96.
[6] V. Radu, I. Cădariu, *Fixed points and the stability of quadratic functional equations*, An. Univ. Timişoara Ser. Mat.-Inform. 41 (2003), No.l, 25-48.
[7] Th. Rassias, *On the stability of linear mapping in Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 72, No. 2 (1978), 297-300.
[8] I. Rus, *Principii şi aplicaţii ale teoriei punctului fix*, Ed. Dacia, Bucureşti, 1979.

NOTE MATEMATICE ŞI METODICE

Dreapta lui Euler şi cercul celor 9 puncte. Generalizări

Laurenţiu Homentcovski[1)] şi Cristina Homentcovski[2)]

Abstract. We present generalizations in $\mathbb{R}^N$ of two famous problems of Euler, Euler's line and Euler's points.

Keywords: Euler line, Euler points.
MSC : 50-03, 01A55.

Este binecunoscut faptul că, într-un triunghi, centrul cercului circumscris, centrul de greutate şi ortocentrul sunt coliniare (dreapta lui Euler), iar picioarele înălţimilor, mijloacele laturilor şi mijloacele segmentelor ce unesc vârfurile triunghiului cu ortocentrul sunt conciclice (cercul celor 9 puncte).

Scopul prezentului articol este de a prezenta o generalizare a acestor rezultate în $\mathbb{R}^n$. Vor fi abordate mai întâi cazurile $\mathbb{R}^2$ şi $\mathbb{R}^3$, pentru o bună calibrare a instrumentelor ce vor fi folosite în demonstraţie. Metoda de lucru va fi cea vectorială.

[1)] Facultatea de Matematică şi Informatică, Universitatea Ovidius din Constanţa.
[2)] Liceul Ovidius din Constanţa.

A) Cazul $\mathbb{R}^2$

Lema 1. *Într-un triunghi ABC notăm cu H ortocentrul şi cu O centrul cercului circumscris. Atunci $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.*

Demonstraţie. Pentru demonstraţie am ales o metodă ce va permite ulterior o generalizare în $\mathbb{R}^n$.

Notăm $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$. Trebuie să demonstrăm că $\overrightarrow{v}$ este vectorul nul. Pentru aceasta vom arăta că $\overrightarrow{v}$ este perpendicular pe toţi vectorii unei baze, fapt din care va rezulta concluzia . Calculăm produsul scalar dintre $\overrightarrow{v}$ şi $\overrightarrow{AB}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{AB} = \\ &= \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OC}) + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BA} = \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CH} + \frac{OA^2 + BA^2 - OB^2}{2} - \frac{BO^2 + BA^2 - OA^2}{2} = \\ &= O + \frac{R^2 + BA^2 - R^2}{2} - \frac{R^2 + BA^2 - R^2}{2} = 0.\end{aligned}$$

Deci $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$. Analog, $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$. Rezultă că $\overrightarrow{v}$ este perpendicular pe vectorii $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AC}$, vectori ce formează o bază în $\mathbb{R}^2$. În concluzie $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$, adică:

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

Teorema 1. *În triunghiul ABC, fie O centrul cercului circumscris, H ortocentrul şi G centrul de greutate. Atunci H, G, O sunt coliniare, G este între H şi O şi $HG = 2GO$.*

Demonstraţie. Vom utiliza Lema 1 şi faptul că

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}).$$

Avem că $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$.

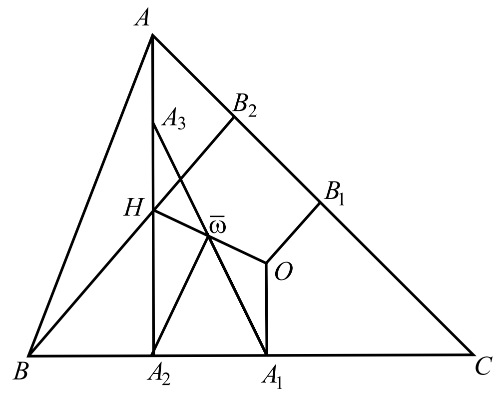
De aici rezultă concluzia teoremei.

Teorema 2. *Într-un triunghi ABC, notăm cu O centrul cercului circumscris, cu H ortocentrul, cu A_1, B_1, C_1 mijloacele laturilor, cu A_2, B_2, C_2 picioarele înălţimilor şi cu A_3, B_3, C_3 mijloacele segmentelor (AH), (BH), (CH). Atunci A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, A_3, B_3, C_3 sunt situate pe un cerc având centrul la mijlocul segmentului (OH) şi raza egala cu jumătate din reza cercului circumscris triunghiului.*

Demonstraţie. Vom folosi, de asemenea, Lema 1.

Notăm cu W mijlocul lui (OH).

Avem: $\overrightarrow{OA_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$ şi $\overrightarrow{A_3H} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AH} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OH}) - -\frac{1}{2}(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{OA_1}$



Deci $\overrightarrow{A_3H} = \overrightarrow{OA}$, de unde rezultă că HA_3OA_1 este paralelogram.

Atunci, W va fi şi mijlocul lui (A_1A_3).

Triunghiul $A_1A_2A_3$ este dreptunghic, iar W este mijlocul ipotenuzei. Rezultă că $|\overrightarrow{WA_1}| = |\overrightarrow{WA_2}| = |\overrightarrow{WA_3}|$.

În plus: $\overrightarrow{WA_1} = \overrightarrow{WO} + \overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OW} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) - \frac{1}{2}\overrightarrow{OH} =$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) - \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}.$$

Deci $|\overrightarrow{WA_1}| = |-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}| = \frac{R}{2}$.

Obţinem astfel că A_1, A_2, A_3 se află pe cercul cu centrul în ϖ şi de rază $\frac{R}{2}$.

Procedând analog, obţinem ca şi celelalte şase puncte se află pe acelasi cers, demonstraţia fiind astfel încheiată.

B) Cazul $\mathbb{R}^3$

Considerăm acum un tetraedru $ABCD$. Ştim că există O, centrul sferei circumscrise şi G, centrul de greutate. Dreapta OG o vom numi dreapta lui Euler a tetraedrului.

În cazul în care înălţimile tetraedrului sunt concurente, punctul lor de concurenţă îl vom numi ortocentrul tetraedrului, îl vom nota cu H, iar tetraedrul se va numi ortocentric.

Pentru un tetraedru oarecare, cele şase plane ce trec prin mijloacele muchiilor şi sunt perpendiculare pe muchiile opuse se intersectează într-un punct M care este simetricul lui O faţă de G (anticentrul tetraedrului). Acest lucru rezultă uşor, deoarece, de exemplu, simetricul faţă de G a planului ce trece prin mijlocul lui (AB) şi este perpendicular pe (CD) este chiar planul mediator al segmentului (CD).

Cum planele mediatoare ale muchiilor tetraedrului se intersectează în O, şi cele şase plane considerate se vor intersecta într-un punct M, simetricul lui O faţă de G.

Vom demonstra că, în cazul tetraedrului ortocentric, H (ortocentrul) coincide cu M (anticentrul), deci H, G, O vor fi coliniare, G va fi între H şi O şi $HG = GO$.

Lema 2. *Într-un tetraedru ortocentric $ABCD$ fie H ortocentrul şi O centrul sferei circumscrise. Atunci*

$$\overrightarrow{OH} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}).$$

Demonstraţie. Vom proceda analog ca în Lema 1. Fie

$$\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{OH} - (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{AB} &= 2\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AB} - (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})\overrightarrow{AB} = \\
&= (\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OC})\overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OD})\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{AB} = \\
&= \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DN} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BA} = \\
&= 0 + 0 + \frac{AO^2 + AB^2 - OB^2}{2} - \frac{BO^2 + BA^2 - OA^2}{2} = \\
&= \frac{R^2 + AB^2 - R^2}{2} - \frac{R^2 + AB^2 - R^2}{2} = 0.
\end{aligned}$$

Deci $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$. Analog, $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ şi $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$.

Cum $\overrightarrow{v}$ este perpendicular pe vectori $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ şi $\overrightarrow{AD}$, vectori ce formează o bază în R^3,va fi vectorul nul, de unde rezultă concluzia lemei.

Teorema 3. *Într-un tetraedru ortocentric, H, G şi O sunt coliniare, G este între H şi O şi $HG = GO$.*

Demonstraţie. Conform Lemei 2, avem

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OH} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) = \\
&= 2 \cdot \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) = 2 \cdot \overrightarrow{OG}.
\end{aligned}$$

Generalizarea Teoremei 2 o vom face direct în R^n.

C) Cazul $\mathbb{R}^n$

Fie $A_1, A_2, .., A_{n+1},\ n + 1$ puncte afin independente în $\mathbb{R}^n$. Structura indusă de aceste puncte o vom numi n-simplex.

Analog cazurilor $n = 2$, $n = 3$, pentru orice $n \geq 4$ există O, centrul sferei circumscrise şi G, centrul de greutate. Hiperplanele ce trec prin mijloacele celor C_n^2 muchii şi sunt perpendiculare pe feţele opuse se intersectează într-un punct M, numit punctul lui Monge. Trebuie precizat faptul că în cazul $n = 2$, punctul lui Monge este ortocentrul triunghiului şi în cazul $n = 3$, este anticentrul tetraedrului. În general, M, G şi O sunt coliniare, iar OG se numeşte dreapta lui Euler. Deci, într-un n-simplex, punctul lui Monge se află pe dreapta lui Euler. Apare naturală următoarea întrebare: într-un

n-simplex putem vorbi de ortocentru? La fel ca în $\mathbb{R}^3$, în anumite cazuri răspunsul este afirmativ.

Vom numi *înălţime a n-simplexului* orice dreaptă ce trece printr-un vârf şi este perpendiculară pe faţa ce nu conţine vârful respectiv. În cazul în care cele $n+1$ drepte sunt concurente, vom spune că n-simplexul este ortocentric şi vom nota ortocentrul său cu H. În plus, acesta coincide cu punctul lui Monge, deci se va afla pe OG.

Vom generaliza în continuare rezultatele din $\mathbb{R}^2$.

Lema 3. *Fie $A_1A_2...A_{n+1}$ un n-simplex în R^n, ortocentric. Notăm cu H ortocentrul său şi cu O centrul sferei circumscrise. Atunci*:

$$\overrightarrow{OH} = \frac{1}{n-1}(\overrightarrow{OA}_1 + \overrightarrow{OA}_2 + ... + \overrightarrow{OA}_{n+1}).$$

Demonstraţie. Fie $\overrightarrow{v} = (n-1)\overrightarrow{OH} - \mathrm{d}\sum\limits_{i=1}^{n+1}\overrightarrow{OA}_i$.

Calculăm $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{A_1A_2}$:

$$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{A_1A_2} = (n-1)\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{A_1A_2} - \sum_{i=1}^{n+1}\overrightarrow{OA}_i \cdot \overrightarrow{A_1A_2} =$$

$$= \sum_{i=3}^{n+1}(\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA}_i)\overrightarrow{A_1A_2} - (\overrightarrow{OA}_1 \cdot \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{OA}_2 \cdot \overrightarrow{A_1A_2}) =$$

$$= \sum_{i=3}^{n+1}\overrightarrow{A_iH} \cdot \overrightarrow{A_1A_2} + \left(\frac{OA_1^2 + A_1A_2^2 - OA_2^2}{2} - \frac{OA_2^2 + A_1A_2^2 - OA_1^2}{2}\right) = 0.$$

Deci $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{A_1A_2} = 0$

Analog $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{A_1A_3} = 0, ..., \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{A_1A_{n+1}} = 0$.

Cum $A_1A_2, ..., A_{n+1}$ sunt afin independente, $\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}, ..., \overrightarrow{A_1A_{n+1}}$ formează o bază în $\mathbb{R}^n$. Vectorul $\overrightarrow{v}$ fiind perpendicular pe toţi vectorii unei baze, va fi vectorul nul.

Teorema 4. *Într-un n-simplex, H, G şi O sunt coliniare, G este între H şi O şi $OG = \dfrac{n-1}{n+1}OH$.*

Demonstraţie. Vom folosi Lema 3

$$OG = \frac{1}{n+1}\left(\overrightarrow{OA}_1 + \overrightarrow{OA}_2 + ... + \overrightarrow{OA}_{n+1}\right) = \frac{n-1}{n+1}\overrightarrow{OH}.$$

Teorema 5. (Sfera celor $3(n+1)$ puncte) *Fie $A_1A_2, ..., A_{n+1}$ un n-simplex ortocentric. Notăm cu H ortocentrul, cu G centrul de greutate , cu O centrul sferei circumscrise, cu R raza sferei circumscrise, cu H_i piciorul perpendicularei duse din A_i pe faţa ce nu conţine A_i, cu G_i centrul de greutate al acestei feţe şi cu D_i punctul ce împarte segmentul A_iH în raportul $n+1:1$. Atunci punctele D_i, G_i şi H_i sunt sferice.*

Demonstraţie. Fie punctul $W \in (OH)$ astfel încât $\overrightarrow{OW} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} A_i$.

Avem următoarele relaţii:

$$\overrightarrow{OG_1} = \frac{1}{n}\left(\overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} + ... + \overrightarrow{OA_{n+1}}\right),$$

$$\overrightarrow{OD_1} = \frac{1}{n}\overrightarrow{OA}_1 + \frac{n-1}{n}\overrightarrow{OH} = \frac{1}{n}\overrightarrow{OA}_1 + \frac{1}{n}\left(\overrightarrow{OA}_1 + ... + \overrightarrow{OA}_{n+1}\right).$$

Atunci $WG_1 = \left|\overrightarrow{OW} - \overrightarrow{OG}_1\right| = \dfrac{1}{n}\left|\overrightarrow{OA}_1\right| = \dfrac{R}{n}$.

Deoarece $\dfrac{\overrightarrow{OG}_1 + \overrightarrow{OD}_1}{2} = \dfrac{1}{n}\left(\overrightarrow{OA}_1 + ... + \overrightarrow{OA}_{n+1}\right) = \overrightarrow{OW}$, rezultă că W este mijlocul lui (G_1D_1).

Dar triunghiul $H_1G_1D_1$ este dreptunghic în H_1.

Rezultă $WH_1 = WG_1 = WD_1 = \dfrac{R}{n}$. Deci H_1, G_1, D_1 se află pe sfera de centru W şi rază $\dfrac{R}{n}$. Prin analogie, obţinem în final că:

$$H_i, G_i, D_i \in S\left(W, \frac{R}{n}\right), \quad \forall\, i = \overline{1, n+1}.$$

Bibliografie

[1] T. G. Abbot, R.W. Barton, M. Buba-Brzozowa, *Analogues of the nine-point circle for orthocentric n-simplexes*, J.Geometry, **81**(2004), 21-29.

[2] E. Egervary, *On orthocentric simplexes*, Acta Lith. Szeged **9**(1940) 218,226.

A note on some limit connected with Euler constant

Cătălin Ghinea[1)]

Abstract. We compute a limit in which Euler's constatn is involved.

Keywords: Euler's constant, convergent sequences.

MSC : 26A03.

Theorem. *Let c_x be the intermediate point from the Mean Value Theorem applied to a differentiable function f on the closed interval $[a,x]$. Then*

$$\lim_{x\to a}\frac{c_x - a}{x - a} = \frac{1}{2}.$$

The Stolz-Cesaro lemma. *Let $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ such that $x_n \to 0$ and $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} - \{0\}$ such that $a_n \searrow 0$ (or $a_n \nearrow 0$). If the limit*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n - x_{n-1}}{a_n - a_{n-1}} \in \overline{\mathbb{R}}$$

1) Universitatea Ovidius din Constanţa, e-mail:cghinea@univ-ovidius.ro.

exists then also the limit $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{a_n}$ *and:*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{a_n-a_{n-1}}.$$

Proof. Let us choose the sequence $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ to be nonincreasing. Let

$$\alpha=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{a_n-a_{n-1}}\in\mathbb{R}.$$

Then: $\forall\varepsilon>0,\exists n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ such that: $\left|\dfrac{x_n-x_{n-1}}{a_n-a_{n-1}}-\alpha\right|<\varepsilon,\forall n\ge n_\varepsilon$ or, using $a_n\searrow 0$,

$$|(x_n-x_{n-1})-\alpha\,(a_n-a_{n-1})|<\varepsilon\,(a_n-a_{n-1})\,,\forall n\ge n_\varepsilon. \tag{1}$$

Let $n\ge k\ge n_\varepsilon+1$. For $n=k+1,k+2,...,n$ in relation (1) we get: $|x_{k+1}-x_k-\alpha(a_{k+1}-a_k)|<\varepsilon(a_k-a_{k+1}),|x_{k+2}-x_{k+1}-\alpha(a_{k+2}-a_{k+1})|<$ $<\varepsilon(a_{k+1}-a_{k+2}),\ \dots,\ |x_n-x_{n-1}-\alpha(a_n-a_{n-1})|<\varepsilon(a_{n-1}-a_n)$ and, summing them, we obtain:

$$\begin{gathered}|x_n-x_k-\alpha(a_n-a_k)|\le|x_n-x_{n-1}-\alpha(a_n-a_{n-1})+...+x_{k+2}-x_{k+1}-\\ -\alpha(a_{k+2}-a_{k+1})+x_{k+1}-x_k-\alpha(a_{k+1}-a_k)|\le\\ \le|x_n-x_{n-1}-\alpha(a_n-a_{n-1})|+...+|x_{k+2}-x_{k+1}-\alpha(a_{k+2}-a_{k+1})|+\\ +|x_{k+1}-x_k-\alpha(a_{k+1}-a_k)|\le\varepsilon(a_k-a_{k+1})+\varepsilon(a_{k+1}-a_{k+2})+\\ +\ldots+\varepsilon(a_{n-1}-a_n)=\varepsilon(a_k-a_n)\end{gathered}$$

i.e.

$$|x_n-x_k-\alpha(a_n-a_k)|\le\varepsilon(a_k-a_n) \tag{2}$$

Let $k\ge n_\varepsilon+1$. Then, using (2), we get:

$$|\ x_n-x_k-\alpha(a_n-a_k)|\le\varepsilon(a_k-a_n),\quad\forall\, n\ge k.$$

Passing to limit for $n\to\infty$ and using that $x_n\to 0$, $a_n\to 0$ we have $|-x_k+\alpha a_k|\le\varepsilon a_k$, or, because $a_k>0$, $\left|\dfrac{x_k}{a_k}-\alpha\right|<\varepsilon$, $\forall k\ge n_\varepsilon+1$, i.e. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{a_n}=\alpha$.

If $\alpha=\infty$ then $\forall\varepsilon>0,\exists\ n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ such that

$$\frac{x_n-x_{n-1}}{a_n-a_{n-1}}>\varepsilon,\forall n\ge n_\varepsilon,$$

and using that $a_n\searrow 0$,

$$x_n-x_{n-1}<\varepsilon(a_n-a_{n-1}),\forall n\ge n_\varepsilon.$$

As above, we obtain: $x_n-x_k<\varepsilon(a_n-a_k),\forall n\ge k\ge n_\varepsilon+1$, and in the same manner we deduce that: $-x_k>-\varepsilon a_k,\forall k\ge n_\varepsilon+1$ i.e. $\dfrac{x_k}{a_k}>\varepsilon$, $\forall k\ge n_\varepsilon+1$ i.e. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{a_n}=\infty$.

The case $\alpha = -\infty$ can be shown in the ame manner. If $a_n \nearrow 0$ then denoting $b_n = -a_n$ we have $b_n \searrow 0$ and $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n - x_{n-1}}{a_n - a_{n-1}} = -\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n - x_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}$.

Exercise. *Show that the sequence* $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}, g_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} - \log n$ *is convergent. If we denote*

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} g_n$$

(γ is called the Euler constant) prove that

$$\lim_{n\to\infty} n\left(g_n - \gamma\right) = \frac{1}{2} \tag{3}$$

and

$$\lim_{n\to\infty} n\left[n\left(g_n - \gamma\right) - \frac{1}{2}\right] = -\frac{1}{12}. \tag{4}$$

Proof. Using The Mean Value theorem we can find $c_n \in (n, n+1)$ such that:

$$\ln(n+1) - \ln n = \frac{1}{c_n} \cdot (n+1-n)$$

from where we get:

$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}, \forall n \geq 1. \tag{5}$$

Summing the left part of (5) for $k = \overline{1, n-1}$ we get that $g_n < 1, \forall n \geq 1$ and summing the right part of (5) for $k = \overline{1, n}$ we get $g_n > 0$ which implies $g_n \in (0, 1)$ i.e. $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is bounded. Also:

$$g_{n+1} - g_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) < 0$$

so the sequence $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is strictly decreasing. By Weierstrass' theorem we get that $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is convergent and let us denote

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} g_n \in (0, 1).$$

Let us justify the limits.

For the first one, using the Stolz-Cesaro lemma we get:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n\left(g_n-\gamma\right) &= \lim_{n\to\infty}\frac{g_n-\gamma}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{g_{n+1}-g_n}{\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}-\log\left(n+1\right)+\log n}{-\frac{1}{n\left(n+1\right)}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}+\log\left(1-\frac{1}{n+1}\right)}{-\frac{1}{n\left(n+1\right)}} = \lim_{x\to 0}\frac{x+\log\left(1-x\right)}{-x^2}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1-x}}{-2x} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

For the second one, using again the Stolz-Cesàro lemma we get:

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(g_n-\gamma\right)-\frac{1}{2}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left[\left(n+1\right)\left(g_{n+1}-\gamma\right)-\frac{1}{2}\right]-\left[n\left(g_n-\gamma\right)-\frac{1}{2}\right]}{\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}} =$$

$$= \frac{(n+1)g_{n+1}-ng_n-\gamma}{-\frac{1}{n(n+1)}} = \frac{\left[(n+2)g_{n+2}-(n+1)g_{n+1}\right]-\left[(n+1)g_{n+1}-ng_n\right]}{-\frac{1}{(n+2)(n+1)}-\left(-\frac{1}{n\left(n+1\right)}\right)} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(n+2\right)\log\frac{n+2}{n+1}-\frac{n}{n+1}+n\log\frac{n}{n+1}}{\frac{1}{\left(n+1\right)^3}} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{n+1}-\left(n+1\right)\log\left(1+\frac{1}{n+1}\right)-\log\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}{\frac{1}{\left(n+1\right)^3}}-\right.$$

$$\left.-\frac{\left(n+1\right)\log\left(1-\frac{n}{n+1}\right)+\log\left(1-\frac{n}{n+1}\right)}{\frac{1}{\left(n+1\right)^3}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{1}{x}\log\left(1+x\right)-\log\left(1+x\right)-\frac{1}{x}\log\left(1-x\right)+\log\left(1-x\right)}{x^3} =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \frac{x^2 - (x+1)\log(1+x) - (1-x)\log(1-x)}{x^4} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 - \dfrac{1}{1-x}}{-2x} = \frac{1}{2}$$

Exercise. *Show that:*

$$L = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{g_n^{\gamma}}{\gamma^{g_n}} \right)^{2n} = \frac{\mathrm{e}}{\gamma}.$$

and

$$L' = \lim_{n \to \infty} n \left[\left(\frac{g_n^{\gamma}}{\gamma^{g_n}} \right)^{2n} - \frac{\mathrm{e}}{\gamma} \right]$$

Proof. For the first limit we will show two different solutions.
First solution: It is easy to see that:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n \to \infty} \left(\frac{g_n^{\gamma}}{\gamma^{g_n}} \right)^{2n} = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{g_n^{\gamma} - \gamma^{g_n}}{\gamma^{g_n}} \right)^{2n} \\ &= \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{g_n^{\gamma} - \gamma^{g_n}}{\gamma^{g_n}} \right)^{\frac{\gamma^{g_n}}{g_n^{\gamma} - \gamma^{g_n}} \cdot \frac{g_n^{\gamma} - \gamma^{g_n}}{\gamma^{g_n}} 2n} \\ &= e^{2 \lim\limits_{n \to \infty} \frac{n(g_n^{\gamma} - \gamma^{g_n})}{\gamma^{g_n}}} = \mathrm{e}^{2 \lim\limits_{n \to \infty} \frac{n(g_n^{\gamma} - g_n^{g_n})}{\gamma^{g_n}}} \mathrm{e}^{2 \lim\limits_{n \to \infty} \frac{n(g_n^{g_n} - \gamma^{g_n})}{\gamma^{g_n}}} \\ &= \mathrm{e}^{2L_1} e^{2L_2}. \end{aligned}$$

For L_1, using The Mean Value Theorem there exist $\theta_n \in (\gamma, g_n)$ such that:

$$g_n^{g_n} - g_n^{\gamma} = g_n^{\theta} (\log g_n)(g_n - \gamma).$$

Then:

$$L_1 = \lim_{n \to \infty} \frac{n(g_n^{\gamma} - g_n^{g_n})}{\gamma^{g_n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{n g_n^{\theta} (\log g_n)(\gamma - g_n)}{\gamma^{g_n}} = -\frac{\log \gamma}{2}$$

For L_2 using again The Mean Value Theorem there exist $\theta_n \in (\gamma, g_n)$ such that:

$$g_n^{g_n} - \gamma^{g_n} = g_n \theta^{g_n - 1} (g_n - \gamma).$$

Then:

$$L_2 = \lim_{n \to \infty} \frac{n(g_n^{g_n} - \gamma^{g_n})}{\gamma^{g_n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{n g_n \theta^{g_n - 1}(g_n - \gamma)}{\gamma^{g_n}} = \frac{1}{2}.$$

So:

$$L = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{g_n^{\gamma}}{\gamma^{g_n}} \right)^{2n} = \mathrm{e}^{2L_1} e^{2L_2} = \mathrm{e}^{-\log \gamma} e = \frac{\mathrm{e}}{\gamma}.$$

Second solution: Let us observe that:

$$\begin{aligned}
\log L &= \log \lim_{n\to\infty} \left(\frac{g_n^\gamma}{\gamma^{g_n}}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty} 2n\left(\gamma \log g_n - g_n \log \gamma\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} 2n\left(\gamma \log g_n - g_n \log g_n + g_n \log g_n - g_n \log \gamma\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} 2n\left(\gamma \log g_n - g_n \log g_n\right) + \lim_{n\to\infty} 2n\left(g_n \log g_n - g_n \log \gamma\right) \\
&= -\log \gamma + 2\gamma \lim_{n\to\infty} n\left(\log g_n - \log \gamma\right)
\end{aligned}$$

(we have used (3) and (4)). Using The Mean Value Theorem there exist $\theta_n \in (\gamma, g_n)$ such that:

$$\log g_n - \log \gamma = \frac{1}{\theta_n}\left(g_n - \gamma\right).$$

Then:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\log g_n - \log \gamma\right) = \lim_{n\to\infty} n\frac{1}{\theta_n}\left(g_n - \gamma\right) = \frac{1}{2\gamma}.$$

(by (3)). Finally we get:

$$\log L = \log \lim_{n\to\infty} \left(\frac{g_n^\gamma}{\gamma^{g_n}}\right)^{2n} = -\log \gamma + 1 = \log \frac{\mathrm{e}}{\gamma}$$

so $L = \dfrac{\mathrm{e}}{\gamma}$.

For the second limit we will use the same technique as in the second solution of the first limit and we will evaluate:

$$L'' = \lim_{n\to\infty} n\left[\log\left(\frac{g_n^\gamma}{\gamma^{g_n}}\right)^{2n} - \log \frac{\mathrm{e}}{\gamma}\right].$$

We have:

$$\begin{aligned}
L'' &= \lim_{n\to\infty} n\left[2n\left(\gamma \log g_n - g_n \log \gamma\right) - 1 + \log \gamma\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} n\left[2n\left(\gamma \log g_n - \gamma \log \gamma + \gamma \log \gamma - g_n \log \gamma\right) - 1 + \log \gamma\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} n\left[2n\left(\gamma \log g_n - \gamma \log \gamma\right) - 1\right] + \lim_{n\to\infty} n\left[2n\left(\gamma \log \gamma - g_n \log \gamma\right) + \log \gamma\right] \\
&= L_1' + \frac{\log \gamma}{6},
\end{aligned}$$

where for the second part of the limit we used (4). For L_1' we have:

$$\begin{aligned}
L_1' &= \lim_{n\to\infty} n\left[2n\left(\gamma \log g_n - \gamma \log \gamma\right) - 1\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} n\left[\frac{2n\gamma}{\theta_n}\left(g_n - \gamma\right) - 1\right] = \lim_{n\to\infty} 2\gamma n\left[\frac{n}{\theta_n}\left(g_n - \gamma\right) - \frac{1}{2\theta_n} + \frac{1}{2\theta_n} - \frac{1}{2\gamma}\right] \\
&= 2\gamma \lim_{n\to\infty} n\left[\frac{n}{\theta_n}\left(g_n - \gamma\right) - \frac{1}{2\theta_n}\right] + 2\gamma \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{2\theta_n} - \frac{1}{2\gamma}\right)
\end{aligned}$$

$$= 2\gamma \lim_{n\to\infty} \frac{n\left[n\left(g_n-\gamma\right)-\dfrac{1}{2}\right]}{\theta_n} + \lim_{n\to\infty} \frac{\gamma-\theta_n}{\gamma-g_n}\frac{n\left(\gamma-g_n\right)}{\theta_n}$$
$$= -\frac{1}{6}-\frac{1}{4\gamma} = -\frac{3+2\gamma}{12\gamma}$$

(we used Theorem 1 and again (3) and (4)). So

$$L'' = \frac{\log\gamma}{6} - \frac{3+2\gamma}{12\gamma}.$$

Getting back to L_1, using The Mean Value Theorem, there exist θ_n between $\left(\dfrac{g_n^{\gamma}}{\gamma^{g_n}}\right)^{2n}$ and $\dfrac{\mathrm{e}}{\gamma}$ such that:

$$\log\left(\frac{g_n^{\gamma}}{\gamma^{g_n}}\right)^{2n} - \log\frac{\mathrm{e}}{\gamma} = \frac{1}{\theta_n}\left[\left(\frac{g_n^{\gamma}}{\gamma^{g_n}}\right)^{2n} - \frac{\mathrm{e}}{\gamma}\right].$$

Then:

$$L' = \lim_{n\to\infty} n\left[\left(\frac{g_n^{\gamma}}{\gamma^{g_n}}\right)^{2n} - \frac{\mathrm{e}}{\gamma}\right] = \lim_{n\to\infty} n\theta_n\left[\log\left(\frac{g_n^{\gamma}}{\gamma^{g_n}}\right)^{2n} - \log\frac{\mathrm{e}}{\gamma}\right] =$$
$$= \frac{\mathrm{e}}{\gamma}\left(\frac{\log\gamma}{6} - \frac{3+2\gamma}{12\gamma}\right).$$

EXAMENE ŞI CONCURSURI

Soluţiile problemelor date la examenul de titularizare din 16 iulie 2008

Vasile Chiriac[1)] şi Bogdan Chiriac[2)]

Enunţuri

Subiectul I (30p)

1. Fie numerele întregi a, b, c, matricea

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 5c & a & b \\ 5b & 5c & a \end{pmatrix}$$

şi funcţia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(x) = a + bx + cx^2$. Se notează cu $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ soluţiile ecuaţiei $x^3 - 5 = 0$.

[1)] Profesor, Bacău

[2)] Student, Facultatea de Matematică, Universitatea „Al. I. Cuza“ Iaşi

a) Să se determine x_1, x_2, x_3

b) Fie

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{pmatrix}.$$

Să se arate că:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} f(x_1) & f(x_2) & f(x_3) \\ x_1 f(x_1) & x_2 f(x_2) & x_3 f(x_3) \\ x_1^2 f(x_1) & x_2^2 f(x_2) & x_3^2 f(x_3) \end{pmatrix}.$$

c) Să se arate că $\det(A) = f(x_1)f(x_2)f(x_3)$.

d) Să se demonstreze că dacă $\det(A) = 0$, atunci $a = b = c = 0$.

2. Fie triunghiul ABC cu $AB = 8$, $AC = 7$ şi $BC = 5$. Fie O un punct situat în interiorul triunghiului ABC astfel încât cercurile circumscrise triunghiurilor AOC, BOC şi COA să aibă aceeaşi rază R.

a) Să se calculeze măsura unghiului ABC.

b) Să se determine raza cercului circumscris triunghiului ABC.

c) Fie P şi Q centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor AOB, respectiv COA. Să se demonstreze că $AQOP$ este romb.

d) Să se determine R.

e) Fie O' centrul cercului circumscris triunghiului ABC. Să se arate că punctele A, O, O' şi C sunt conciclice.

Subiectul II (30p)

1. Fie polinomul:

$$f = X^n + 2X^{n-1} + 3X^{n-2} + \ldots + nX - 1,$$

cu n natural, $n \geq 3$.

a) Să se calculeze $f(0)$ şi $f(1)$.

b) Să se arate că f are o rădăcină în intervalul $(0, 1)$.

c) Să se arate, folosind schema lui Horner, că există $\alpha \in (0, 1)$ şi $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1} \in \mathbb{R}$ cu $1 < b_1 < b_2 < \ldots < b_{n-1}$, astfel încât:

$$f = (X - a) \cdot \left(X^{n-1} + b_1 X^{n-2} + b_2 X^{n-3} + \ldots + b_{n-2} X + b_{n-1}\right).$$

d) Fie polinomul:

$$g = X^{n-1} + c_1 X^{n-2} + c_2 X^{n-3} + \ldots + c_{n-2} X + c_{n-1} \in \mathbb{R}$$

cu $1 < c_1 < c_2 < \ldots < c_{n-1}$ şi $z \in \mathbb{C}$ cu $g(z) = 0$. Să se demonstreze că $|z| > 1$.

e) Să se demonstreze că polinomul f nu poate fi scris ca produs de două polinoame cu coeficienţi întregi, fiecare având gradul cel puţin 1.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{4x^3 - 3x}$. Pentru fiecare $a \in \mathbb{R}$ se defineşte şirul $(x_n)_{n \geq 0}$ astfel: $x_0 = a$ şi $x_{n+1} = 4x_n^3 - 3x_n$.

a) Să se determine asimptota spre $+\infty$ a graficului funcţiei f.

b) Să se determine toate punctele $b \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că funcţia f nu este derivabilă în b.

c) Să se arate că $f(x) \in [-1,1]$, oricare ar fi $x \in [-1,1]$.

d) Pentru $a = 2$, să se demonstreze că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

e) Să se arate că există o infinitate de valori ale lui $a \in \mathbb{R}$ pentru care şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este convergent.

Subiectul III (30p)

Stabiliţi corelaţii între metodele didactice, mijloacele de învăţământ şi formele de organizare a activităţii, cu aplicaţii la disciplina de concurs, având în vedere:

– definirea conceptelor: metodă didactică, mijloace de învăţământ, forme de organizare a activităţii didactice;

– trei aplicaţii/exemple de combinare eficientă a metodelor, mijloacelor şi formelor de organizare a activităţii didactice la disciplina de concurs.

Notă. *Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 4 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.*

SOLUŢII

Subiectul I

1. a) Ecuaţia se scrie: $x^3 = 5(\cos 0 + \mathrm{i}\sin 0)$ de unde soluţiile ecuaţiei: $x_1 = \sqrt[3]{5}$; $x_2 = \sqrt[3]{5}\cdot\left(\cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right)$; $x_1 = \sqrt[3]{5}\cdot\left(\cos\frac{4\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{3}\right)$.

b)

Cum $\left(\cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right)^3 = 1$, $\left(\cos\frac{4\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{3}\right)^3 = 1$, deducem uşor elementele produsului $A\cdot B$ de pe fiecare linie.

Elementele de pe prima linie sunt:

$a + bx_1 + cx_1^2 = f(x_1)$, $a + bx_2 + cx_2^2 = f(x_2)$, $a + bx_3 + cx_3^2 = f(x_3)$.

Elementele de pe lina a II-a vor fi:

$5c + ax_1 + bx_1^2 = x_1\cdot\left(cx_1^2 + bx_1 + a\right) = x_1\cdot f(x_1)$,

$5c + ax_2 + bx_2^2 = x_2\cdot\left(cx_2^2 + bx_2 + a\right) = x_2\cdot f(x_2)$,

$5c + ax_3 + bx_3^2 = x_3\cdot\left(cx_3^2 + bx_3 + a\right) = x_3\cdot f(x_3)$.

Elementele de pe linia a III-a vor fi:

$5b + 5cx_1 + ax_1^2 = x_1^2\cdot\left(a + bx_1 + cx_1^2\right) = x_1^2\cdot f(x_1)$, căci $5cx_1 = cx_1^4$;

$5b + 5cx_2 + ax_2^2 = x_2^2\cdot\left(a + bx_2 + cx_2^2\right) = x_2^2\cdot f(x_2)$;

$5b + 5cx_3 + ax_3^2 = x_3^2\cdot\left(a + bx_3 + cx_3^2\right) = x_3^2\cdot f(x_1)$.

Înlocuind, aceste elemente în produsul matricial, obţinem:

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} f(x_1) & f(x_2) & f(x_3) \\ x_1 f(x_1) & x_2 f(x_2) & x_2 f(x_2) \\ x_1^2 f(x_1) & x_2^2 f(x_2) & x_2^2 f(x_2) \end{pmatrix}.$$

c) Avem:

$$\det(A) = a^3 + 5b^3 + 25c^3 - 3 \cdot 5abc =$$

$$= a^3 + \left(b\sqrt[3]{5}\right)^3 + \left(c\sqrt[3]{25}\right)^3 - 3a \cdot \left(b\sqrt[3]{5}\right) \cdot \left(c\sqrt[3]{25}\right) = \left(a + b\sqrt[3]{5} + c\sqrt[3]{25}\right) \cdot$$

$$\cdot \left(a^2 + b^2 \cdot \sqrt[3]{25} + c^2 \cdot \sqrt[3]{25} - ab \cdot \sqrt[3]{5} - 5bc - ca \cdot \sqrt[3]{25}\right), \qquad (1)$$

conform formulei:

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z) \cdot \left(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx\right).$$

Dar

$$f(x_2) \cdot f(x_3) = \left(a + bx_2 + cx_2^2\right) \cdot \left(a + bx_3 + cx_3^2\right) = a^2 + b^2 x_2 x_3 +$$

$$+ c^2 (x_2 x_3)^2 + ab(x_2 + x_3) + bc \cdot x_2 x_3 (x_2 + x_3) + ca\left(x_2^2 + x_1^2\right). \qquad (2)$$

Folosind relaţiile dintre rădăcinile şi coeficienţii ecuaţiei $x^3 - 5 = 0$, avem: $x_1 + x_2 + x_3 = 0$; $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 0$; $x_1x_2x_3 = 5$, de unde deducem $x_2 + x_3 = -\sqrt[3]{5}$; $x_2x_3 = -x_1(x_2 + x_3) = \sqrt[3]{25}$; $(x_2x_3)^2 = \sqrt[3]{25^2}$; $x_2x_3(x_2 + x_3) = -5$ şi $x_2^2 + x_3^2 = (x_2 + x_3)^2 - 2x_2x_3 = \sqrt[3]{25} - 2\sqrt[3]{25} = -\sqrt[3]{25}$.

Înlocuind aceste valori în egalitatea (2) obţinem:

$$f(x_2) \cdot f(x_3) = a^2 + b^2 \cdot \sqrt[3]{25} + c^2 \cdot \sqrt[3]{25^2} - ab \cdot \sqrt[3]{5} - 5bc - ca \cdot \sqrt[3]{25},$$

care reprezintă al doilea factor din egalitatea (1), primul factor fiind egal cu $f(x_1)$. Deci $\det(A) = f(x_1)f(x_2)f(x_3)$.

d) Din egalitatea:

$$\det(A) = \left(a + b\sqrt[3]{5} + c\sqrt[3]{25}\right) \cdot \left(a^2 + b^2 \cdot \sqrt[3]{25} + c^2 \cdot \sqrt[3]{25^2} - \right.$$

$$\left. - ab \cdot \sqrt[3]{5} - 5bc - ca \cdot \sqrt[3]{25}\right) = 0,$$

rezultă $a + b\sqrt[3]{5} + c\sqrt[3]{25} = 0$, căci $a^2 + b^2 \cdot \sqrt[3]{25} + c^2\sqrt[3]{25^2} > ab \cdot \sqrt[3]{5} + 5bc + ca \cdot \sqrt[3]{25}$.

Presupunem că numerele întregi a, b, c sunt prime între ele, căci în caz contrar există m, n, p astfel ca $a = dm$, $b = dn$, $c = dp$, cu $(m, n, p) = 1$. Deci $a + b\sqrt[3]{5} + c\sqrt[3]{25} = 0$ este echivalentă cu $m + n\sqrt[3]{5} + p\sqrt[3]{25} = 0$.

Înmulţind această egalitate cu $\sqrt[3]{5}$, obţinem egalităţile:

$$\begin{cases} m\sqrt[3]{5} + n\sqrt[3]{25} = -5p \\ n\sqrt[3]{5} + p\sqrt[3]{25} = -m. \end{cases}$$

Interpretând aceste egalităţi ca un sistem în necunoscutele $\sqrt[3]{5}$ şi $\sqrt[3]{25}$, punem condiţia ca sistemul să nu admită soluţii, căci în caz contrar $\sqrt[3]{5}$ şi $\sqrt[3]{25}$ s-ar exprima în funcţie de m, n, p ca numere raţionale. Contradicţie !

Deci:

$$\begin{vmatrix} m & n \\ n & p \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow n^2 = mp.$$

Pe de altă parte, considerând $t = \sqrt[3]{5} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, relaţia

$$m + n\sqrt[3]{5} + p\sqrt[3]{25} = 0,$$

se scrie $pt^2 + nt + m = 0$.

Interpretând această egalitate ca o ecuaţie de gradul II, despre care ştim că admite rădăcina reală $t = \sqrt[3]{5}$, rezultă că discriminantul este pozitiv, adică $n^2 - 4mp \geq 0$

Dar, $n^2 = mp$, astfel că $n^2 - 4mp \geq 0$, implică $n^2 = 0$, adică $n = 0$. Înlocuind pe $n = 0$ în egalitatea $m+n\sqrt[3]{5}+p\sqrt[3]{25} = 0$, se obţine $m = -p\sqrt[3]{25}$, de unde, în mod necesar $p = 0$, căci, în caz contrar, $\sqrt[3]{25} = -\dfrac{m}{p} \in \mathbb{Q}$. Contradicţie!

Pentru $n = 0$, $P = 0$, din egalitatea dată, la început, rezultă m =0 şi deci $a = b = c = 0$.

Pentru *altă soluţie* se poate consulta lucrarea: V. Chiriţă, *Probleme de algebră şi olimpiadă – Metodologia rezolvării problemelor*, Editura Enciclopedică, Bucureşti, 2005.

2. a) Din teorema cosinusului, obţinem:

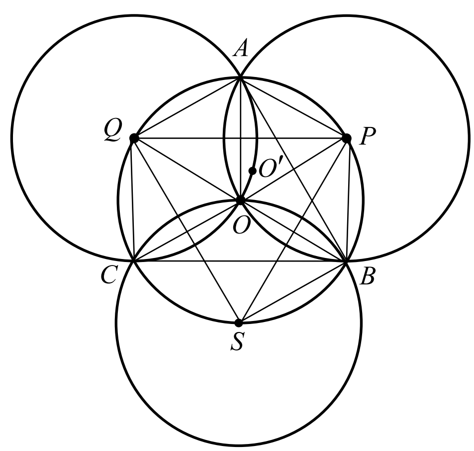
$$\cos B = \frac{BC^2 + AB^2 - AC^2}{2 \cdot BC \cdot AB} = \frac{25 + 64 - 49}{80} = \frac{40}{80} = \frac{1}{2} \Rightarrow \mathrm{m}(\sphericalangle B) = 60^\circ.$$

b) Fie R' – raza cercului circumscris $\triangle ABC$. Din teorema sinusurilor rezultă:

$$\frac{b}{\sin B} = 2R' \Rightarrow R' = \frac{7}{2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{7}{\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{3}.$$

Altfel: $R' = \dfrac{abc}{S}$, unde $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 10\sqrt{3}$ etc.

c) Cum cele trei cercuri care trec prin $O \in \mathrm{Int}\triangle ABC$ au razele egale cu R, din figura alăturată şi enunţ rezultă: $QA = QO = OP = PA = R$. În plus $QP \perp AO$, conform teoremei: „dacă două cercuri sunt secante, atunci dreapta care uneşte centrele lor este perpendiculară pe coarda comună“. De aici, rezultă că $AQOP$ este romb cu latura $\ell = R$.



d) Cercurile cu centrele în P şi Q sunt simetricele cercului cu centrele în S faţă de OB, respectiv OC; deci punctul lor comun A este ortocentrul triunghiului OBC adică $AO \perp BC$. Dar la pct. c) s-a arătat că $AO \perp QP$ şi atunci BC—— QP. Analog, avem $OB \perp AC$ şi $OC \perp AB$ şi deci O este ortocentrul triunghiului ABC. În plus, avem $CO \perp QS$, de unde $QS || AB$. De aici şi din faptul că cercurile sunt congruente, rezultă că patrulaterele $PQCB$ şi $AQSB$ sunt paralelograme. Deci $\triangle SQP = \triangle ABC$ şi cercul cu centrul în O' este congruent cu cele trei cercuri, adică $R' = R = \dfrac{7}{\sqrt{3}}$.

e) Triunghiul ABC este ascuţitunghic şi atunci $O' \in \mathrm{Int}\triangle ABC$. Cum $\sphericalangle ABC$ este înscris în cercul cu centrul în O' şi $\mathrm{m}(\sphericalangle ABC) = 60°$, rezultă $\mathrm{m}(\overset{\frown}{AC}) = 120°$. Dar arcul AOC al cercului cu centrul în Q' este congruent cu arcul AC al cercului cu centrul în O'. Deci $\mathrm{m}(\sphericalangle AOC) = \dfrac{1}{2} \cdot 240° = 120°$. Pe de altă parte, teorema cosinusului aplicată triunghiului $AO'C$ dă

$$\cos(\sphericalangle AO'C) = \frac{0'A^2 + 0'C^2 - AC^2}{2 \cdot O'A \cdot O'C} = \frac{1}{2},$$

de unde rezultă $\sphericalangle AO'C \equiv \sphericalangle AOC$, fiecare având măsura de 120°. Prin urmare $O' \in \mathrm{arc}AOC$ ceea ce ne spune că punctele A, O, O' şi C sunt conciclice.

Subiectul II

1. a) Avem $f(0) = -1 < 0$,

$$f(1) = 1 + 2 + 3 + \ldots + n - 1 = \frac{n(n+1)}{2} - 1 > 0,$$

pentru orice $n \geq 3$.

b) Cum funcţia polinomială $\widetilde{f}(x) = x^n + 2x^{n-1} + \ldots + nx - 1$ este continuă pe intervalul $[0, 1]$ şi cum $f(0) \cdot f(1) < 0$, rezultă că există $\alpha \in (0, 1)$ astfel încât $f(\alpha) = 0$.

Schema lui Horner pentru $x = \alpha$ rădăcină, arată astfel:

	X^n	X^{n-1}	X^{n-2}	$\ldots$	X	X^0	r
	1	2	3		n	-1	
α		$\alpha_0 = b_0$	b_1		b_{n-2}	b_{n-1}	0

unde: $\alpha_0 = b_0 = 1$, $b_1 = \alpha + 2 > 1$, $b_2 = \alpha^2 + 2\alpha + 3 > b_1, \ldots,$ $bn - 1 = \alpha^{n-1} + 2\alpha^{n-2} + 3\alpha^{n-3} + \ldots + (n-1) \cdot \alpha + n > b_{n-2}$, pentru orice $n \geq 3$.

Deci $f = (X - \alpha) \cdot \left(X^{n-1} + b_1 X^{n-2} + b_2 X^{n-3} + \ldots + b_{n-2} X + b_{n-1}\right)$, cu $1 < b_1 < b_2 < \ldots < b_{n-1}$.

d) Din $g(z) = 0$ cu $z \in \mathbb{C}$, rezultă $z \cdot g(z) - g(z) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow z^n + (c_1 - 1) \cdot z^{n-1} + (c_2 - c_1) \cdot z^{n-2} + \ldots + (c_{n-1} - c_{n-2}) \cdot z - c_{n-1} = 0.$$

Deci

$$c_{n-1} = |c_{n-1}| = \left|z^n + (c_1 - 1) \cdot z^{n-1} + (c_2 - c_1) \cdot z^{n-2} + \right.$$

$$\left. + \ldots + (c_{n-1} - c_{n-2}) \cdot z\right| \leq |z|^n + (c_1 - 1) \cdot |z|^{n-1} + \ldots + (c_{n-1} - c_{n-2}) \cdot |z|.$$

Presupunem că $|z| \leq 1$; atunci

$$1 < c_{n-1} \leq 1 + c_1 - 1 + c_2 - c_1 + \ldots + c_{n-1} - c_{n-2} = c_{n-1}.$$

Deci pentru $z \neq 0$, există $\lambda > 0$ astfel ca $z^n = \lambda \cdot (c_1 - 1) \cdot z^{n-1}$, de unde $z = \lambda \cdot (c_1 - 1) \in (0, +\infty)$, adică polinomul g are o rădăcină strict pozitivă, ceea ce este fals, căci $g(x) > 0$, pentru orice $x > 0$, conform pct. c). De aici rezultă $|z| > 1$.

e) Presupunem că $f = p \cdot q$ cu p şi q polinoame cu coeficienţi întregi, fiecare având gradul cel puţin 1. Dar, din punctele c) şi d) obţinem:

$f = (X - a) \cdot g$, cu α rădăcină simplă a lui f şi :

$g = X^{n-1} + b_1 X^{n-2} + b_2 X^{n-3} + \ldots + b_{n-2} X + b_{n-1}$

cu $1 < b_1 < b_2 < \ldots < b_{n-1}$. Cum $g(\alpha) \neq 0$, rezultă că α este rădăcină pentru unul din polinoamele p sau q.

Fie $p(\alpha) \neq 0$ şi $z_1, z_2, \ldots, z_k$ rădăcinile lui p, atunci $g(z_i) = 0$, $i = \overline{1,k}$, cu $|z_i| > 1$. Dar f are coeficientul dominant 1, atunci p şi q au coeficientul dominant 1. Cum $f(0) = p(0) \cdot q(0) = -1$, rezultă $q(0) = 1$ şi din ultima relaţie a lui Viète pentru polinomul p, avem $|z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_k| = |p(0)| = 1$.

Dar $|z_1| \cdot |z_2| \cdot \ldots \cdot |z_k| > 1$ şi atunci $1 = |z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_k| > 1$ sunt contradictorii. Contrazicerea la care s-a ajuns demonstrează faptul că f nu poate fi scris ca produs de două polinoame cu coeficienţi întregi, fiecare având gradul cel puţin 1.

2. a) Avem

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{4x^3 - 3x} = \lim_{n\to\infty} x \cdot \sqrt[3]{4 - \frac{3}{x^2}} = +\infty; \qquad m = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \sqrt[3]{4},$$

$$n = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{4x^3 - 3x} - \sqrt[3]{4} \cdot x\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4x^3 - 3x - 4x^3}{\sqrt[3]{(4x^3 - 3x^2)} + x \cdot \sqrt[3]{16x^3 - 12x} + x^2 \cdot \sqrt[3]{16}} = 0,$$

căci numitorul are gradul doi, pe când numărătorul are gradul unu.

Deci $y = \sqrt[3]{4} \cdot x$ este asimptotă oblică la ramura de la $+\infty$ a graficului funcţiei f.

b) Avem:

$$f'(x) = \left(\left(4x^3 - 3x\right)^{\frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{3} \cdot \left(4x^3 - 3x\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \left(12x^2 - 3\right) = \frac{4x^2 - 1}{\sqrt[3]{x^2 \left(4x^3 - 3\right)^2}},$$

cu $x \neq 0$ şi $x \neq \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Cum:

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = -\infty \quad \text{şi} \quad \lim_{x\to \pm\frac{\sqrt{3}}{2}} f'(x) = \infty,$$

rezultă că f nu este derivabilă în punctele $x_1 = 0$ şi $x_{2,3} = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

c) Fie $x \in [-1,1]$ şi $\alpha \in [0,\pi]$ astfel încât $\cos\alpha = 1$, atunci $f^3(x) = 4\cos^{\alpha} - 3\cos\alpha = \cos 3\alpha \in [-1,1]$, de unde $f(x) \in [-1,1]$.

Altfel: Funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 4x^3 - 3x$ este continuă şiîn plus avem: $g(-1) = -1$, $g(0) = 0$, $g(1) = 1$. De aici, rezultă că $g(x) \in [-1,1]$, pentru orice $x \in [-1,1]$ şi atunci $f(x) \in [-1,1]$, pentru orice $x \in [-1,1]$.

d) Pentru $\alpha = 2$, avem: $x_0 = 2$, $x_1 = x_0 \cdot \left(4x_0^3 - 3\right) = 26$ şi $x_{n+1} - x_n = = 4x_n^3 - 4x_n = 4x_n \cdot \left(x_n^2 - 1\right) > 0$, pentru orice $x \in \mathbb{N}$. Deci şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este strict crescător, având limita $+\infty$ în $\overline{\mathbb{R}}$: (în $\mathbb{R}$ şirul este divergent).

e) Pentru $\alpha = \cos\dfrac{2\pi}{3^k}$, $k \in \mathbb{N}^*$, şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este convergent.

Într-adevăr, pentru $k = 1$, avem $a = \cos\dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}$, $x_0 = -\dfrac{1}{2}$, $x_1 = -\dfrac{1}{2} \cdot (1-3) = 1$ şi $x_2 = x_1 \cdot \left(4x_1^2 - 3\right) = 1, \ldots$

Subşirul $\left(x_{n_p}\right)_{p\geq 1}$ are termenul general $x_{n_p} = 1$, constant, deci convergent la 1.

Cum, pentru $k > 1$, avem $\dfrac{2\pi}{3} > \dfrac{2\pi}{3^2} > \ldots > 0$ şi cum funcţia cosinus pe intervalul $\left[0, \dfrac{2\pi}{3}\right]$ este descrescătoare rezultă că $\cos\dfrac{2\pi}{3} < \cos\dfrac{2\pi}{3^2} < \ldots \leq 1$ şi deci şirul definit prin $x_0 = \cos\dfrac{2\pi}{3^k}$, $x_{n+1} = 4x_n^3 - 3x$, pentru orice $k = 2, 3, \ldots$ este strict crescător, căci în cazul particular $k = 2$ avem:

$$\cos 40^\circ \cdot (4\cos 40^\circ - 3) > 0.$$

Deci, există o infinitate de valori ale lui $a < 2$, pentru care şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este convergent.

Subiectul III

• Metoda didactică este parte a didacticii generale care studiază metodele şi formele de predare, adaptate la specificul fiecărui obiect de învăţământ. Ca metode didactice menţionăm: metode de predare ale profesorului, cum ar fi: metoda *expozitivă* a expunerii clare şi pe înţelesul elevului; metoda *activă* în sensul de satisfacere a tuturor cerinţelor elevului pentru învăţare, cerând elevului efort personal; metoda *euristică* constă în învăţarea pe baza cunoştinţelor asimilate anterior; metoda *exerciţiului* constă în exemple pentru însuşirea demonstraţiilor teoremelor şi mai ales pentru formarea de deprinderi şi priceperi de activitate intelectuală şi practică; metoda *analogiei*; metoda *intuiţiei*; metoda *învăţării prin descoperire* în care elevul, cu ajutorul profesorului, descoperă rezolvarea unei probleme sau demonstrarea unei teoreme etc.

• Mijloacele de învăţământ reprezintă baza tehnico-materială a învăţământului, adică ansamblul materialelor folosite de profesor pentru predarea lecţiilor în vederea înţelegerii şi asimilării cunoştinţelor predate, cum ar fi programa şi manualul; materiale intuitive (insectare, animale conservate, mulaje); materiale audiovizuale, proiectoare, calculatoare etc.

• Formele de organizare ale activităţilor didactice sunt: lecţia, desfăşurată cu colectivul clasei în vederea activizării elevilor, a însuşirii cunoştinţelor şi aplicării lor în practică şi forme de organizare a învăţării pe clase şco lare, în vederea instruirii unui număr de cel mult 25-28 elevi şi minimum 1415 elevi. Cunoştinţele se predau, pe obiecte de învăţământ, la nivelul mijlociu al clasei, adică pentru cei circa 60% dintre elevii unei clase care au inteligenţă mijlocie şi ritm de muncă mijlociu.

În baza celor expuse se pot da exemple de combinare eficientă a metodelor, mijloacelor şi formelor de organizare a activităţii didactice la disciplina de concurs.

DIDACTICA MATEMATICII

Scurtă prezentare a programului masteral de Matematică Didactică

Constantin Costara[1)] şi Viviana Ene[2)]

Programul masteral de Matematică Didactică are deja o tradiţie de mai bine de 10 ani în Facultatea de Matematică şi Informatică a Universităţii Ovidius din Constanţa. El a fost înfiinţat în anul 1999, mai întâi cu finanţarea oferită de Banca Mondială printr-un program de Pregătire Iniţială şi Continuă a Profesorilor şi în colaborare cu facultăţi, departamente de matematică şi colegii de ştiinţe ale educaţiei de la Universităţile Northern Iowa din Cedar Falls, Nevada din Las Vegas şi National din San Diego, toate din Statele Unite ale Americii, precum şi cu Universitatea Bretania Occidentală din Brest, Franţa. Programul masteral a fost aprobat de Ministerul Educaţiei şi Cercetării în anul 2001 când a absolvit şi prima promoţie de studenţi ai acestui masterat. În prezent, masteratul de Matematică Didactică este acreditat ARACIS.

[1)]Facultatea de Matematică şi Informatică, Universitatea Ovidius, Constanţa, cdcostara@univ-ovidius.ro

[2)]Facultatea de Matematică şi Informatică, Universitatea Ovidius, Constanţa, vivian@univ-ovidius.ro

El are ca scop să pregătească absolvenţi ai studiilor de licenţă în domeniul matematicii sau domenii conexe, pentru predarea matematicii în învăţământul preuniversitar.

Programul de masterat vizează atât pregătirea ştiinţifică în domeniul matematicii cât şi pregătirea didactică şi pedagogică a cursanţilor. Planul de învăţământ este subordonat acestei direcţii, dar urmăreşte şi deschiderea de perspective către doctorat în domeniul Didacticii Matematicii.

Actualul program de masterat continuă buna tradiţie a celui vechi, dar este adaptat schimbărilor survenite în cadrul programului de licenţă în matematică, impuse de aderarea la sistemul Bologna.

În primul an de studiu se oferă cursuri de bază în pregătirea ştiinţifică (aritmetică şi algebră, geometrie şi analiză matematică) şi pedagogică a studenţilor. În plus, planul de învăţământ pentru anul I include un curs însoţit de activităţi practice de *Instruire asistată de calculator*. Acesta acoperă diverse aspecte ale utilizării tehnologiei moderne în predarea şi învăţarea matematicii în şcoală: noţiuni de bază despre Internet, Intranet şi spaţiul Web; structura unui sistem e-learning; proiectarea unei lecţii (sau curs) on-line; metode de testare on-line; elemente multimedia în Web realizate în HTML şi XHTML.

În al doilea an de studii se oferă cursuri specializate în următoarele direcţii:

Curriculum şi evaluare în matematica şcolară. Cursul prezintă principiile şi ideile fundamentale ale curriculumului pentru matematică în gimnaziu şi liceu, face comparaţii între diverse tipuri de manuale şcolare şi analizează examenele naţionale. Toate acestea sunt însoţite de multiple aplicaţii practice şi diverse forme de evaluare. Evaluarea este examinată atât din perspectiva naţională cât şi internatională.

Complemente de matematici şcolare. În cadrul acestui curs se prezintă aplicaţiile matematicii la nivelul programei de liceu, având ca scop pregătirea viitorilor profesori de matematică. Cursul este extrem de util profesorilor din învăţământul preuniversitar pentru că insistă asupra diverselor aplicaţii ale matematicii în domenii conexe.

Predarea matematicii pentru elevii performanţi. Cursul propune metode specifice activităţii de predare pentru copiii performanţi şi câteva teme de sinteză în această arie care să constituie baza unui program individualizat pentru aceşti copii. Cursul pledează pentru o întindere tematică şi un nivel mai înalt de complexitate al temelor destinate pregătirii lor şi este însoţit de un seminar practic de rezolvare de probleme. Studenţii care au participat la acest curs au avut posibilitatea să exerseze în mod direct cunoştinţele asimilate în cadrul Centrului de pregătire pentru copiii performanţi care funcţionează în facultate şi în cadrul activităţilor comune organizate de facultatea noastră împreună cu Societatea de Ştiinţe Matematice din România şi Inspectoratul Şcolar Judeţean. În plus, în fiecare an, studenţii sunt implicaţi în toate etapele de desfăşurare a Concursului de Matematică al facultăţii noastre organizat în colaborare cu filiala locală a SSMR şi cu Inspectoratul Şcolar Judeţean.

Istoria matematicii. Cursul este destinat iniţierii viitorilor profesori de matematică în istoria matematicii, în vederea formării unei solide culturi matematice.

De-a lungul timpului, în cadrul acestui program de masterat, au fost organizate sesiuni deschise în care invitaţi din alte facultăţi din ţară, din licee din oraş sau experţi ai unor companii de software cu departamente puternice de software educaţional au susţinut conferinţe pe diverse subiecte.

În toate cele 4 semestre studenţii au ore de practică pedagogică, iar în primul an de studii au posibilitatea să urmeze cursuri specializate de pedagogie şi psihologie în cadrul Modulului psihopedagogic.

În al doilea an de studii studenţii elaborează o lucrare de disertaţie sub îndrumarea unui cadru didactic. Subiectul lucrării trebuie să ilustreze preocuparea masterandului pentru problematica predării matematicii în învăţământul preuniversitar, dar totodată să constituie şi un debut în cercetarea viitoare în didactică matematicii.

Disciplinele din Planul de învăţământ corespund la 120 de credite obligatorii; credite suplimentare se pot obţine prin parcurgerea unor cursuri opţionale şi/sau facultative suplimentare.

Cadrele didactice folosesc resursele noilor tehnologii (ex. e-mail, pagina personală de web pentru tematică, bibliografie, resurse în format electronic şi dialog cu studenţii) şi materiale auxiliare, de la tablă, la notebook şi videoproiector. Profesorii au ore de permanenţă la dispoziţia studenţilor şi personalizează îndrumarea la cererea studentului. Există îndrumători şi tutori de an. Toţi studenţii programului de masterat sunt antrenaţi în seminarii ştiinţifice studenţeşti coordonate de cadre didactice ale catedrei. Relaţia dintre student şi profesor este una de parteneriat, în care fiecare îşi asumă responsabilitatea atingerii rezultatelor învăţării. Rezultatele învăţării sunt explicate şi discutate cu studenţii din perspectiva relevantei acestora pentru dezvoltarea lor.

Facultatea asigură resurse de învăţare (manuale, tratate, referinţe bibliografice etc) în format clasic (facultatea dispune de o bibliotecă proprie) sau electronic cu acces de pe site-ul facultatii.

Experienţa neîntreruptă din ultimii 11 ani în organizarea acestui program masteral ne-a demonstrat ca el îşi are un rol bine determinat şi important în pregătirea tinerilor absolvenţi şi în perfecţionarea profesorilor care au deja experienţă în activitatea de predare. De altfel, mulţi dintre studenţii acestui program sunt cadre didactice cu cel puţin 5 ani vechime în învăţământ.

Începând cu acest an universitar, Facultatea de Matematică şi Informatică din Constanţa organizează şi un program masteral de Informatică

Didactică, acreditat ARACIS. Sperăm ca el se va bucura cel puţin de acelaşi succes ca şi masteratul de Matematică Didactică.

ÎN SPRIJINUL CURSURILOR OPŢIONALE

Propunere: Curs opţional de matematică la clasa a VIII-a Relaţii metrice

Dan Giurgiu[1)]

Argumente pentru alegerea opţionalului

– Elevii sunt foarte receptivi la ceea ce este practic, nou şi le trezeşte curiozitatea.

– Necesitatel obiectivă cere ca elevii să se adapteze mai uşor vieţii cotidiene atunci când se folosesc de modelele matematice.

– Lecţiile care abordează o astfel de tematică sunt captivante şi prezintă mare interes pentru elevi şi pentru profesori deoarece ele conduc la dezvoltarea gândirii creatoare a elevilor.

– Necesitatea de a obişnui elevii cu unele eforturi personale care să depăşească exigenţele şcolare de la orele obişnuite de clasă şi care să-i mobilizeze în a nu ceda uşor în faţa problemelor mai dificile.

– Pentru atingerea performanţei la geometrie este necesar ca, pe lângă însuşirea noţiunilor teoretice, să se desfăşoare şi o activitate intensă şi de lungă durată în ceea ce priveşte rezolvarea de probleme.

Obiective de referinţă

La sfârşitul clasei a VIII-a elevii vor fi capabili:

– să utilizeze proprietăţi calitative şi metrice ale figurilor geometrice în plan pentru a rezolva probleme;

– să determine, folosind metode adecvate (măsurare şi / sau calcul), lungimi de segmente, măsuri de unghiuri, arii şi volume;

– să utilizeze proprietăţi metrice ale figurilor geometrice situate pe feţele unor corpuri geometrice;

– să se formuleze cât mai multe consecinţe posibile care decurg dintrun set de ipoteze date;

– să construiască probleme pornind de la un model;

– să identifice şi să diferenţieze etapele unui raţionament matematic prezentat în diferite forme.

– să prezinte în mod coerent soluţia unei probleme utilizând modalităţi variate de exprimare.

[1)]Şc. nr. 37, Craiova

– să argumenteze logic în cadrul unui grup idei şi metode matematice şi să utilizeze diferite surse de informaţie în verificarea şi susţinerea opiniilor lor.

– să manifeste perseverenţă şi gândire creativă în rezolvarea problemelor.

– să manifeste interes pentru folosirea tehnologiilor informaţiei în studiul matematicii.

– să discute în cadrul unui grup avantajele şi dezavantajele utilizării unei metode de rezolvare sau a unei modalităţi de prezentare a unui demers matematic.

Activităţi de învăţare

– Calculul unor lungimi de segmente utilizând relaţiile metrice în triunghiuri, patrulatere şi cerc.

– Exerciţii şi probleme în care să fie formate şi aprofundate noţiunile matematice.

– Rezolvarea de probleme cu conţinut practic.

– Abordări de situaţii problemă şi abordarea lor matematică.

– Compunerea de probleme ca urmare a unor consecinţe posibile ce decurg dintr-un set de ipoteze.

– Argumentarea orală a demersului de rezolvare a unei probleme.

– Discutarea în grup a metodei de rezolvare a unei probleme.

– Elaborarea de referate sau proiecte care presupun utilizarea unor surse suplimentare de informaţii.

Conţinuturi

1. Relaţii metrice în triunghiul dreptunghic .... 3 ore
– Teorema înălţimii
– Teorema catetei
– Teorema lui Pitagora
– Relaţia lui Van-Aubel
– Relaţia lui Carnot
– Probleme

2. Relaţii metrice în triunghiul oarecare .... 10 ore
– Teorema bisectoarei
– Teorema lui Menelaus
– Teorema lui Ceva
– Relaţia lui Steiner
– Relatia lui Van - Aubel
– Teorema cosinusului
– Relaţia lui Stewart
– Teorema medianei
– Relaţia lui Leibnitz
– Probleme

3. Relaţii metrice în patrulatere .... 6 ore
– Relaţia lui Euler
– Relaţia ce caracterizează patrulaterul ortodiagonal
– Relaţia lui Pitot (caracterizează patrulaterul circumscriptibil)
– Teoremele lui Ptolemeu (caracterizează patrulaterul inscriptibil)
– Probleme

4. Relaţii metrice în cerc.................................... 5 ore
– Puterea unui punct faţă de un cerc
– Axa radicală a două cercuri
– Relaţii ce caracterizează patrulaterele inscriptibile
– Probleme

5. Probleme diverse.. 4 ore

6. Evaluări, discutarea testelor, proiectelor, portofoliilor...... 6 ore

Modalităţi de evaluare

– Teste de evaluare
– Fişe de lucru
– Referate, proiecte, portofolii
– Lucrări în grup, urmate de autoevaluare
– Discuţii permanente, chestionări orale continue

Bibliografie

[1] Ghe. Ţiţeica, *Probleme de geometrie*, Ediţia a VI-a, Editura Tehnică, Bucureşti.
[2] D. Brânzei şi colaboratori, *Matematici elementare*, Editura Junimea, Iaşi, 1983.
[3] D.Brânzei, A. Negrilă, *M Negrilă, Mate 2000 Algebră - Geometrie*, Ediţia a IX-a, Editura Paralela 45, Piteşti.
[4] ∗ ∗ ∗ Colecţia Gazeta Matematică.

PROBLEME PROPUSE

275. Let

$$A(z) = x^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k$$

be a polynomial with complex coefficients of degree $n \geq 2$ that has n distinct zeros $z_1, \ldots . z_n$ and let α be a nonzero complex number such that no ratio of two zeros of $A(z)$ is equal to α. Prove that

$$\sum_{n=1}^{n} \left(\frac{1}{A(\alpha - z^k) A'(z_k)} + \frac{1}{\alpha A\left(z_k/\alpha\right) A'(z_k)} \right) = 0.$$

José Luis Díaz Barrero and **Pantelimon George Popescu**

276. Fie d un întreg liber de pătrate şi (x_m, x_n) şirul soluţiilor ecuaţiei Pell $x^2 - dy^2 = 1$. Să se arate că pentru orice număr natural N, există o infinitate de perechi de numere naturale diferite m şi n astfel încât $(x_m, x_n) > N$. (Prin (a, b) notăm cel mai mare divizor comun al numerelor a şi b.)

Marian Tetiva

277. Dacă $u \in C^1([0,1))$ şi $u(0) = 0$, $u'(0) = 1$, atunci să se arate că:

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{u(c)} \mathrm{d}x + \int_0^1 \left(u'(x)\right)^2 \mathrm{d}x \geq 4.$$

Róbert Szász

278. Să se arate că există o fracţie raţională R cu coeficienţi real astfel încât:

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} = R(n)$$

pentru o infinitate de numere naturale n.

Marius Cavachi

279. Fie $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă, strict crescătoare, de două ori derivabilă în 0 cu $f(0) = f'(0) = 0$, $f''(0) > 0$, $\lim_{n\to\infty} f(x) = \infty$, iar $a > 0$.

Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}$ ecuţia

$$\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{kx}{n^2}\right) = a$$

are o unică soluţie în intervalul $(0, \infty)$, notată cu x_n şi că:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{6a}{f''(0)}}.$$

Dumitru Popa

SOLUŢIILE PROBLEMELOR PROPUSE

253. *Fie $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ o aplicaţie continuă şi strict pozitivă, iar $\varphi : \mathbb{R} \to (a,b)$ o aplicaţie derivabilă astfel încât*

$$\varphi'(x) = f(\varphi(x)),$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Să se arate că aplicaţia φ este inversabilă.

Dan Radu

Soluţia autorului. Să facem mai întâi observaţia că deoarece f este strict pozitivă, rezultă $\varphi'(x) > 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Conchidem că φ este strict crescătoare. Prin urmare, pentru a arăta că φ este inversabilă, este suficient să probăm că $\varphi(\mathbb{R}) = (a,b)$. Ţinând seama că φ este continuă (şi deci are proprietatea lui Darboux) şi strict crescătoare, urmează că pentru a demonstra egalitatea de mai sus, este suficient să arătăm că:

$$\lim_{x\to-\infty} \varphi(x) = a, \qquad \lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = b.$$

Să presupunem, prin absurd, de exemplu, că:

$$\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = \ell < b.$$

Vom arăta că $x \to +\infty$ dacă şi numai dacă $\varphi(x) \to \ell$. Într-adevăr, dacă $x \to +\infty$, atunci, în baza ipotezei făcute, rezultă că $\varphi(x) \to \ell$. Reciproc, să presupunem că $\varphi(x) \to \ell$ când $x \to x_0$, unde x_0 este fie un punct al dreptei reale, fie $-\infty$. Atunci, există un $c \in \mathbb{R}$, astfel încât $c > x_0$. Deorece φ este strict crescătoare, pentru orice $x \in (-\infty, c)$, vom avea $\varphi(x) < \varphi(a)$ şi deci:

$$\ell = \lim_{x\to\infty} \varphi(x) \le \varphi(c) < \sup_{x\to\mathbb{R}} \varphi(x) = \ell,$$

ceea ce constituie, evident o contradicţie. (Faptul că $l = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}}$ este o consecinţă imediată tot a calităţii lui φ de a fi strict crescătoare). Rezultă aserţiunea. Ţinând seama de rezultatul stabilit şi de faptul că f este continuă, deducem că există:

$$\lim_{x\to\infty} f(\varphi(x)) = \lim_{\varphi(x)\to\ell} f(\varphi(l)) = f(\ell).$$

Ori aceasta ne arată că există şi:

$$\lim_{x\to+\infty} \varphi'(x) = \lim_{x\to+\infty} f(\varphi(x)) = f(\ell).$$

În altă ordine de idei:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\varphi(x) + \ell x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\varphi(x)}{x} + \ell\right) = \ell.$$

Deoarece am demonstrat mai înainte existenţa limitei lui $\varphi'(x)$ când $x \to +\infty$, urmează că suntem în condiţiile teoremei lui l'Hospital şi deci:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\varphi(x) + \ell x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(\varphi(x) + \ell x)'}{(x)'} = \lim_{x\to+\infty} \big(\varphi'(x) + \ell\big) + f(\ell) + \ell.$$

Egalând cele două limite calculate în mod diferit, conchidem că $f(\ell) = 0$, ceea ce constituie – evident – o absurditate, întrucât funcţia f a fost presupusă strict pozitivă. Urmează că ipoteza făcută (şi anume că $\ell < b$) este falsă. Rămâne că:

$$\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = b.$$

În mod analog se demonstrează şi că:

$$\lim_{x\to-\infty}\varphi(x)=a.$$

Aceasta încheie demonstraţia.

Soluţie dată de *Marian Tetiva*, profesor la Colegiul Naţional „Gh. Roşca-Codreanu“ din Bârlad. Deoarece f este pozitivă, din relaţia din enunţ rezultă că φ' este pozitivă, deci că φ este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$; implicit, ea este injectivă. Pentru a-i demonstra şi surjectivitatea, vom folosi următoarea:

Lemă. *Fie $h:(c,d)\to\mathbb{R}$ o funcţie derivabilă, care are limita ∞ în d (sau $-\infty$ în c). Dacă există limita derivatei h'în d, respectiv în c), atunci această limită este ∞.*

Amân am deoacamdată demonstraţia lemei (de altfel foarte simplă) pentru a putea urmări nestingheriţi soluţia problemei.

Deoarece φ este continu a şi strict crescătoare, ea transformă $\mathbb{R}$ într-un interval deschis; fie deci $\varphi(\mathbb{R})=(c,d)\subseteq(a,b)$ şi $h=\varphi^{-1}:(c,d)\to\mathbb{R}$ funcţia inversă a lui φ. Deoarece φ este bijectivă, strict crescătoare şi derivabilă cu derivata nenulă, rezultă că şi h are aceleaşi proprietăţi, proprietăţi din care deducem imediat că h are limita $-\infty$ în c şi limita ∞ în d. În plus, relaţia din enunţ poate fi scrisă $\varphi'\left(\varphi^{-1}(t)\right)=f(t)$, pentru orice $t\in(c,d)$, sau încă:

$$f(t)=\frac{1}{h'(t)},\qquad\forall\, t\in(c,d).$$

Dacă, să zicem, am avea $d<b$, atunci f ar avea limita $f(d)\neq0$ în punctul d (care ar fi strict cuprins între a şi b). Aceasta ar conduce şi la existenţa limitei derivatei h' în punctul d (anume, aceasta ar trebui să fie $\dfrac{1}{f(d)}$, conform egalităţii anterioare). Dar atunci s-ar putea aplica lema, conform căreia h' trebuie să aibă limita ∞ în d şi astfel se ajunge la contradicţia:

$$f(d)=\lim_{t\to d}f(t)=\lim_{t\to d}f(t)=\frac{1}{h'(t)}=0.$$

Contradicţie ce se obţine şi dacă presupunem că $a<c$, exact în acelaşi mod (pentru limita în c, desigur). Rămâne atunci că $\varphi(\mathbb{R})=(c,d)=(a,b)$, ceea ce dovedeşte şi surjectivitatea lui φ. Ne mai rămâne de făcut.

Demonstraţia lemei, care, cum spuneam, nu este deloc grea. Fie $c<p<q<d$; conform teoremei lui *Lagrange* aplicate funcţie h pe intervalul $[p,q]$ există un punct $\alpha_{p,q}\in(p,q)$ astfel încât:

$$\frac{h(q)-h(p)}{q-p}+h'(\alpha_{p,q}).$$

Pentru un p fixat avem:

$$\lim_{q\to d}\frac{h(q)-h(p)}{q-p}=\infty$$

(deoarece $\lim\limits_{q\to d}h(q)=\infty$). Atunci, pentru fiecare $p\in(c.d)$ se poate găsi $q>p$, $q\in(c,d)$, astfel încât raportul $\dfrac{h(q)-h(p)}{q-p}$ să fie cât de mare dorim. În particular, dacă (p_n) este un şir de numere din (c,d) cu limita d, există pentru orice n un $q_n\in(p_n,d)$ astfel încât:

$$\frac{h(q_n)-h(p_n)}{q_n-p_n}>n,$$

ceea ce înseamnă, pentru $\alpha_n=\alpha_{p_n,q_n}\in(p_n,q_n)\subset(p_n,d)$, că:

$$h'(\alpha_n)>n,\quad\forall\, n\geq1.$$

Dar $p_n < \alpha_n < d$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = d$ implică şi $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = d$, deci

$$\lim_{x\to d} h'(x) = \lim_{n\to\infty} h'(\alpha_n) = \infty.$$

Pentru limita în c se procedează analog.

Observaţie. Este important în enunţul lemei ca d (dacă este vorba de limita în acest punct) să fie finit. Dar problema rămâne valabilă şi dacă $a = -\infty$ sau $b = \infty$ (sau ambele), deoarce ipoteza că (c, d) este strict inclus în (a, b) ar duce şi în asemenea cazuri la un c (sau d) finit, deci rezultatul lemei s-ar aplica şi contradicţia s-ar obţine la fel. Important este faptul că f este pozitivă pe tot intervalul (altfel un exemplu simplu ca $f(x) = x$ definită pe $\mathbb{R}$ şi $\varphi(x) = \mathrm{e}^x$, considerată cu valori reale, ar infirma rezultatul).

Nota redacţiei. O soluţie a problemei a dat şi domnul inginer *Marius Olteanu* de la S. C. Hidroconstrucţia S.A. Bucureşti, sucursala „Olt-Superior" din Râmnicu-Vâlcea.

254. *Să se arate că, pentru orice numere naturale $p \geq q \geq 1$, avem*

$$\sum_{j=1}^{p-q+1} \frac{2^{j-1}}{j}\binom{p-j}{q-1} = \sum_{k=0}^{[(p-q)/2]} \frac{1}{2k+1}\binom{p}{q+2k}.$$

Marian Tetiva

Soluţia autorului. Începem cu un rezultat ajutător (probabil cunoscut):

Lemă. *Are loc identitatea*:

$$\binom{p-1}{q-1} + \binom{p-2}{q-1}x + \ldots + \binom{q-1}{q-1}x^{p-q} =$$

$$= \binom{p}{q} + \binom{p}{q+1}(x-1) + \ldots + \binom{p}{q}(x-1)^{p-q}$$

pentru orice număr complex x şi orice numere naturale $p \geq q \geq 1$.

Demonstraţie. Să notăm:

$$S_q = \binom{p-1}{q-1} + \binom{p-2}{q-1}x + \ldots + \binom{q-1}{q-1}x^{p-q}$$

şi să observăm că, folosind relaţia de recurenţă a coeficienţilor binomiali, avem:

$$(x-1)S_q = S_{q-1} - \binom{p}{q-1}$$

(pentru p fixat şi $q \leq p$). Iterând această şi utilizând $S_1 = 1x + \ldots + x^{p-1}$ rezultă imediat că:

$$(x-1)^{q-1}S_q = x^{p-1} + \ldots + 1 - \left(\binom{p}{1} + \binom{p}{2}(x-1) + \ldots + \binom{p}{q-1}(x-1)^{q-2}\right).$$

Această egalitate înmulţită cu $x-1$ se mai scrie:

$$(x-1)^q S_q = x^p - \sum_{i=0}^{q-1}\binom{p}{i}(x-1)^i$$

şi identitatea din lemă este demonstrată deoarece:

$$x^p = (x-1+1)^p = \sum_{i=0}^{p}\binom{p}{i}(x-1)^i.$$

Tot ce mai avem de făcut pentru a justifica enunţul este să egalăm integralele de la 0 la 2 (în raport cu x) ale celor doi membri ai identităţii din lemă.

255. *Să se calculeze*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{\sqrt{n^2+8k^2-8k+4}}.$$

Gheorghe Szöllösy

Soluţie dată de *Marius Olteanu*, inginer la S. C. Hidroconstrucţia S.A. Bucureşti, sucursala „Olt-Superior“ din Râmnicu-Vâlcea şi *Ioan Ghiţă*, profesor la Colegiul Naţional I. M. Clain din Blaj.

Considerm̆ funcţia $f : [0,1] \to \mathbb{R}_+^*$ definită de $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+8x}}$; diviziunea $\Delta_n = \left(0 < \dfrac{1^2}{n^2} < \dfrac{2^2}{n^2}, \ldots < \dfrac{(n-1)^2}{n^2} < 1\right)$ cu;

$$\|\Delta_n\| = \frac{n^2-(n-1)^2}{n^2} = \frac{2n-1}{n^2} \to 0$$

şi sistemul de puncte intermediare:

$$\xi_k^n = \left(\frac{k^2-k+\frac{1}{2}}{n^2}\right)_{k=\overline{1,n}},$$

unde:

$$x_{k-1}^n < \xi_k^n < x_k^n \Leftrightarrow \frac{(k-1)^2}{n^2} < \frac{k^2-k+\frac{1}{2}}{n^2} < \frac{k^2}{n^2} \Leftrightarrow k > \frac{1}{2}$$

(evident adevărat).

Suma Riemann astfel obţinut este:

$$\sum_{k=1}^{n} f\left(\xi_k^n\right)\left(x_k^n - x_{k-1}^n\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+8\cdot\dfrac{k^2-k+\frac{1}{2}}{n^2}}} \cdot \left(\frac{k^2-(k-1)^2}{n^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{\sqrt{n^2+8k^2-8k+4}},$$

deci limita căutată este:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+8x}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\cdot\sqrt{1+8x}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Soluţie dată de *Nicuşor Minculete*, Universitatea Creştină Dimitrie Cantemir, Braşov. Fie $a_n = \dfrac{1}{n}\cdot\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{\sqrt{n^2+8k^2-8k+4}}$. Observăm că:

$$a_n \le \frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{\sqrt{n^2+8k^2-8k+2}} = \frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{\sqrt{n^2+2(2k-1)^2}} =$$

$$= \frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{\dfrac{2k-1}{2n}}{\sqrt{\dfrac{1}{4}+2\left(\dfrac{2k-1}{2n}\right)^2}} = b_n.$$

Luăm $f : [0,1] \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{\frac{1}{4} + 2x^2}}, \qquad D_n = \left(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\right) \in \Delta_{[0,1]}$$

cu $\|D_n\| = \dfrac{1}{n} \to 0$ şi alegem punctele intermediare $\xi_k = \dfrac{2k-1}{2n} \in \left[\dfrac{k-1}{n}, \dfrac{k}{n}\right]$, pentru orice $k \in \overline{1,n}$, de unde deducem că:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{2k-1}{2n}}{\sqrt{\frac{1}{4} + 2\left(\frac{2k-1}{2n}\right)^2}} = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{\frac{1}{4} + 2x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2},$$

adică:

$$b_n \to \frac{1}{2}. \tag{$*$}$$

Acum vom căuta o margine inferioară pentru a_n, astfel:

$$a_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{\sqrt{n^2 + 8k^2 - 8k + 2}} =$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2k+1}{\sqrt{n^2 + 2(2k+1)^2}} - \frac{2}{\sqrt{n^2 + 2(2k+1)^2}} \right) =$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{\sqrt{n^2 + 2(2k+1)^2}} - \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{\sqrt{n^2 + 2(2k+1)^2}} =$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2k+1}{\sqrt{n^2 + 2(2k+1)^2}} + \frac{2n+1}{n\sqrt{n^2 + 2(2n+1)^2}} - \frac{1}{n\sqrt{n^2+2}} +$$

$$+ \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{\sqrt{n^2 + 2(2k+1)^2}} = c_n.$$

Luăm $f : [0,1] \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{\frac{1}{4} + 2x^2}}, \qquad D_n = \left(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\right) \in \Delta_{[0,1]}$$

cu $\|D_n\| = \dfrac{1}{n} \to 0$ şi alegem punctele intermediare $\xi_k = \dfrac{2k+1}{2n} \in \left[\dfrac{k}{n}, \dfrac{k+1}{n}\right]$, pentru orice $k \in \overline{0, n-1}$, de unde deducem că:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\frac{2k+1}{2n}}{\sqrt{\frac{1}{4} + 2\left(\frac{2k+1}{2n}\right)^2}} = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{\frac{1}{4} + 2x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2},$$

iar:

$$\frac{2n+1}{n\sqrt{n^2 + 2(2n+1)^2}} - \frac{1}{n\sqrt{n^2+2}} - \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{\sqrt{n^2 + 2(2k+1)^2}} \to 0,$$

deoarece

$$\frac{2}{\sqrt{n^2+18}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{\sqrt{n^2+18}} \geq \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{\sqrt{n^2 + 2(2k+1)^2}} \geq$$

$$\geq \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{\sqrt{n^2+2(2n+1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{n^2+2(2n+1)^2}},$$

iar cu ajutorul criteriului cleştelui, pentru $n \to \infty$, obţinem:

$$\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{\sqrt{n^2+2(2k+1)^2}} \to 0,$$

iar:

$$\frac{2n+1}{n\sqrt{n^2+2(2n+1)^2}} - \frac{1}{n\sqrt{n^2+2}} \to 0,$$

ceea ce înseamnă că:

$$c_n \to \frac{1}{2}. \tag{$**$}$$

Cum $c_n \leq a_n \leq b_n$ şi din relaţiile $(*)$ şi $(**)$, cu ajutorul criteriului cleştelui, pentru $n \to \infty$, rezultă că:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{\sqrt{n^2+8k^2-8k+4}} = \frac{1}{2}.$$

256. *Să se arate că, în orice tetraedru, are loc inegalitatea*

$$2R^\alpha + 3^\alpha r^\alpha \geq 2^{-\alpha} \cdot 3^{1+\frac{5\alpha}{6}} V^{\frac{\alpha}{3}},$$

unde notaţiile sunt cele uzuale din tetraedru, iar $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 1$.

Nicuşor Minculete

Soluţia autorului. Demonstrăm, pentru început, inegalitatea din enunţ în cazul în care $\alpha = 1$, adică:

$$2R + 3r \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{3V}. \tag{1}$$

Se ştie că pentru orice punct M din spaţiu, are loc inegalitatea lui Leibniz:

$$4\sum MA^2 \geq a^2+b^2+c^2+l^2+m^2+n^2, \tag{2}$$

unde $[ABCD]$ este tetraedru oarecare cu notaţiile $|BC| = a$, $|AC| = b$, $|AB| = c$, $|AD| = l$, $|BD| = m$, $|CD| = n$; V este volumul tetraedrului, S_A – aria feţei BCD (analog S_B, S_C, S_D), S – aria totală a tetraedrului, R – raza sferei circumscrise, iar r – raza sferei înscrise în tetraedru.

Dacă $M \equiv O$, centrul sferei circumscrise tetraedrului, atunci:

$$16R^2 \geq a^2+b^2+c^2+l^2+m^2+n^2,$$

de unde:

$$32R^2 \geq \left(a^2+b^2+c^2\right)+\left(b^2+l^2+n^2\right)+\left(c^2+l^2+m^2\right)+\left(a^2+m^2+n^2\right),$$

iar prin utilizarea inegalităţii lui Weitzenböck în triunghiurile ABC, ACD, ABD şi BCD, deducem inegalitatea:

$$32R^2 \geq 4\sqrt{3}\left(S_A+S_B+S_C+S_D\right) = 4\sqrt{3}S,$$

deci

$$R^2 \geq \frac{\sqrt{3}}{8}S,$$

de unde, prin înmulţire cu r, avem:

$$R^2 \cdot r \geq \frac{3\sqrt{3}}{8}V. \tag{3}$$

Aplicăm inegalitatea mediilor aritmetic şi geometrice, astfel:

$$\frac{R+R+3r}{3} \geq \sqrt[3]{3R^2r} \geq \sqrt[3]{\frac{9\sqrt{3}}{8}V}$$

(din (3)), prin urmare:

$$2R+3r \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{3V}.$$

Considerăm funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$, $\alpha\geq 1$. Cum $f''(x)=\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}\geq 0$, rezultă că aceasta este o funcţie convexă, iar prin întrebuinţarea inegalităţii lui Jensen avem:

$$\frac{f(R)+f(R)+f(3r)}{3} \geq f\left(\frac{3R+3r}{3}\right),$$

adică:

$$\frac{2R^\alpha+3^\alpha\cdot r^\alpha}{3} \geq \left(\frac{2R+3r}{3}\right)^\alpha \overset{(1)}{\geq} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{3V}\right)^\alpha,$$

aşadar:

$$2\cdot R^\alpha+3^\alpha\cdot r^\alpha \geq 2^{-\alpha}\cdot 3^{1+\frac{5\alpha}{6}}\cdot V^{\frac{\alpha}{3}}.$$

Observaţie. Pentru $\alpha=3$ obţinem o inegalitate interesantă şi anume:

$$2R^3+27r^3 \geq \frac{27\sqrt{3}}{8}\cdot V.$$

257. *Să se arate că*

$$\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{1+\sqrt{k^2(k+1)^2+1}}{k(k+1)}\right) \leq \frac{n}{n+1} \leq \sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k^2+k}{k^2+k-1}\right)$$

Mihály Bencze

Soluţia autorului. Dacă $x>0$, atunci:

$$\ln\left(\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right) \leq \frac{1}{x}. \qquad (1)$$

Într-adevăr, dacă vom considera funcţia f dată de:

$$f(x)=\ln\left(\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right)-\frac{1}{x},$$

atunci:

$$f'(x)=\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)\leq 0.$$

Prin urmare $f(x)\leq \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$, pentru orice $x>0$, i. e.:

$$\ln\left(\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right) \leq \frac{1}{x}.$$

În particular, pentru $x=k(k+1)$, obţinem:

$$\ln\left(\frac{1+\sqrt{1+k^2(k+1)^2}}{k(k+1)}\right) \leq \frac{1}{k(k+1)},$$

de unde:

$$\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{1+\sqrt{k^2(k+1)^2+1}}{k(k+1)}\right) \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{n}{n+1}.$$

Dacă $x > 0$, atunci:

$$\ln(1+x) \geq \frac{x}{x+1}. \tag{2}$$

Într-adevăr, dacă vom considera funcţia g dată de:

$$g(x) = h(1+x) - \frac{x}{x+1},$$

atunci $g'(x) = \dfrac{x}{(x+1)^2} \geq 0$, deci $g(x) \geq g(0) = 0$, pentru orice $x > 0$.

Dacă în (2) luăm $x = \dfrac{1}{k^2+k-1}$ şi sumăm, obţinem:

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k^2+k}{k^2+k+1}\right) \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Nota redacţiei. O demonstraţie prin inducţie a inegalităţii a dat *Ioan Ghiţă*, profesor la Colegiul Naţional I. M. Clain din Blaj. De asemenea, o soluţie corectă, similară cu cea a autorului, a dat prof. *Nicuşor Minculete* de la Universitatea Creştină Dimitrie Cantemir, Braşov.

258. *Fie*

$$I_n = \int_0^1 (x - x^2)^n \mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Să se arate că şirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este convergent şi să se afle limita sa.*

Laurenţiu Modan

Soluţie. (Rezolvarea standard.) Funcţia continuă şi pozitivă $x \in [0,1] \mapsto f(x) = x - x^2$ are maximul $\dfrac{1}{4}$ (atins pentru $x = \dfrac{1}{2}$), deci, din proprietatea de monotonie a integralei, decurge:

$$0 \leq I_n \leq \int_0^1 \left(\frac{1}{4}\right)^n \mathrm{d}x = \left(\frac{1}{4}\right)^n. \tag{1}$$

Din această dublă inegalitate şi din relaţia $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{4}\right)^n = 0$ rezultă, în baza criteriului majorării, că şirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent şi că $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$.

Notă. Datorită faptului că funcţia f este neidentic nulă pe $(0,1)$ şi îşi atinge maximul doar pentru $x = \dfrac{1}{2}$, inegalitatea (1) se scrie mai precis sub formă strictă:

$$0 < I_n < \left(\frac{1}{4}\right)^n, \tag{1'}$$

concluziile de convergenţă menţinându-se valabile.

Observaţii. (*Andrei Vernescu*) În afară de obţinerea convergenţei la 0, integrala poate fi şi calculată, prin stabilirea unei relaţii de recurenţă, anume $I_k = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{2k}{2k+1} I_{k-1}$ şi iterarea acesteia pentru $k = 1, 2, 3, \ldots, n$. Dar o cale mai interesantă şi totodată mai rapidă de calcul constă în reducerea integralei la una din integralele cunoscute:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n} \cdot \dfrac{\pi}{2}, & \text{pentru} \quad m = 2n \\ \dfrac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (2n+1)}, & \text{pentru} \quad m = 2n+1, \end{cases} \tag{2}$$

anume la cea de ordin impar ($m = 2n+1$).

Reamintim că integralele (2) apar în demonstraţia uzuală a formulei lui *Wallis* (a se vedea, de exemplu, *Caius Iacob*, „Lecţii de matematici superioare“, Editura Tehnică, Bucureşti, 1957, pp. 466-467) şi, din această cauză, au fost numite şi integralele lui *Wallis*, deşi *Wallis* nu le-a folosit, pentru simplul motiv că la jumătatea secolului al XVII-lea Calculul diferenţial şi integral, al lui *Newton* şi *Leibniz* nu fusese inventat (mai avea de aşteptat câteva decenii!). Cu privire la aceasta, este interesant de consultat articolul lui *George A. Dickinson* ,,Wallis's product for $\frac{\pi}{2}$“, The Mathematical Gazette, Vol. XXI (1937), pp. 135-139.

Revenind la integrala din enunţ, într-adevăr, efectuând schimbarea de variabilă $x = t + \frac{1}{2}$ (care o reduce la o integrală pe un interval simetric faţă de origine), utilizând paritatea, efectuând o nouă schimbare de variabilă $t = \frac{1}{2}\cos s$ şi utilizând prima egalitate din (2), se obţine succesiv:

$$I_n = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{4} - t^2\right)^n \mathrm{d}t = 2\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{4} - t^2\right)^n \mathrm{d}t = 2\left(\frac{1}{4}\right)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} s\mathrm{d}s =$$
$$= 2\left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n}{3\cdot 5\cdot 7\cdot \ldots \cdot (2n+1)}. \tag{3}$$

Pe o cale perfect asemănătoare se poate obţine, pentru integrala $J_n = \int_0^1 \left(x - x^2\right)^{\left(n+\frac{1}{2}\right)} \mathrm{d}x$, că:

$$J_n = 2\left(\frac{1}{4}\right)^{n+\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+2} s\mathrm{d}s = 2\left(\frac{1}{4}\right)^n \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2n+2)} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Ordinul de mărime al integralelor lui *Wallis* este dat de inegalitatea lui *A. Lupaş*:

$$\sqrt{\frac{\pi}{2(m+1)}} < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\mathrm{d}x < \sqrt{\frac{\pi}{2m}}, \quad m = 1, 2, 3, \ldots \tag{4}$$

(a se vedea problema 17554 din Gazeta Matematică Seria B, nr. 12/1978), care poate fi demonstrată analizând succesiv cazurile când $m = 2n$, respectiv $m = 2n + 1$ şi utilizând inegalitatea:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi\left(n + \frac{1}{2}\right)}} < \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n} < \frac{1}{\sqrt{\pi n}}\,^{1)} \tag{5}$$

Din (3) şi (4) se obţine se obţine $\lim\limits_{n\to\infty} 4^n\sqrt{n} = \sqrt{\pi}$, deci $I_n = O\left(\frac{1}{4^n\sqrt{\pi n}}\right)$.

Toate calculele precedente se extind fără dificultate pentru şirurile de termen general:

$$I_n^{(a,b)} = \int_a^b \left(-x^2 + (a+b)x - ab\right)^n \mathrm{d}x,$$

[1] Inegalitatea (5) se găseşte în *D. S. Mitrinović*, *P. M. Vasić* „Analytic Inequalities“, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1970, pag.192. Pentru demonstraţia sa, ca şi a altora asemănătoare, se va putea consulta *A. Vernescu* „The Natural Proof of the Inequalities of Wallis Type“, Libertas Mathematica, 24 (2004), 183. (N.R.)

respectiv:

$$J_n^{(a,b)} = \int_a^b \left(-x^2 + (a+b)x - ab\right)^n \mathrm{d}x$$

(unde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$), adică :

1° Se poate găsi direct relaţia de recurenţă care duce apoi, prin iterare, la explicitarea lui $I_n^{(a,b)}$, respectiv $J_n^{(a,b)}$;

2° Se pot reduce integralele $I_n^{(a,b)}$, respectiv $J_n^{(a,b)}$ la câte o integrală pe un interval simetric faţă de originea axei Ox, anume $\left[-\dfrac{b-a}{2}, \dfrac{b-a}{2}\right]$, apoi, folosind paritatea, la câte o integrală pe intervalul $\left[0, \dfrac{b-a}{2}\right]$ şi în final, la câte o integrală a lui *Wallis*, înmulţită cu $\left(\dfrac{b-a}{2}\right)^n$, respectiv $\left(\dfrac{b-a}{2}\right)^{n+\frac{1}{2}}$.

Nota redacţiei. O problemă bazată tot pe şirul de integrale de termen general $I_n = \displaystyle\int_0^1 \left(x - x^2\right)^n \mathrm{d}x$, dar cu alte cerinţe şi altfel puse, a apărut în variantele de bacalaureat din 2006, varianta 22, subiectul IV. Acolo se cereau inegalităţile $0 \le x - x^2 \le \dfrac{1}{4}$, pentru orice $x \in [0,1]$, $0 \le I_n \le \dfrac{1}{4}$ [fără a se cere valorificarea ultimeia la enunţarea explicită a convergenţei $I_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (poate se subînţelegea!)], apoi se cerea stabilirea relaţiei de recurenţă $I_n = \dfrac{1}{4}\dfrac{2n}{2n+1}I_{n-1}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $n \ge 2$, valorificarea acesteia la explicitarea $I_n = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{4}{5} \cdot \ldots \cdot \dfrac{2n}{2n+1}\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, stabilirea prin inducţie a inegalităţii $\dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{4}{5} \cdot \ldots \cdot \dfrac{2n}{2n+1} < \dfrac{\sqrt{3}}{2n+3}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ şi determinarea limitei $\lim\limits_{n\to\infty} 4^n I_n$, care este egală cu zero.

Soluţii corecte ale problemei au mai dat: *Nicuşor Minculete* de la Universitatea Creştină Dimitrie Cantemir din Braşov, *Ioan Ghiţă* – profesor la Colegiul Naţional I. M. Clain din Blaj şi *Marin Tetiva* – profesor la Colegiul Naţional Gheorghe Roşca-Codreanu Bârlad.

ISTORIA MATEMATICII

Premii de 1 milion de dolari în matematică
(Istoria unor probleme matematice, „Problemele Mileniului“)[1)]

Adrian Albu[2)]

Abstract. We review briefly some of the outstanding problems of contemporary Mathematics. We avoid specific technical aspects.
Keywords: History of Mathematics, Millenium problems.
MSC : 01A61, 00A05.

Scopul acestui articol este informativ. Deşi discută despre cele mai dificile probleme matematice ale epocii noastre (cu o scurtă incursiune în istoria mai veche), el evită aproape complet orice aspecte tehnice, menţinându-se la un nivel general de informare al unui public intelectual cât mai larg. Pentru o mai completă informare a celor interesaţi peste nivelul general, am menţionat câteva repere bibliografice fundamentale.

Scurt istoric

Dacă nu putem spune într-o frază „ce este matematica“ (după cum se ştie, este nevoie de o carte întreagă sau de o serie de cărţi pentru un răspuns, nici acela, probabil, foarte complet), putem, totuşi, constata că matematica a „început“ cu enunţuri şi rezolvări de probleme concrete. Într-adevăr, protomatematica vechilor civilizaţii egipteană, babyloniană, chineză, hindusă, care se sfârşeşte cam odată cu secolele VIII-VII î.e.n., o cunoaştem în principal din „culegeri de probleme“, în care soluţiile sunt date sub formă de reţete, cu indicaţia, uneori, imperativă: „Fă aşa“; aceste reţete sunt precursoarele antice ale formulelor şi algoritmilor de astăzi. Astfel de texte sunt papirusurile egiptene *Rhind* şi *Golešnikov* (sau de la Moscova), tăbliţele de lut babyloniene, vechiul text chinezesc *Matematica în nouă cărţi* şi chiar *Arithmetica* lui *Diophant* (sec. III e.n.) din epoca postelenistică. Odată cu *Thales* şi *Pitagora* şi succesorii lor, prin trecerea la matematica deductivă, aceasta se dezvoltă pe două linii principale: necesităţile puse de practică şi probleme interne ale matematicii. Pe ambele căi se pun şi se rezolvă probleme; unele dintre acestea primesc o formă general abstractă şi devin *teoreme*, iar soluţiile lor nu mai sunt reţete empirice, ci deducţii logice, numite *demonstraţii.* Matematica antică cunoaşte primele „mari“ probleme, numite în Istoria matematicii „probleme celebre“ sau „clasice“: cuadratura cercului, dublarea cubului şi trisecţia unghiului. La acestea se adaugă, ceva mai târziu, problema construcţiei geometrice (cu rigla şi compasul) a poligoanelor regulate şi celebra problemă a postulatului paralelelor. Încercând să le rezolve, omenirea a învăţat matematică, dezvoltând-o până în timpurile moderne. Este suficient să amintim că ultima problemă menţionată, aceea a postulatului paralelelor lui *Euclid*, a contribuit în mod esenţial la descoperirea geometriei neeuclidiene (hiperbolice), de către *N. I. Lobacevski* şi *J. Bolyai*, în prima jumătate a secolului al XIX-lea.

Se înţelege că acestea au fost „mari“ probleme nerezolvate (sau deschise, conjecturi) la vremea lor, de o dificultate şi de o amploare deosebite. Dacă am încerca o clasificare, în acest caz inevitabil subiectivă, le-am numi pe acestea, şi pe cele de nivelul lor, probleme (conjecturi) de „rang zero“, iar cele de dificultate în descreştere, probleme de rang unu, doi etc. Toate problemele matematice ale antichităţii, menţionate mai sus, au fost rezolvate

---

[1)] O formă redusă a acestui text a fost prezentată la a IX-a Conferinţă anuală a S.S.M.R., Lugoj, 6-7 mai 2005.

[2)] Universitatea de Vest din Timişoara

în decursul istoriei matematicii. În matematică, în fiecare perioadă de-a lungul istoriei sale de aproape 30 de secole, au existat probleme nerezolvate remarcabile (de rang zero, unu) sau probleme deschise, cu un termen tehnic – *conjecturi*, care au atras uneori, ca un magnet, generaţii de matematicieni la rezolvarea lor. Matematica nu şi-a epuizat niciodată marile ei probleme. De altfel, în matematica modernă, dar nu numai, mulţi matematicieni şi-au câştigat un renume tocmai prin rezolvarea dată la o astfel de problemă deschisă remarcabilă. Un al doilea mod important de a obţine recunoaşterea în matematică constă în a construi şi dezvolta o teorie matematică nouă şi a rezolva problemele care se pun acolo.

Dar să revenim la problemele deschise. *D. Hilbert* (1862-1943), celebrul matematician german, spunea, în 1900, că un domeniu al matematicii este atât timp viabil, consistent şi interesant din punct de vedere matematic, cât el „produce“ un număr cât mai mare de probleme. Prin urmare, prin contrapoziţie, un domeniu sărac în probleme devine steril, fără interes, se stinge. Istoria matematicii cunoaşte situaţii de acest fel.

Istoria marilor probleme deschise ale matematicii este interesantă, de multe ori captivantă şi chiar imprevizibilă. Să nu ne lăsăm înşelaţi de enunţul foarte simplu al unora. Este adevărat că există conjecturi cu un enunţ foarte tehnic, de neînţeles pentru cei care nu sunt specialişti ai domeniului; pentru cunoscători menţionăm, ca exemple, „Conjectura lui Poincaré“ şi „Ipoteza lui Riemann“, despre care va fi vorba şi mai departe. Dar există probleme matematice nerezolvate, care s-au dovedit de mare dificultate, dar al căror enunţ este deconcertant de simplu. Iată un exemplu de astfel de problemă deschisă, pe care o înţelege chiar şi un elev de gimnaziu care ştie ce este un număr prim (un număr natural care nu se împarte exact decât la 1 şi la el însuşi). Este celebra „conjectură a lui Goldbach“, care apare într-o scrisoare a lui *Chr. Goldbach* din 1742 către marele matematician *L. Euler* (în acea perioadă profesor la Academia de Ştiinţe din Berlin): Orice număr par mai mare sau egal cu 6 este suma a două numere prime. Exemple: $96 = 13 + 83$, $168 = 71 + 97$. Conjectura lui Goldbach s-a verificat numeric pentru un număr foarte mare de numere pare, progrese modeste s-au făcut în secolul trecut în abordarea ei, dar problema a rămas până azi nerezolvată.[1)] Un enunţ simplu îl are şi „conjectura (sau marea / ultima teoremă a) lui Fermat“ (cca. 1620), în total contrast cu dificultatea enormă întâmpinată de matematicienii care au abordat problema, pe care acum o putem perfect aprecia datorită faptului că ea a fost rezolvată în ultimii ani ai secolului trecut. Conjectura lui Fermat a cerut să se arate că ecuaţia $x^n + y^n = z^n$ nu are soluţii întregi nenule pentru orice număr natural $n \geq 3$.

În epoca modernă, de prin secolul XIX, au început să fie contabilizate marile probleme deschise din matematică; se alcătuiesc „liste“ cu problemele remarcabile nerezolvate, periodic se analizează stadiul rezolvării lor. Enunţurile acestora sunt, în general, foarte specializate. Probabil, cel mai cunoscut exemplu este acela al „problemelor lui Hilbert“; este vorba de o listă cu 23 de probleme remarcabile nerezolvate până la sfârşitul secolului al XIX-lea, alcătuită de *D. Hilbert* şi prezentată de el la al doilea Congres Internaţional al Matematicienilor, care a avut loc în august 1900 la Paris. Printre problemele de pe „lista lui Hilbert“ menţionăm: 1) Ipoteza continuului (problema nr. 1): (Există un număr cardinal situat strict între cardinalul numărabil şi continuu?); 2) problema dotării unui grup topologic cu o structură de grup diferenţiabil (grup S. Lie) (celebra „problemă a 5-a“ a lui Hilbert); 3) problema transcendenţei unor numere reale (ca $2^{\sqrt{2}}$, e^{π} etc.): (Există sau nu ecuaţii algebrice cu coeficienţi raţionali care să admită aceste numere ca rădăcini?); 4) Ipoteza lui Riemann, referitoare la zerourile „funcţiei zeta“ a lui Riemann care are forma

[1)] Există un interesant roman, a cărui poveste se desfăşoară în jurul conjecturii lui Goldbach, pe care-l recomandăm în special matematicienilor: A. Doxiadis, *Unchiul Petros şi conjectura lui Goldbach*, Ed. Humanitas, 2003.

$\zeta(z) = 1 + \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} + \ldots$, unde $z = a + ib$ este un număr complex; 5) existenţa unor algoritmi pentru rezolvarea ecuaţiilor diophantice (ecuaţii cu coeficienţi întregi pentru care se caută soluţii numere întregi sau raţionale) ş.a.[1)]

Este, poate, interesant să remarcăm că printre omisiuni le importante ale lui *Hilbert* se găseau următoarele trei probleme celebre din acel timp: conjectura lui Goldbach, conjectura lui Fermat (ambele menţionate mai sus) şi Problema celor trei corpuri din Mecanica teoretică (*H. Poincaré*, 1889-1890); este adevărat că ultimele două au legături cu unele probleme din „listă“.

În genul „listei lui Hilbert“ se alcătuiesc în ultimele decenii, oarecum periodic, liste cu probleme deschise din matematică, având diverse nivele de dificultate şi grade diferite de impact în matematica de astăzi. Stadiul de rezolvare al problemelor lui Hilbert a fost periodic analizat în seminarii şi conferinţe ştiinţifice. Astfel, la conferinţa anuală a prestigioasei societăţi matematice americane *American Mathematical Society* (AMS) din mai 1974, subiectul fixat a fost „Dezvoltarea matematicii ca o consecinţă a Problemelor lui Hilbert“. Cunoscutul matematician francez *J. Dieudonné* (decedat în 1992, în vârstă de 82 de ani) a făcut atunci Comitetului de organizare a conferinţei propunerea să constituie o comisie de matematicieni eminenţi care să alcătuiască o listă a celor mai importante probleme matematice nerezolvate la acea dată. Se spera, pe bună dreptate, că o astfel de listă poate servi la concentrarea interesului tinerilor matematicieni către subiecte valabile, importante, şi să-i ajute să-şi găsească domeniul de cercetare în condiţiile creşterii considerabile a lucrărilor matematice ce se publică. Nu cunoaştem urmările imediate ale propunerii lui *Dieudonné*, dar constatăm că în ultimul sfert al secolului trecut au apărut mai multe cărţi şi articole în care se enunţă problemele deschise dintr-un anumit domeniu al matematicii, se comentează posibile moduri de abordare a soluţiilor, se evaluează impactul rezultatului în ipoteza stabilirii lui.[2)] Evident că în afara acestor texte şi „liste“ rămân încă un număr mare de probleme nerezolvate din diverse domenii ale matematicii, să le spunem probleme de rangul 2, 3 etc., în sensul ipoteticei noastre clasificări de mai sus, care şi ele stau în atenţia matematicienilor cercetători.

Strategii de abordare

Înainte de a prezenta preocupările „la zi“ în privinţa problemelor deschise (conjecturi) ale prezentului, să vedem, pe scurt, care sunt aspectele matematice generale şi ce strategii generale pot fi adoptate în abordarea conjecturilor matematice. Totul, ne străduim, cu un număr minim de detalii tehnice.

Mai întâi să observăm că Istoria matematicii ne arată că există două explicaţii majore pentru apariţia şi constituirea unor conjecturi remarcabile, care obstrucţionează găsirea soluţiei:

Explicaţia 1. Într-un cadru (context) matematic dat (sau subînţeles), conjectura constituie un enunţ independent.

[1)] Pentru completări se pot consulta: P. S. Alexandrov (Edit.), *Problema Gilberta*, Nauka, Moskva, 1969; I. Grattan-Guiness, *A Sideway look at Hilbert's twenty-three problems of 1900*, Notices of AMS, **47** (7), 2000, pp. 752-757 şi, mai recent, B. Yandell, *The Honour Class: Hilbert's Problems and their solves*, A. K. Peters Ltd., 2002.

[2)] Aşa sunt, de exemplu: J. van Mill and G. M. Reed, *Open problems in Topology*, North-Holland, 1990; H. T. Croft, K. J. Falkoner and R, K. Guy, *Unsolved problems in Geometry*, 2nd print., Springer, 1994; R. Guy, *Unsolved Problems in Number Theory*, 3rd edit. Springer, 2004; P. Odifreddi, *The Mathematical Century*: *The 30 Greatest Problems of the last 100 years*, Princenton Univ. Press, 2004.

Explicaţia II. Nu există (încă) tehnicile necesare sau/şi nu sunt stabilite unele rezultate intermediare, care să permită demonstraţia, într-un cadru matematic dat, a conjecturii considerate.

În condiţiile construcţiei formale (axiomatice) a teoriilor matematice moderne, subliniem importanţa determinării *precise* a *cadrului matematic* al problemei considerate, cum am mai menţionat, pentru că de acesta depind strategiile de abordare a ei.

Cele două explicaţii de mai sus comportă evidente aspecte fundaţionale. Explicaţia 1 ne aminteşte că, în unele cazuri, o problemă deschisă este suspectă de a fi un enunţ independent.

Strategia rezolvării unei conjecturi C în teoria T poate urma câteva căi posibile:

(1) Se demonstrează direct independenţa lui C în teoria T (deci, că din T nu rezultă (nu se deduce) C); există o metodă matematică pentru realizarea acestei demonstratii – construcţia de „contraexemple" (metateorema lui *A. Padoa*, v. A. C. Albu, *Fundamentele matematicii. O introducere*, Editura Gil, Zalău, 2004, p. 62).

(2) Dacă T este o teorie axiomatică completă (sau complet saturată, deci, ea are proprietatea că orice enunţ în termenii teoriei, deci şi C, este el, sau negaţia lui, teoremă), atunci explicaţia I cade şi deci trebuie încercate demonstraţiile $T \Rightarrow \mathit{non}\, C$ (semnul $\Rightarrow$ înseamnă „implică logic" sau „se deduce") sau $T \Rightarrow \mathit{non}\, C$ ($\mathit{non}\, C$ este negaţia conjecturii C); acesta este cazul unor teorii matematice ca aritmetica numerelor naturale, analiza reală, geometria euclidiană ş.a.

O variantă de abordare în acest caz este următoarea: ($2'$) se enunţă o nouă conjectură C' şi se demonstrează că i) $C' \Rightarrow C$ şi ii) $T \Rightarrow C'$.

Dacă conjectura C nu a fost decisă în nici una din situaţiile (1), (2) sau ($2'$) de mai sus, atunci următoarele rezultate parţiale pot fi încercate:

(3) se formulează o nouă conjectură C' şi *se demonstrează că* $C' \Rightarrow C$; ($3'$) „întărind" teoria T la T', se poate demonstra $T' \Rightarrow C$ sau ($3''$) „slăbind" conjectura C la C', se poate demonstra $T \Rightarrow C'$.

În cazul succesului în una din aceste situaţii (3) – ($3''$), nu se rezolvă de fapt conjectura C, ci se obţine un anumit rezultat parţial, fie reducând conjectura C la C', fie lucrând într-o teorie mai tare T', fie, în sfârşit, relaxând conjectura considerată C. În toate aceste demersuri, scopul final este demonstraţia lui $T \Rightarrow C$ sau $T \not\Rightarrow C$ (C este independentă în T). În strategia demonstraţiei $T \Rightarrow C$ mai menţionăm existenţa unui posibil „Principiu general de transfer", care transferă conjectura C din teoria T într-o conjectură C' dintr-o teorie T', pentru care au loc proprietăţile: i) dacă demonstrăm $T' \Rightarrow C'$, atunci rezultă $T \Rightarrow C$; ii) putem face demonstraţia lui $T' \Rightarrow C'$. După cum se vede, în acest caz succesul demonstraţiei conjecturii C în teoria T este asigurat de reuşita demonstraţiei conjecturii transferate C' în teoria T'.

Să dăm câteva exemple. Celebra problemă a Postulatului paralelelor al lui Euclid (veche din sec. IV î.e.n.) s-a dovedit o problemă de independenţă; soluţia ei decurge din consistenţa (necontradicţia) geometriei hiperbolice (*E. Beltrami* (1868), *H. Poincaré* (1882) ş.a.). Conjectura lui Fermat a fost rezolvată de *A. Wiles* (1995)[1)] în aritmetica numerelor naturale, urmând strategia ($2'$) de mai sus, utilizând tehnici de teoria analitică a numerelor. În Analiza Nestandard, o teorie matematică nouă construită în anii 1960 - 1970, se asigură o fundamentare riguroasă pentru utilizarea unui principiu special de transfer în rezolvarea unor probleme deschise.

[1)] Povestea conjecturii lui Fermat este interesant expusă în cartea lui S. Singh, *Marea Teoremă a lui Fermat*, Humanitas, 1998; o schiţă a demonstraţiei lui *A. Wiles* (n, 1953) şi împrejurările în care a fost obţinută pot fi găsite în A. C. Albu, *Marea conjectură a lui Fermat este o teoremă*, Gazeta Matematică, ser. ISPM, **XV** (2), 1977, pp. 73-80.

Cunoaşterea acestor strategii generale, evident că nu rezolvă efectiv o anumită problemă deschisă, ci oferă doar câteva indicaţii generale despre modul cum ea trebuie abordată. Rezolvarea unei probleme matematice, demonstraţia unei teoreme, rămâne, în ultima instanţă, o artă, *ars* în sensul clasic, de măiestrie, de invenţie personală. În legătură cu aceste consideraţii, ne amintim de legenda tânărului chinez de demult, care s-a instruit cu ardoare şapte ani în arta de a vâna dragoni, dar, după aceea n-a întâlnit şi deci, n-a vânat nici un dragon·, pentru a-şi dovedi astfel măiestria; atunci, completează *René Thom*[1)] legenda, ... tânărul chinez a început să-nveţe pe alţii arta de a vâna dragoni!

Lista lui Smale

„Problemele lui Hilbert“, prezentate comunităţii matematice în anul 1900, au jucat un rol deosebit de important în dezvoltarea matematicii în secolul XX.[2)] Iniţiative asemănătoare au avut loc în jurul anului 2000 vizând catalogarea şi impulsionarea rezolvării, în decursul secolului nostru, a unor probleme deschise remarcabile rămase restante. Un astfel de exemplu important este următorul: la începutul anilor '90 din secolul trecut, renumitul matematician rus *V. I. Arnold* (n. 1937) a invitat, din partea Uniunii Matematice Internaţionale (IMU), un număr de matematicieni de primul rang să formuleze „marile probleme matematice“ nerezolvate ale secolului al XXI - lea. „Problemele lui Smale“ constituie răspunsul celebrului matematician american *Stephan Smale* (n. 1930, Premiul Fields, 1966) la sugestia lui *Arnold*. Ele au fost prezentate într-o conferinţă ţinută cu ocazia aniversării a 60 de ani a lui *V. I. Arnold*, la Fields Institute din Toronto, în iunie 1997.

„Lista lui Smale“ conţine 18 probleme,[3)] enunţate fie sub formă de conjecturi, de probleme sau întrebări, pe care autorul lor mărturiseşte că le-a ales după următoarele criterii: i) să fie propoziţii cu un enunţ cât mai simplu şi precis; ii) să fie probleme dificile, apărute în cadrul cercetărilor proprii (aceasta este o limitare importantă!); iii) probleme alese cu speranţa că abordarea lor, eventuale rezultate parţiale sau rezolvarea lor, vor avea o importanţă deosebită pentru dezvoltarea matematicii în secolul nostru.

Dacă unele din problemele lui *Smale* sunt relativ simplu de enunţat, în general ele nu sunt deloc simplu de înţeles. De aceea, dintre ele nu vom menţiona aici decât primele două. Prima problemă este o mai veche cunoştinţă a noastră, şi anume Ipoteza lui Riemann; după cum am văzut, ea este singura problemă nerezolvată de pe lista lui *Hilbert*. *Smale* o trece acum pe lista lui. *K. Devlin*, în cunoscuta sa carte *Vârsta de aur a matematicii* (Theta, 2000), o numeşte „cea mai importantă problemă nerezolvată din matematică“ (desigur, contemporană), afirmaţie cu care nu toţi matematicienii sunt de acord. Problema nr. 2, tot aşa de celebră şi dificilă, este Conjectura lui Poincaré în dimensiunea 3 (1904): aceasta se referă la caracterizarea topologică a sferei cu 3 dimensiuni din spaţiul euclidian cu 4 dimensiuni. Mai multe rezultate parţiale au fost obţinute în secolul trecut; o generalizare în dimensiuni $n \geq 5$ a fost stabilită chiar de *Smale* (1961), iar în 1983, *M. Friedman* (Premiul Fields, 1986) a dat demonstraţia pentru $n = 4$. Restul problemelor lui *Smale* pot fi grupate pe şapte domenii de interese.

În ideea unei comparaţii *Hilbert-Smale* la o primă examinare se poate constata că lista lui *Smale* are o arie de cuprindere mai restrânsă decât aceea a lui *Hilbert*. Probabil că, având în vedere dezvoltarea spectaculoasă a matematicii în secolul trecut, la sfârşitul

---

[1)] *R. Thom* (n. 1923), matematician francez, laureat al Premiului Fields (1958), creatorul Teoriei Catastrofelor (anii 1960).

[2)] Pentru un *survey* al evoluţiei matematicii în secolul XX, v. lucrarea autorului *Matematica XX. O încercare de retrospectivă*, în Aspecte ale Istoriei şi Filosofiei Ştiinţei, Coord. C. Grecu, Ed. Univ. de Vest din Timişoara, 2001, pp. 119-152.

[3)] Pentru amănunte şi lista problemelor, v. S. Smale, *Mathematical Problems for the next Century*, Math. Intellig., **20** (2), 1998, pp. 848-859.

lui nu mai era posibilă existenţa unui „Hilbert" universal de la 1900. Pot fi semnalate omisiuni importante de pe lista lui *Smale*, dar să nu uităm că el a prevenit asupra limitării problemelor la domeniile lui de interes. În ce priveşte dificultatea problemelor alese de *Smale* şi a importanţei lor pentru matematica secolului nostru, acestea le va arăta viitorul.

Problemele Mileniului

Există şi alte încercări ale unor matematicieni de prim rang, societăţi sau fundaţii matematice, care, ca şi cele de mai sus, monitorizează marile probleme deschise ale începutului de veac XXI. În cazul unor societăţi sau fundaţii mai ales, acestea stimulează, de obicei, rezolvarea unor probleme prin acordarea de premii substanţiale. Procedeul nu este nou, este suficient să ne amintim de celebrele premii ale Academiei de Ştiinţe din Paris, din sec. XVIII, ale căror recipienţi au fost mari matematicieni ai timpului (*Johann Bernoulli*, *Daniel Bernoulli*, *L. Euler*, *J. L. Lagrange* ş.a.), sau Premiul de 100.000 DM, instituit de *P. Wolfskehl* în 1908 pentru rezolvarea Conjecturii lui Fermat (premiul, în valoare de 75.000 DM, a fost înmânat lui *A. Wiles* la Academia de Ştiinţe din Göttingen, în iunie 1997).

Diverse societăţi matematice, academii, universităţi etc., naţionale şi internaţionale, acordă în prezent o mulţime de premii pentru activitatea matematică deosebită, publicarea unor lucrări sau cărţi de specialitate excepţionale, premii care fac renumele celor care le primesc. Începând din 1936, IMU acordă, din 4 în 4 ani (cu o întrerupere până în 1950, din cauza celui de-al doilea război mondial), cu ocazia Congreselor Internaţionale ale Matematicienilor, prestigioasele *Premii Fields* pentru rezultate matematice remarcabile, un fel de corespondent – în Matematică – al celebrelor Premii Nobel. Dar premiile instituite în anul 2000 de Clay Mathematical Institute, pentru 7 probleme matematice speciale numite „Problemele Mileniului", sunt diferite de toate premiile menţionate mai sus. Pe scurt, iată povestea lor.

Încă din 1992, IMU a hotărât să declare anul 2000 ca „Anul Matematic Mondial" (World Mathematical Year, WMY), având în vedere impactul considerabil al matematicii în lumea contemporană. În cadrul WMY, continuând practicile în acordarea unor premii în bani pentru stimularea rezolvării unor probleme matematice, la 24 mai 2000, la College de France de la Paris, au fost lansate şapte premii de câte 1 milion USD, fiecare, pe timp nelimitat, pentru rezolvarea unei probleme dintr-un set de 7 probleme de matematică, considerate ca cele mai dificile şi mai importante probleme ale momentului (probleme de „rang zero"). Problemele au fost prezentate de renumiţii matematicieni Sir *M. Atiyah* (Marea Britanie) şi *J. Tate* (SUA). Ele n-au fost numite „Problemele secolului XXI", ci mai pretenţios (urmărind, probabil, şi efectul mediatic) – „Problemele Mileniului".

Cele 7 premii pentru „Problemele Mileniului" sunt oferite de Clay Mathematical Institute, fondat în 1999 de omul de afaceri american *Landon T. Clay*, ca o organizaţie nonprofit cu sediul la Cambridge (Mass., USA). Problemele premiate au fost selectate de un grup de matematicieni de renume format de *A. Jaffe* (directorul lui Clay Math. Instit.), *M. Atiyah*, *J. Tate*, *A. Wiles*, *A. Connes* şi *Ed. Witten* (*Atiyah*, *Connes* şi *Witten* sunt laureaţi ai Premiului Fields).

Împreună cu cele 7 premii de 1 milion de dolari, a mai fost de asemenea, instituit un premiu tot de 1 milion USD, oferit, însă doar până în martie 2002, pentru rezolvarea vechii conjecturi a lui Goldbach (1742). Premiul nu a fost adjudecat.[1)]

[1)] *Donald E. Knuth*, specialist în ştiinţa computerelor şi părintele TEX, într-o conferinţă ţinută în octombrie 2001 la Technische Universität München, îşi exprimă, în mod curios, părerea că conjectura lui Goldbach nu poate fi demonstrată (deci, că este independentă!?), motivul, după el, ar fi că proprietatea de a fi număr prim este multiplicativă, în timp ce conjectura se referă la o proprietate de aditivitate a numerelor (cf. Notices of AMS, **49** (3), 2002, p. 321).

Toate aceste premii au fost pe larg mediatizate în lumea matematică;[1] încercăm, acum, să le facem cunoscute şi la noi. Tinerii matematicieni români, talentaţi, pot să realizeze că au o şansă de a câştiga un milion de dolari nu numai jucând la Loto sau marcând goluri, ci angajându-se în competiţia, este adevărat extrem de dură, a rezolvării uneia din „Problemele Mileniului“. (Să remarcăm, în acest context, că niciun român nu a primit, până în prezent, Premiul Fields sau Premiul Nobel (activând în ţară); este, deci, justificată întrebarea, ce se întâmplă cu medaliaţii noştri cu aur la Olimpiadele Internaţionale de Matematică, Informatică, Fizică, *după* obţinerea acestor premii?). Viitorul va arăta dacă premii de mărimea celor menţionate, neobişnuite până acum în domeniul cercetării matematice (în unele sporturi de performanţă se vehiculează sume de zece ori mai mari), vor contribui efectiv la creşterea interesului pentru matematica de vârf şi la stimularea dezvoltării, pe mai departe, a ei. Pentru că trebuie înţeles că rezolvarea unor astfel de probleme de mare dificultate nu este doar un capriciu al matematicienilor (deşi are loc şi un „efect Everest“: ele trebuie rezolvate „pentru că există“!) sau al unor fundaţii bogate.

Nu este în intenţia noastră să prezentăm aici, în detaliu, „Problemele Mileniului“; ar fi necesară o carte.[2] Deşi enunţurile celor 7 probleme sunt foarte specializate, pentru cei care vor să-şi facă o idee, le prezentăm pe scurt în **Anexă**. Pentru matematicienii profesionişti este inutil să precizăm, cum o face *K. Devlin* încă în Introducere la cartea sa de „popularizare“ a faimoaselor probleme, *Devlin* (2002) (de altfel foarte interesantă, una din sursele noastre bibliografice principale), că „Problemele mileniului sunt ca Super Bowl; ele nu sunt o întrecere pentru amatori“. (p. viii); noi am spune, în Europa, că ele sunt ca finala Cupei Campionilor la fotbal. Cu alte cuvinte, că rezolvarea unei astfel de probleme este o performanţă matematică cu totul excepţională. Doar pentru înţelegerea acestor probleme este nevoie de o pregătire matematică specială, de profesionist expert şi, în nici un caz de amator, ceea ce, de altfel, era valabil şi în cazul multor probleme deschise prezentate mai înainte. Prin urmare, ne mulţumim să menţionăm doar două aspecte: 1) din cele 7 Probleme ale Mileniului, două sunt cunoştinţe ale noastre de pe liste mai vechi: problema nr. 1 este Ipoteza lui Riemann, iar nr. 5 este Conjectura lui Poincaré; 2) patru probleme ale Mileniului, dintre care două sunt cele menţionate anterior, figurează şi pe lista propusă de *Smale* (problemele nr. 1,2,4, 5, v. **Anexa**).

Pentru cele două probleme de la pct. 1) câteva completări putem face, totuşi. Pentru Ipoteza lui Riemann, *the state of art* poate fi găsită în cartea lui K. Sabbagh, *The Riemannian Hypothesis: The Greatest Unsolved Problem in Mathematics* (Farrar Straus & Giroux, 2003).[3] În ce priveşte Conjectura lui Poincaré, în ultimii 2 - 3 ani s-au făcut progrese însemnate. În baza Conjecturii Geometrizate (*Geometrization Conjecture*) a lui Thurston, pusă la punct de *W. Thurston* în anii 1980, *din care se deduce Conjectura lui Poincaré*, şi, utilizând rezultatele lui R. Hamilton din anii 1993 - 1999, *G. Perelman* (născut în 1966, în fosta URSS), într-o serie de trei preprinturi din 2002 - 2003, pretinde că a demonstrat

[1]V. de exemplu A. Jackson, *Million - dollar Mathematics Prizes Announced*, Notices of AMS, **47** (8), 2000, pp. 877 - 879; ac. aut., *Mathematical Challenges of the 21 st Century. A Panorama of Mathematics*, Notices of AMS, **47** (10), 2000, pp. 1271-1273; mai completă este cartea lui K. Devlin, *The Millenium Problems*, Basic Books, New York, 2002, citată în continuare *Devlin* (2002).

[2] Cei interesaţi pot găsi enunţurile celor 7 probleme, împreună cu explicaţii asupra lor, în cărţile *Devlin* (2002) şi *Carlson*, *Jaffe*, *Wiles*, Edits., cit. în Nota de subsol 2), pag. 10. Pentru detalii asupra premiilor oferite de Clay Math. Instit. se poate consulta adresa de Internet www.claymath.org/millenium/.

[3] Se poate vizita E. Bombieri (2001), Problems of the Millenium: *The Riemann Hypothesis*, www.c1aymath.org/prizeproblems/riemann; J. B. Conrey, *The Riemann Hypothesis*, Notices of AMS, **50** (3), 2003, 341 - 353.

Conjectura Geometrizată a lui Thurston şi, prin urmare, Conjectura lui Poincaré. Specialiştii în domeniu nu s-au pronunţat asupra corectitudinii demonstraţiei lui *Perelman*, există chiar importante reţineri. Istoria (şi suspansul) pare să semene cu aceea din cazul demonstraţiei lui *Wiles* a Conjecturii lui Fermat, în care s-a urmat strategia din $(2')$, menţionată în secţiunea a 2-a a articolului nostru. Pentru cei interesaţi în această problematică, menţionăm lucrarea *survey* recentă a lui *J. Milnor* din *Notices of. AMS*, **50**, 2003, pp. 1226-1233 şi lucrarea de ultimă oră a lui *J. W. Morgan*, „Recent progress on the Poincaré Conjecture and the classification of 3 - manifolds“, în Bull. of AMS, **42** (1), 2005, pp. 57 - 78. [1)].

Provocarea lansată elitei matematicienilor din întreaga lume, prin cele 7 probleme „ale Mileniului“ şi premiile instituite pentru rezolvarea lor, sunt fără precedent în Istoria matematicii. Se apreciază că ele sunt cele mai dificile probleme matematice deschise ale momentului. Controversele n-au întârziat să apară: premiile sunt indecente, ridică probleme complicate de prioritate, mai există (încă) sindromul savantului pasionat şi dezinteresat, este puţin probabil ca aceste premii să conducă la rezolvarea Problemelor Mileniului etc., etc. Se speră, însă, că rezolvarea Problemelor Mileniului va duce la o mai buna înţelegere a unor teorii matematice, la stabilirea unor noi conexiuni între acestea, care vor permite rezolvarea altor probleme, în ultimă instanţă va fi stimulată – pe mai departe – cercetarea matematică şi dezvoltarea matematicii. În ce fel aceste aşteptări, ca şi temerile, se vor adeveri, va arăta viitorul; probabil ca un prim bilanţ edificator al stadiului Problemelor Mileniului se va putea face la sfarşitul acestui secol.

Anexă: Lista Problemelor Mileniului

Problema nr. 1: *Ipoteza lui Riemann* (1859); ea afirmă că zerourile funcţiei zeta a lui Riemann au partea reală egală cu $\frac{1}{2}$ (adică, dacă $\zeta(a+ib)=0$, atunci $a=\frac{1}{2}$).

[1)]În 2007 putem consemna următorul epilog al „afacerii Perelman“. În cele din urmă, demonstraţia lui Hamilton - Perelman (2002 - 3) a Conjecturii lui Poincaré a fost validată de specialişti şi lui *G. Perelman* i-a fost acordat Premiul Fields la IMU 2006 de la Madrid (un *survey* al lucrărilor lui Perelman, pentru care a fost premiat, este articolul lui *John W. Morgan*, care conţine şi o bogată bibliografie, *The work of Grigory Perelman*, în Notices of AMS, **53** (3), 2007, 393-399, 24 ref.). Un articol al matematicienilor chinezi *Cao* şi *Zhu*, de 324 pag. (!!), apărut în 2006 în Assian Journal of Maths. (v. mai jos), în loc să lămurească lucrurile, a stârnit mai multe discuţii datorită titlului său: „O demonstraţie *completă* [sublin. n.] a conjecturilor lui Poincaré şi geometrizată … “. În loc să constituie o *explicitare* a lucrărilor lui Perelman, articolul – de dimensiunile unei cărţi – a lui *Cao* şi *Zhu* a fost considerat de unii o completare a *gap*-urilor din demonstraţia lui *Perelman*.

Şi acum vine lovitura de teatru: din motive necunoscute, *Gr. Perelman* a refuzat în 2006 Premiul Fields, stârnind o mare vâlvă în jurul lui, a Conjecturii lui Poincaré, al Premiului Fields şi a matematicii de vârf, în general. Pentru Premiul Fields este o premieră. În ce priveşte premiul de 1 milion USD, fundaţia are un regulament foarte strict, care cere un interval de timp după care se înmânează premiul. Oare şi acesta va fi refuzat?

Pentru informaţii suplimentare despre Problemele Mileniului şi „afacerea Perelman“, mai pot fi consultate: Huai-Dong Cao and Xi-Ping Zhu, *A complete proof of the Poincaré and Geometrization conjectures – Application of the Hamilton-Perelman theory of the Ricci flow*, Asian J. of Maths., 2006, 169-492; J. Carlson, A. Jaffe, A. Wiles, Edits., *The Millenium Prize Problems*, AMS & Clay Math. Instit., 2006; A. M. Jaffe, *The Millenium Grand Challenge in Mathematics*, Notices of AMS, **53** (6), 2006, 652-660.

Problema nr. 2: Determinarea soluţiilor generale ale ecuaţiilor Navier-Stokes din teoria fluidelor şi gazelor.

Problema nr. 3: În Fizica cuantică, rezolvarea ecuaţiilor Yang-Mills (1954) şi aşa-numita „Mass Gap Hypothesis".

Problema nr. 4: Este singura problemă referitoare la efectivitatea computerelor: ea se referă la faptul dacă un anumit tip de probleme (notate cu NP) sunt efectiv calculabile (notate cu P) sau nu; problema cere să se stabilească dacă $P = NP$ sau $P \neq NP$.

Problema nr. 5: *Conjectura lui Poincaré* (c. 1904): Orice varietate 3-dimensională, compactă, închisă, simplu conexă, este homeomorfă cu sfera cu 3 dimensiuni din spaţiul euclidian cu 4 dimensiuni.

Problema nr. 6: *Conjectura lui Birch şi Swinnerton - Dyer*, înrudită cu Ipoteza lui Riemann.

Problema nr. 7: *Conjectura Hodge* (prima jumătate a sec. XX) se referă la o proprietate a ciclurilor Hodge ale varietăţilor algebrice proiective.

Acei tineri care au schimbat cursul matematicii

MIRELA ŞTEFĂNESCU[1)]

Tinerii la care face referire titlul sunt norvegianul *Niels Hendric Abel* (1802-1829) şi francezul *Evariste Galois* (1811-1832). Deşi au trăit atat de puţin, cei doi au revoluţionat matematica secolului al XIX-lea, secol deschis sub frumoase auspicii pentru această ştiinţă. Căci în 1801, *Carl Friedrich Gauss*, cel care avea să fie numit *„princeps mathematicorum"*, a publicat *Disquisitiones arithmeticae*; era, la acea dată, şi el foarte tânăr. La 24 de ani, *Gauss* era deja cunoscut pentru inventarea metodei celor mai mici pătrate, demonstrarea posibilităţii de a construi poligonul regulat cu 17 laturi numai cu rigla şi compasul şi era considerat un geniu în matematică, iar până în 1807, când implinise 30 de ani, publicase multe dintre articolele sale cele mai bune.

Abel s-a născut în familia unui păstor de ţară; abia la vârsta de cincisprezece ani talentul său matematic a înflorit, sub îndrumarea unui profesor bun (*Berndt Michael Holmboe*), care l-a îndemnat să citească operele maeştrilor (*Newton*, *Euler*, *Lagrange*) şi nu pe acelea ale elevilor lor. *Abel* a citit, de asemenea, cartea lui *Gauss*. El a observat existenţa unor lacune în demonstraţiile citite. Spre exemplu, *Abel* demonstrează riguros formula binomului lui *Newton*, pe care *Euler* şi *Newton* o demonstraseră pentru cazuri particulare. Educat în universităţile din Christiania şi Copenhaga, în 1825, *Abel* a plecat cu o bursă, pentru doi ani, spre Germania şi Franţa, pentru a cunoaşte pe marii matematicieni ai vremii. La Berlin, s-a prezentat lui *August Leopold Crelle* (1780-1855), cel ce conducea unul dintre jurnalele matematice de vârf ale vremii (jurnal numit mai târziu *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, şi supranumit *Jurnalul lui Crelle*). Întâlnirea celor doi este imaginată cu talent de *E. T. Bell* în cartea sa [1]. *Crelle*, care nu făcea matematica de vârf, dar o recunoştea imediat şi cu generozitate când era făcută de alţii, a fost profund impresionat de geniul matematic al frumosului norvegian şi l-a prezentat peste tot, rămânând prieten şi sprijin pentru *Abel* până la timpuria moarte a acestuia.

Abel scrie un memoriu asupra imposibilităţii rezolvării prin radicali a ecuaţiei generale de grad superior lui 4. Demonstraţia sa este la început complicată şi redundantă, iar articolul conţine o eroare în clasificarea funcţiilor, dar aceasta nu aduce prejudicii argumentării. Chestiunea nu era simplă! De altfel, abia în 1879, *Leopold Kronecker* produce o demonstraţie riguroasă pe baza ideilor lui *Abel*, într-un articol de 24 de pagini publicat

[1)] Universitatea Ovidius din Constanţa

în Monatsberichte der Berliner Akademie. Demonstraţia lui *Kronecker* este explicată de *James Pierpoint* într-un articol (*On the Ruffini-Abel Theorem*) publicat în American Math. Soc. Bull. în 1895-1896.

Abel considera ecuaţii speciale ce intervin în diviziunea cercului şi a lemniscatei; în jurnalul lui *Crelle*, el publica câteva articole ce rezumă sau completează unele rezultate ale sale privind ecuaţiile rezolvabile prin radicali şi, între acestea., *Abel* introduce ecuaţiile (mai târziu numite dupa el) abeliene, adică acele ecuaţii ale căror rădăcini sunt funcţii raţionale de una dintre ele. Introduce două noţiuni, nu prin nume, ci prin proprietăţi: noţiunea de câmp de numere (colecţie de numere care, împreună cu două numere, conţine sumă, diferenţă, produsul şi, dacă al doilea număr este nenul, câtul lor) şi noţiunea de polinom ireductibil peste un câmp numeric dat. Rezultatele sale asupra caracterizării ecuaţiilor algebrice rezolvabile prin radicali le comunica lui *Crelle* şi *Legendre* prin scrisori scrise chiar înaintea morţii sale. Memoriul lăsat de *Abel* la Academia franceză în 10 octombrie 1826 asupra unei proprietăţi generale a unei clase foarte largi de funcţii transcendente nimereşte la un *Cauchy* „preocupat de rezultatele sale" (scrie *E.T. Bell*), care îi pierde manuscrisul, şi un *Legendre* de 72 de ani, care abia doi ani mai târziu află despre rezultatele uimitoare ale genialului norvegian dintr-o corespondenţă cu *Carl Gustav Jacob Jacobi* (1804-1851). Acesta, el însuşi cu mari contribuţii la studiul funcţiilor eliptice, vorbeşte cu entuziasm despre descoperirile lui *Abel* ca despre, „*poate, cea mai importantă descoperire matematică din secolul nostru*". Iar Legendre exclama: „*Ce cap are acest norvegian!*" Publicarea memoriului lui *Abel* abia în 1841, la mulţi ani după trecerea sa în nefiinţă, a permis schimbarea unor priorităţi în domeniul integralelor şi funcţiilor eliptice, dar nu îl împiedică pe *Charles Hermite să* precizeze că *Abel* lansează idei de cercetare ce vor da de lucru matematicienilor încă o sută cincizeci de ani. Este uimitor că *Abel* a avut ideea-cheie de a considera funcţii inverse ale integralelor eliptice încă în 1823, adică la 21 de ani. Altă mare descoperire a lui *Abel* este că funcţiile eliptice sunt dublu periodice; în consideraţiile sale, care pleacă de la *Gauss*, *Euler*, *Lagrange*, *Legendre*, *Abel* introduce funcţiile complexe învăţate de la *Cauchy*.

Mulţi ani după moartea lui *Abel*, suedezul *G. Mittag-Leffler* spunea despre lucrările acestuia: „*Cele mai bune lucrări ale lui Abel sunt adevarate poeme lirice, de o sublima frumuseţe ridicate mult deasupra platitudinii vieţii şi provenind mai direct din esenţa sufletului decât creaţiile unui poet obişnuit.*"

Nu ne miră faptul că, la două sute de ani de la naşterea lui *Abel*, în 2002, Academia de Ştiinţe a Norvegiei a introdus pentru matematică unul dintre cele mai mari premii actuale, numit premiul Abel. Laureaţii acestui premiu au fost: *Jean-Pierre Serre* (2003), Sir *Michael F. Atiyah* şi *Isadore M. Singer* (2004), *Peter D. Lax* (2005), *Lennart Carleson* (2006), *S.R. Srinavasa Varadhan* (2007), *John G. Thompson* şi *Jacques Tits* (2008). Redăm numai motivaţia pentru ultimii laureaţi: „*pentru realizările lor profunde în algebră şi în particular pentru configurarea de către aceştia a teoriei moderne a grupurilor*".

Galois s-a născut langă Paris, la data de 25 octombrie 1811. De timpuriu a fost evident talentul său remarcabil pentru matematică. Pentru a învăţa matematica, s-a adresat carţilor maeştrilor, pe care le-a înţeles mai bine ca majoritatea contemporanilor săi. Nu reuşeşte să intre, cum dorea, la École Polytechnique, dar, student la École Preparatoire (viitoarea École Normale Superieure), scrie încă în timpul primului an câteva articole. În 1829 trimite două articole asupra ecuaţiilor algebrice la Academia franceză; *Cauchy* este iar cel ce pierde manuscrisele. În ianuarie 1830, trimite alt articol, care se pierde la moartea lui *Fourier*. *Poisson* îi cere să rescrie articolul în 1831, ceea ce *Galois* face. Dar un ghinion permanent îl urmăreşte: Articolul asupra rezolvării ecuaţiilor prin radicali îi este returnat pentru a-l scrie mai explicit şi mai riguros. Viaţa aventuroasă a tânărului de geniu (aflat printre revoluţionarii din 1830, este condamnat şi chiar închis vreme de câteva luni la Sainte Pelagie, o închisoare mizeră din Paris, iar dupăeliberare, se duelează cu un camarad şi moare, în urma rănii primite, la 31 mai 1832) se sfârseşte fără ca *Galois* să fi cunoscut recunoaşterea ştiinţifică pe care o merita. În preziua morţii, îi scrie unui prieten pe care il lasasa se bată pentru recunoaşterea sa ştiinţifică o scrisoare despre care *Hermann Weyl* spune: *„Această scrisoare, dacă este judecată prin noutatea şi profunzimea ideilor pe care le conţine, este poate cea mai substanţială scriere din întreaga literatură umană“.*

Abia în 1843, *J. Liouville* găseşte manuscrisul lui *Galois*, şi, după eforturi de câteva luni pentru a-l citi şi înţelege, îl prezintă în septembrie Academiei franceze, lăudând corectitudinea metodei şi frumuseţea rezultatelor. În 1846, *Liouville* publică memoriul lui *Galois* în Journal de Mathématiques. Douăzeci de ani mai târziu, *Serret* expune teoria lui *Galois* în a treia ediţie a cursului său de algebră superioară. Dar prima expunere clară a acestei teorii o face *Camille Jordan*, în cartea sa asupra substituţiilor şi ecuaţiilor algebrice din 1870. La sfârşitul secolului al XIX-lea, cărţile de algebră superioară, – de exemplu, amplul tratat al lui *Heinrich Weber* *„Lehrbuch der Algebra“* din 1894-95, – conţineau teoria lui *Galois*. Dar tratarea acestui capitol de algebră aşa cum se învăţa astăzi îi aparţine lui *E. Artin* (1898-1962), care scria: *„Încă din tinereţea mea, m-am aflat sub vraja teoriei clasice a lui Galois. Vraja acesteia m-a silit să revin la ea iarăşi şi iarăşi, de nenumărate ori”.*

Pentru a demonstra teorema sa de caracterizare a ecuaţiilor rezolvabile prin radicali, *Galois* recurge la conceptele de câmp şi de grup de substituţii, deşi pe primul nu îl numeşte iar pe al doilea nu îl defineşte în general. În mod magistral, el observă o posibilitate de a asocia unei ecuaţii algebrice un grup G format din substituţiile/permutările rădăcinilor sale , care lasă invariante orice relaţii între coeficienţii ecuaţiei. Alegând un subgrup maximal H al acestui grup, subgrup care este uneori normal (invariant, autoconjugat), se considera funcţiile raţionale de rădăcini care sunt invariate de elementele acestuia şi se construieşte o ecuaţie rezolventă care are rădăcini în acest subcâmp. Dacă rezolventa este o ecuaţie binomială de grad număr prim p, atunci H este subgrup normal de ordin p şi reciproc. Dacă se continuă procedeul cu H ca nou grup şi cu ecuaţia sa, iar toate subgrupurile ce se obţin sunt normale (deci rezolventele corespunzătoare sunt binomiale) de indici primi, atunci ecuaţia originală este rezolvabilă prin radicali. *Galois* arata că nu se întâmplă aşa pentru ecuaţia generală de grad superior lui 4, care are drept G grupul simetric de ordin n, care are un singur subgrup propriu normal, cel altern, de indice 2 şi de ordin neprim. Pentru gradele 2, 3, 4, ecuaţiile sunt rezolvabile prin radicali. *Galois* demonstrează şi câteva teoreme particulare, între care aceea referitoare la rezolvabilitatea prin radicali a unei ecuaţii algebrice ireductibile de grad prim ale cărei rădăcini sunt funcţii raţionale de două dintre ele este remarcată cu admiraţie şi de *Liouville*. Mai târziu, *Hermite* şi *Kronecker* (în 1858 şi 1861) rezolvă ecuaţiile de grad 5 prin funcţii modulare eliptice (analog cu rezolvarea ecoaţiilor de grad 3 cu ajutorul funcţiilor trigonometrice). Un pas înainte este aplicarea teoriei la geometrie, la construcţiile cu rigla şi compasul. Secolul al XIX-lea este cel al rezolvării (negative) complete şi riguroase a problemelor lăsate posterităţii de greci (dublarea cubului, trisecţia unghiului, cuadrarea cercului). În 1858, *Arthur Cayley* defineşte grupul abstract, dar receptarea noţiunii se face mai târziu, odată cu cartea lui *C. Jordan* asupra grupurilor de permutări (1870).

Teoria lui *Galois*, care permite studiul unor obiecte matematice (ecuaţii, extinderi de corpuri commutative) cu ajutorul altor obiecte matematice (grupuri), a dus la teoria reprezentării grupurilor. Studiul ecuaţiilor algebrice a impulsionat teoria numerelor şi a condus la identificarea noţiunii de ideal. De aici se dezvoltă teoria inelelor şi, în fond, toata algebra abstractă.

Cei doi matematicieni, contemporani dar fără să se întâlnească, s-au întâlnit în spirit, spre binele algebrei şi matematicii.

BIBLIOGRAFIE

[1] E.T. Bell, *Les grands mathematiciens,* Payot, Paris, 1939.
[2] M. Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University press, New York, 1972.

Henri Cartan
(1904-2008)

ANDREI VERNESCU[1)]

La 13 august 2008 comunitatea matematică franceză, precum şi cea internaţionala au resimţit o mare pierdere: s-a stins din viaţă unul din cei mai mari matematicieni ai scolului 20, *Henri Cartan*, un adevarat „mit", prin creaţia sa absolut remarcabilă, precum şi prin longevitatea sa.

Născut la 8 iulie 1904 la Nancy, ca fiu al nu mai puţin celebrului geometru *Elie Cartan* si al *Mariei-Louise Cartan* (n. *Bianconi*), *Henri* avea să beneficieze de atmosfera de aleasă cultură din casa parintească. (Pentru o foarte bună documentare în privinţa lui *Elie Cartan*, a se vedea cartea „*Hommage à Elie Cartan*", Editura Academiei R.S.R, Bucuresti, 1975, tipărită cu prilejul unei reuniuni a Academiei, special dedicate personalităţii sale). Deşi atras de matematică încă de foarte tânăr, totuşi, după cum avea să declare într-un interviu, *Henri Cartan* nu a fost influenţat de tatăl său. În 1909, în urma numirii tatălui ca profesor la Sorbona, familia se mută la Paris. Deci, practic, *Henri Cartan* se va afla, în toată copilaria şi tinereţea sa, în „oraşul luminilor", formidabila cetate de cultură, artă şi avangardă, ce atrăgea şi continuă să atragă atâţi oameni care, fiecare în domeniul său, are ceva de creat, de adus nou. *Henri Cartan* îşi face studiile liceale la liceul Hoche din Versailles, vestitul şi foarte cochetul orăşel aflat la distanţă de numai aproximativ 15 km de Paris, oraşul natal al altui mare matematician, deja de mult afirmat în epocă, *Jacques Hadamard* (1865-1963). În 1923 *Henri Cartan* intră la vestita École Normale Superieure din rue d'Ulm, unde va cunoaşte atmosfera de puternică emulaţie, invitaţie la întrecere şi autodepăşire, atmosfera de mare ţinută intelectuală şi exigenţă, specifică acestei celebre instituţii, care a inspirat mult respect, dar poate şi multă teamă unora... Îşi susţine doctoratul în 1928 cu o teză de analiză complexă, sub conducerea lui *Paul Montel* (1876-1975), acelaşi care, tot în acei ani, avea să conducă şi tezele unor străluciţi studenţi români aflaţi la studii doctorale în capitala Franţei: *Alexandru Ghika*, *Miron Nicolescu*, *Nicolae Ciorănescu*, *Tiberiu Popoviciu*, toţi deveniţi mari matematicieni.

După o trecere de un an, 1928-1929 la liceul Malherbe din Caen, *Henri Cartan* va preda la universităţile din Lille şi Strasbourg, fiind invitat şi la universitatea din *Münster*. Parcurge rapid toate treptele didactice din învăţământul superior, devenind profesor în 1940.

În 1935 fondează grupul Bourbaki, împreună cu *Szolem Mandelbrojt* (unchiul lui *Benoit Mandelbrojt*, creatorul teoriei fractalilor), *Jean Dieudonné*, *Claude Chevalley* şi *André Weil*; ulterior grupului aveau să se alăture şi alţi matematicieni valoroşi.

Deşi profund traumatizat de moartea unui frate care intrase în mişcarea de rezistenţă şi fusese prins şi executat de nazişti, *Henri Cartan* înţelesese că oamenii de bună credinţă germani, printre care şi matematicienii de bună credinţă, nu aveau nimic de a face cu ororile totalitarismului hitlerist; cunoscuse câţiva matematicieni germani înainte de război şi sentimente de consideraţie reciprocă îi animau. După război, prin strădaniile lui *De Gaulle* şi *Adenauer* se reuşise foarte importanta reconciliere istorică franco-germană, pilonul

1) Universitatea Valahia din Târgovişte

fundamental al construirii Uniunii Europeene. În domeniul mai restrâns al formării şi strângerii legăturilor socio-profesionale de după război dintre specialiştii francezi şi cei germani se simţea, de asemenea, nevoia unor acţiuni hotărâte; *Cartan* avea să contribuie la stabilirea acelor legături între matematicienii francezi şi cei germani.

A predat la École Normale Superieure, din nou la Strasbourg şi, între 1948 si 1964, a condus vestitele seminarii care îi poartă numele. Din 1969 a predat la Facultatea de Ştiinte din Universitatea Orsay (Universitatea Paris XI). În perioada 1967-1970 a fost preşedintele Uniunii Matematice Internaţionale. A fost membru al Academiei de Ştiinţe a Franţei şi al altor Academii; a avut numeroase distincţii; formal s-a retras în 1975, când s-a pensionat. Desigur, continua să exercite aceeaşi mare influenţă dintotdeauna în mediile matematice.

Fără a încerca aici să analizăm câtuşi de puţin opera lui Henri Cartan, vom menţiona realizările sale în numai câteva domenii, realizări care l-au făcut celebru: el este iniţiatorul teoriei filtrelor din topologia generală, care permit o vedere de ansamblu a problemelor de convergenţă, în această disciplină; are remarcabile realizări în algebra omologică (împreuna cu *S. Eilenberg*), a deschis drumuri noi în teoria funcţiilor de mai multe variabile complexe, în care a stabilit celebrele teoreme A şi B, care îi poartă numele, are contribuţii însemnate în teoria fasciculelor şi teoria spaţiilor analitice, în topologie algebrică şi în teoria potenţialului.

A scris şi câteva cărţi importante, care vor dăinui în timp: Algebra omologică (în colaborare cu S.Eilenberg) [1], un celebru curs de analiză complexă [2] şi un nu mai puţin celebru curs de calcul diferenţial [3]. Cartea [2] reprezintă, poate, alături de binecunoscuta carte a lui *L. V. Ahlfors*, „Complex Analysis“ (McGraw-Hill Book Company, New York, 1966), una din cele mai bune şi mai cunoscute prezentări ale analizei complexe. Toate acestea, fără să luăm în consideraţie contribuţia sa substanţială la monumentalul tratat semnat *Bourbaki*; dar acolo, întrucât este o opera colectivă şi, întrucâtva anonimă, deşi se ştie, în linii mari cam care erau membrii acestei societăţi ştiinţifice pseudosecrete, prin însusi modul de concepere, de revedere şi discutare colectivă a tratatului, nu se poate preciza exact ce părţi au fost scrise de un anumit autor şi ce părţi de altul.

Rămânând cu imaginea unui mare matematician, avem un nou exemplu, dintr-o categorie rară, de la familia Bernoulli încoace, în care profesiunea matematicii, la cel mai înalt nivel, se transmite de la tată la fiu. Prin întreaga sa opera, *Henri Cartan* intră nu numai în Pantheonul matematicii franceze, alături de mulţi alţi iluştri predecesori, dar şi în cel al matematicii universale !

Dintre cărţile sale menţionăm în mod detaliat doar următoarele:

[1] H. Cartan and S. Eilenberg, *Homological Algebra*, Princeton University Press, 1956

[2] H. Cartan, *Theorie élémentaire des functions analytiques*, Hermann, Paris, 1961

[3] H. Cartan, *Calcul différentiel, Formes différentielles*, Hermann, Paris, 1967.

DIN VIAŢA SOCIETĂŢII

A XXXV-a sesiune de comunicări metodico-ştiinţifice ale filialelor din judeţul Prahova

Frumoasa urbe de pe valea Prahovei, în plină expansiune urbanistică şi turistică, tinde să devină din ce în ce gazda unor prestigioase manifestări culturale şi ştiinţifice de interes nu numai local, ci şi naţional sau internaţional.

Printre manifestările de tradiţie organizate în anul 2008 la Sin aia, se numără şi cea de a XXXX-a sesiune de comunicu ari metodico-ştiinţifice ale filialelor din judeţul Prahova ale S.S.M.R.

Cuvântul de deschidere al lucrărilor a fost rostit de domnul inspector general adjunct *Nicolae Angelescu*, preşedintele filialei Ploieşti a S.S,M.R. – principalul organizator al acestei sesiuni. În continuare, domnul prof. univ. dr. *Doru Ştefănescu* – prim-vicepreşedinte a adresat mesaj de salut din partea conducerii Societăţii. De asemenea, din partea staff-ului S.S.M.R. au mai participat la lucrări, domnul *Mircea Trifu* – secretar general şi semnatarul acestor rânduri

Lucrările în plen s-au desfăşurat în sala de conferinţe a hotelului „Internaţional", gazdă desăvârşită a acestei manifestări. În cadrul lucrărilor plenului au fost prezentate următoarele comunicări:

1. conf. univ. dr. *Eugen Păltănea* (Universitatea Transilvania din Braşov): „Extinderea unor criterii clasice de convergenţă";

2. conf. univ. dr. *Cristinel Mortici* (Universitatea Valahia din Târgovişte): „O extindere a lemei Cesàro-Stolz";

3. prof. univ. dr. *Horea Banea* (Universitatea Transilvania din Braşov): „Iepurii lui Fibonacci şi cercurile lui Ghioca";

4. prof. *Alexandru Popescu Zorica* (Bucureşti): „Teoreme post Lalescu";

5. conf. univ. dr. *Andrei Vernescu* (Universitatea Valahia din Târgovişte): „Acei mari dascăli pe care nu trebuie să-i uităm".

În continuare, din cauza numărului mare de comunicări, lucrările s-au desfăşurat pe trei secţiuni, găzduite de Şcoala generală George Enescu din localitate. Vom enumera mai jos titlurile comunicărilor:

Secţiunea A (coordonatori conf. univ. dr. *Cristinel Mortici* de la Universitatea Valahia din Târgovişte şi prof. *Nicolae Angelescu* de la I. Ş. J. Prahova):

1. lect. univ. dr. *Ariana Pitea* (Universitatea Politehnică din Bucureşti): „Probleme duale restricţionate cu E.D.P.";

2. prof. *Olimpia Popescu* (Ploieşti): „Aplicaţii ale teoremelor lui Lagrange şi Cauchy";

3. prof. *Corneliu Mănescu Avram* (Grupul şcolar Transporturi din Ploieşti): „Asupra numerelor lui Carmichael";

4. prof. *Mihai Gavriluţ* (Roman): „Generalizarea unor inegalităţi";

5. prof. *Roxana Soare* (Liceul teoretic Nichita Stănescu din Ploieşti): „Divizibilitatea în inele integre";

6. prof. *Marian Tudor* şi elev *Alexandru Bogdan Florea* (Liceul teoretic din Costeşti, jud. Argeş): „Metode moderne pentru realizarea interactivităc tii didactice".

Secţiunea B (coordonatori conf. univ. dr. *Eugen Păltânea* de la Universitatea Transilvania din Braşov şi prof. *Felicia Georgescu* de la I. Ş. J. Prahova):

1. prof. *Georgeta Filipescu* (Liceul de Artă din Ploieşti): „Arhitectură în geometria fractală";

2. prof. *Anghel Dafina* (Colegiul Naţional din Vălenii de Munte): „Omotetia în probleme de loc geometric";

3. prof. *Liliana Crăciun* şi prof. *Ioana Totlici* (Liceul teoretic Nichita Stănescu din Ploieşti): „Matemtica predată INTELigent";

4. prof. *Claudiu Militaru* (Liceul Jean Monet din Ploieşti): „Baricentre şi aplicaţii";

5. prof. *Mărioara Costăchescu* şi prof. *Cristina Diana Costandache* (Liceul cu program sportiv din Roman): „Secvenţe din istoria introducerii sistemului metric zecimal în România";

6. prof. *Antoaneta Gabriela Constantinescu* (Grupul Şcolar Petrol din Câmpina): „Utilizarea numerelor complexe în geometrie";

7. prof. *Adrian Stroe* (Liceul teoretic Mihai Viteazul din Caracal): „Asupra dreptelor Simsongenerate de vârfurile unui patrulater inscriptibil";

8. prof. *Graţiela Calcan* Şcoala generală COnstantin Stere din Bucov, jud. Prahova(): „Leibniz – o idee îndrăzneaţă".

Secţiunea C (coordonatori conf. univ. dr. *Andrei Vernescu* de la Universitatea Valahia din Târgovişte şi prof. *Petre Năchilă* de la Colegiul Naţional I. L. Caragiale din Ploieşti):

1. prof. univ. dr. *Constantin Popovici* (Universitatea din Bucureşti): „Numere perfecte impare";

2. conf. univ. *Alexandru Popa* (Universitatea Petrol şi Gaze din Ploieşti): „Viaţa şi opera prof. univ. ing. Andrei Ioachimescu (1868-1943)";

3. prof. *Adelina Apostol* (Şcoala cu clasele Nicolae Iorga din Ploieşti): „Numere magice";

4. prof. *Maria Ionescu* (Colegiul tehnic Lazăr Edeleanu din Ploişti): „Importanţa studierii temeinice şi timpurii a algebrei polinoamelor";

5. prof. *Arleziana Udma* (Colegiul tehnic Anghel Saligny din Roşiorii de Vede): „Câteva aspecte din istoria matematicii";

6. prof. *Cristiana Dumitrescu* (Colegiul Mihai Cantacuzino din Sinia): „Învăţarea activă – învăţarea centrată pe elev";

7. prof. *Emilian Deaconescu* (Şcoala cu clasele I-VIII din Ceptura, jud. Prahova): „Dascăli prin vremi";

8. prof. *Andrei Dobre* (Liceul teoretic din Azugs) „Rolul programelor informatice în studiul matematicii¡'

Lucrările sesiunii s-au bucurat de un larg succes, comunicările prezentate stârnind vii discuţii şi întrunind aprecieri din partea celor peste sută de participanţi.

Organizatorii Sesiunii (Inspectoratul Şcolar Judeţean Prahova şi filialele S.S.M.R. din judeţul Prahova) au manifestat o deosebită grijă în asigurarea bunei desfăşurări a unei infrastructuri corespunzătoare. Printre cei care s-au ocupat cu mult entuziasm şi abnegaţie de organizarea sesiunii se numără doamna profesoară *Simona Tudor* – direcoarea adjunctă la Şcoala George Enescu din Sinaia şi doamna profesoară *Mihaela Doinaca* de la Colegiul Mihai Cantacuzino din localitate, cărora le ulţumim pe această cale.

Dan Radu

Însemnări aniversare[1)]

Într-o zi superbă de toamnă, mângâiată de razele blânde ale soarelui ce a aurit pletele pomilor, în cea de a 19-a zi a îmbelşugatului Brumărel, prietenul nostru, neobositul matematician şi dascăl, profesorul universitar dr. *Dorel Duca*, a păşit pragul celor 60 de ani, ai vârstei împlinirilor.

Fiu al meleagurilor de „dincolo de pădure“, al bătrânei şi încântătoarei Transilvanii, născut la Grindeni, judeţul Mureş, în 1948, anul în care ocupantul sovietic a lăsat o rană şi mai adâncă în istoria neamului românesc, prin impunerea definitivă a regimului roşu, profesorul universitar de acum este de peste 42 de ani fiul adoptiv al Clujului. Aflat în perfectă comuniune cu prestigioasa Facultate de Matematică şi Informatică a reputatei Universităţi Babeş Bolyai, ca student, apoi ca asistent, lector, conferenţiar şi din 1995 ca profesor universitar, sărbătoritul de astăzi este un exemplu de dăruire pentru şcoala care l-a format, veghindu-i permanent calea devenirii pentru ştiinţă.

Studiile primare şi gimnaziale le-a urmat în Grindeni-ul natal, pe frumoasa vale a Mureşului, în inima Transilvaniei, iar liceul la vreo 8 km depărtare de casa părintească, la Luduş, în binecuvântata tradiţie a Şcolii Ardelene. După absolvirea din 1972 a Facultăţii de Matematică din Cluj, a fost oprit ca asistent stagiar la Catedra de Analiză Matematică şi Calcul Numeric.

De foarte tânăr, a fost atras de Optimizare, programare, Matematică şi Cercetări Operaţioanale. Este motivul pentru care teza sa de doctorat, trecută în 1982 cu prof. univ. dr. *Petru Mocanu*, membru corespondent al Academiei, este intitulată Programarea matematică în domeniul complex. Peste ani, ideile acesteia sunt dezvoltate în cartea sa „Multicriteria Optimization in Complex Space“, apărută în 2005.

Activitatea de cercetare a profesorului *D. Duca* este una absolut meritorie, concretizată în 46 articole apărute în reviste din ţară şi străinătate precum şi în alte 14, publicate în volumele unor conferinţe naţioanale sau internaţionale. Ca profesor al Catedrei de Analiză şi Optimizare, a Universităţii clujene, a scris pentru studenţii săi, singur sau în colaborare, 4 cursuri, între care se remarcă *Matematica de bază*, apărută în 5 ediţii, precum şi alte 4 *Culegeri de Probleme de Analiză şi Algebră*. Printre disciplinele matematice apropiate sufletului său, şi despre care profesoru *Duca* a ţinut cursuri studenţilor săi, amintim *Cercetări Operaţionale*, *Programare Matematică*, *Metode Numerice în Optimizare*. Pe lângă acestea,le-a predat şi cursurile clasice de Analiză Matematică, analiză funcţională, Complemente de Analiză, Algebră, sau pe cel mai nou de Capitole Speciale de Matematică Modernă.

Cunoscător de fineţe al cauzelor involuţiei actuale a Matematicii în gimnaziu şi liceu, profesorul universitar *D. Duca*, în amintirea celui care i-a fost dascăl în Grindeni-ul natal, a căutat ca prin lucrările sale metodice, să contribuie la stabilitatea vieţii şcolii medii româneşti, profund afectată de degringolada ultimilor 10 ani. . . . Este motivul pentru care a scris 17 reuşite articole metodice, şi este coautor la 21 Culegeri de probleme şi manuale pentru liceu. Conferinţele sale foarte atractive, de la cursurile de perfecţionare a profesorilor din învăţământul mediu, au făcut să fie invitat în repetate rânduri, la Alba-Iulia, Bistriţa, Buşteni, Cluj, Satu-Mare, în calitatea sa de *Formator Magister* în 13 rânduri, dascălul *D. Duca*, cel ce a reuşit să slujească în egală măsură Matematicile superioare, dar şi pe acelea elementare, a fost preşedinte al juriului diferitelor concursuri şcolare, între care amintim pe cele ce poartă numele profesorilor *M. Ţarina*, *Gr. Moisil* şi *Al. Papiu-Ilarian*.

[1)] Mesaj adresat de autor în numele biroului S.S.M.R. la 13 noiembrie 2008, cu ocazia sărbătoririi împlinirii vârstei de 60 de ani de către profesorul *Dorel Duca* de la Universitatea Babeş-Bolyai din Cluj. (N.R.)

Realizările cercetătorului *D. Duca* din Programarea şi Optimizarea în Spaţiul Complex, sunt citate de 83 ori! Acesta este motivul pentru care prof.univ.dr. *D. Duca* este secretar de redacţie la revista *Studia Universitatis Babeş-Bolyai*, seria *Mathematica*, membru în comitetele redacţionale ale prestigioaselor *Revue d'Analyse numerique et de la Theorie de l'approximation*, *Revista Matematica din Transilvania*, *Univers Matematic*, dar şi preşedintele comitetului redacţional la *Mathematica Nova*. Renumele său, de reputat metodist, a contribuit la desemnarea sa ca editor şef al jurnalului *Didactica mathematica*, singura revistă de acest tip, din peisajul matematic românesc. *D. Duca* este de ani buni, referentul următoarelor 7 edituri de carte matematica: UT Press, Transilvania Pres şi Risoprint Cluj, Gil Zalău,

Este un apreciat organizator de conferinţ matematice, un asiduu recenzor AMS şi ZBL, dar şi un tenace evaluator CNCSIS. Legătura sa permanentă cu aplicaţiile Matematicii se regaseşte şi în participarea sa, la finalizarea a 46 contracte naţionale de cercetare-proiectare precum şi a încă altora 3, internaţionale.

Profesorul *D.Duca* este din 1972, membru al S.S.M.R., al AMS din 1990, al Societăţii de Cercetări Operaţionale, din 1999, dar şi al Society for Multiple Critery-Decision Making, din 1994. Intre anii 2000 -2004a participat, ca prodecan, la definirea Informatica din Cluj. Din 2003 este preşedinte al Filialei Cluj a S.S.M.R. Începând cu 2004 este membru al Consiliului S.S.M.R., iar din ianuarie 2008 este membru al Biroului Consiliului S.S.M.R.

Blajinul ardelean cu un umor sănătos, de o politeţe remarcabilă şi de o înţeleaptă modestie, este un OM împlinit într-o familie cu 4 matematicieni, alături de sotia sa, *Eugenia*, conf. univ. la Universitatea dim Cluj şi alături de fiicele sale , amândouă absolvente ale Facultu aţii de Matematică şi Informatică din Cluj.

Cercetator tenace, cu rezultate pe măsură, dascăl de excepţie, metodist recunoscut, dar mai ales un suflet remarcabil, profesorul universitar *D.Duca* este un nume de marcă al lumii academice actuale a Matematicii româneşti. De aceea, la aniversarea celor 60 de ani ai vârstei destinului implinit, împreună cu întregul Birou al Consiliului S.S.M.R., îi transmitem prietenului nostru, neobositului dascăl *D. Duca*, un sincer La mulţi ani alături de gândurile noastre cele mai bune şi de calde urări de sănătate şi de putere de muncă pentru alte frumoase şi lungi realizări profesionale!

Şi-i mai dorim reuşite cât mai multe, alături de armonioasa sa familie, în care toţi ai săi slujesc Matematica, ştiinţa aceasta, fără de început, dar şi fără de sfârşit.

Laurenţiu Modan

RECENZII

EDUARD DĂNCILĂ, IOAN DĂNCILĂ, Matematica pentru învingători, clasele V-VII, Editura ERCPRESS, Bucureşti, 2008

„Pentru a deveni performant în matematică, unui elev nu-i ajunge să prelucreze culegeri de probleme şi să înveţe tehnici de rezolvare pentru teme izolate, ci trebuie să (i se) identifice pentru fiecare temă ideea conducătoare, astfel încât elevul să devină conştient de ea şi să-i rămân a întipărită în minte."

Această profesie de credinţă a autorilor, inserată pe coperta IV, constituie firul conducător pentru prezentul volum care se vrea o continuare a volumelor mai vechi, cu acelaşi titlu, destinat elevilor claselor a III-a şi a IV-a.

Tematica din mai vechiul volum, amintit mai sus, se reia în acesta, adaptată pentru clasele V şi VI ale gimnaziului; evident, vor apărea şi teme noi, specifice acestor clase. Oricum, ideea este aceeaşi: autorii vor să ofere celor interesaţi de matematică (elevi din gimnaziu) un instrument util pentru perfecţionarea matematicii, în vederea atingerii nivelului de performanţă (concursuri, olimpiade etc.) După cm aceştia afirmă răspicat: „a învăţa matematică este posibil, în primul rând prin rezolvarea individuală de probleme, în niciun caz prin citirea de monografii sau soluţii".

Volumul conţine 21 de capitole (teme) menite să acopere înreaga tematică de studiu acestor clase. În deschidere este inserat un index de autori, care are un merit deosebit prin aceea c a încearcă să stabilească care au fost primii autori ai unei probleme intrată de mai multă vreme în circulaţie. Ar fi fost bine dacă acest index ar fi fost mai detaliat, specificând şi care probleme aparţin acestora.

Limbajul viu şi de multe ori colocvial este perfect accesibil elevilor din aceste clase, nefăcându-se, totuşi, rabat rigurozităţii şi exprimării corecte din punct de vedere matematic.

În concluzie, iată o carte atractivă şi accesibilă, care se dovedeşte extrem de utilă elevilor din primele clase de ginaziu în vederea pregătirii viitoarelor performaţe.

Dan Radu

DOREL I. DUCA, EUGENIA DUCA, Exerciţii şi probleme de Analiză Matematică, Casa Cărţii de Stiinţă, Cluj-Napoca, 2009

Un interesant volum 2 încheie o foarte reuşită culegere de probleme de analiză matematică pentru liceu, în două părţi (prima parte, apărută cu doi ani în urmă, la aceiaşi editură, incluzând problemele corespunzătoare calculului diferenţial al funcţiilor reale de o variabilă reală). In linii mari, prezentarea din cele două volume ale actualei lucrări reia ideile fundamentale dintr-o lucrare mai veche a autorilor („Analiză matematică. Culegere de probleme", Editura GIL, Zalău, 1999), recenzată de noi în paginile revistei, în nr.2/2002, pp.137-138, dar având o formă amplificată, cu multe probleme noi, cât şi îmbunătăţită, ceea ce face ca să fie vorba acum de o lucrare distinctă.

Autorii sunt binecunoscuţi matematicieni şi cadre didactice universitare la Universitatea „Babeş- Bolyai", respectiv la Universitatea Tehnică din Cluj- Napoca.

Destinată calculului integral al funcţiilor reale de o variabilă reală, cartea pe care o prezentăm acum conţine şase capitole (desfăşurate pe 322 de pagini), dintre care primele trei sunt intitulate:

1. Funcţii primitivabile.
2. Integrala Riemann.
3. Aplicaţii ale calculului integral,

iar ultimele trei conţin respectiv soluţiile problemelor din cele trei capitole menţionate anterior. Fiecare din capitolele 1- 3 conţine câte un foarte precis breviar teoretic, destinat reamintirii, pentru cititor, a principalelor rezultate teoretice, formule şi procedee de lucru specifice calculului integral al funcţiilor reale de o variabilă reală. Fără să se substituie niciunui curs teoretic (şi, desigur, nici nu s-a urmărit acest lucru!) breviarele sunt extrem de utile cititorului-rezolvitor, pentru a-i da prima direcţionare corectă în procesul rezolvării problemelor. Aceste probleme (dintre care unele rezolvate, ghidând cititorul) sunt foarte bine gradate, de dificultăţi treptate, de la probleme elementare, până la probleme de tip olimpiadă naţională, sau de tipul celebrelor concursuri „Putnam". Dacă la problemele elementare, rezolvările standard se dovedesc (aproape) suficiente pentru a duce soluţionarea la bun sfârşit, pe măsură ce gradul de dificultate creşte, este necesară mai multă creativitate în rezolvare.

Multe din probleme ating nuanţe teoretice foarte fine, de care, după cum este bine cunoscut, analiza matematică abundă, prin excelenţă. Astfel, pentru a da numai câteva exemple, putem menţiona, în acest sens, problemele 1.20, 1.29 şi 2.31, în care cititorul va gasi rezultate teoretice foarte interesante, (unele de tipul contraexemplelor), care, de obicei, nu sunt prezentate în manuale. De asemenea, tot la capitolul destinat integralelor definite, se află multe probleme legate de inegalităţi, de limite de şiruri şi de diferite proprietăţi ce implică apariţia integralelor. Varietatea problemelor este mare, ca şi numărul lor, primul capitol cuprinzând 267 de probleme, al doilea 359, iar al treilea 104; în plus, desigur, unele dintre probleme cuprind mai multe subpuncte. Capitolele de soluţii conţin rezultatele la toate problemele, cât şi, atunci când a fost necesar, indicaţiile de rezolvare, suficiente pentru depăşirea dificultăţilor. Lucrarea se încheie cu o bibliografie care conţine 25 de titluri. In sfârşit, dar nu în cele din urmă, prezentarea grafică este impecabilă.

Aşa cum este alcătuită, cartea este de mare folos elevilor de clasa a 12-a, profesorilor care predau la această clasă, dar poate fi folosită, cu mult succes şi la seminariile de analiză matematică din universităţi si institutele politehnice, pentru ilustrarea cu probleme a capitolelor legate de integrala Riemann. O recomandăm cu cea mai mare caldură.

Andrei Vernescu

MIRON OPREA, Scurtă istorie a matematicii (ediţia a doua, revăzută şi adăugită), Editura PREMIER, Ploieşti, 2008

În multitudinea noutăţilor editoriale din ultimii ani a apărut o carte dintr-un domeniu care pasionează pe mulţi cititori: istoria matematicii.

Cartea este scrisă în „stilu propriu“ al autorului, pe care am avut privilegiul de a-l audia cu ocazia Conferinţei Naţionale a S.S.M.R., precum şi la Cursurile de vară de la Buşteni. Citind volumul, ai senzaţia că în faţa ta stă autorul cu care stai de vorbă despre „Regina ştiinţelor – matematica“ care l-a atras din copilărie şi care l-a fascinat pentru tot restul vieţii.

Titlurile capitolelor, alese cu măiestrie, sunt următoarele:

1. Elemente de preistoria matematicii
2. Matematica în antichitate
3. Matematica în civilizaţia islamului
4. Matematica în civilizaţiachineză şi hindusă
5. Matematicile din Europa Evului mediu (500 – 1500)
6. Matematica în secolelel XIV - XIX
7. Matematica în epoca contemporană
8. Istoria matematici şi a învăţămîntului matematic în România
9. Figuri feminine în istoria matematicii
10. Călugări matematicieni
11. Întâmplări hazlii şi curiozităţi din viaţa matematicienilor
12. O istorie matematicii prin operele sale fundamentale
13. Scurtă istorie a simbolurilor (semnelor) matematice
14. Medalii şi premii pentru cercetarea matematică
15. Subiecte pentru lucru ari de cercetare.

La sfârşitul fiecărui capitol întâlnim propria sa bibliografie, iar în primele şase capitole şi câteva execiţii în final.

Volumul debutează cu o „Scrisoare către cititor“ semnată de autor în are acesta îşi prezintă crezul său matematic şi încearcă o justificare a necesităţii cunoaşterii istoriei matematicii.

De asemenea, vom mai menţiona că „Prefaţa“ este semnată de profesorul *Mihai Brescu* de la Universitatea Petrol şi Gaze din Ploieşti, iar „Postfaţa“ de profesorul *Gherghe Calcan* de la aceeaşi universitate.

Mărioara Costăchescu