GAZETA MATEMATICĂ
SERIA A
REVISTĂ DE CULTURĂ MATEMATICĂ

ANUL XXVI(CV) **Nr. 3 / 2008**

Singurătatea matematicianului[1)]

DE SOLOMON MARCUS

Abstract

This is the text of the Reception Speech, delivered by the author when received at the Romanian Academy. It presents his lifelong conclusions about beeing a mathematician and a teacher.

Key words: integral inequality.

M.S.C.: 00A35, 01A70.

A fi matematician

A te pretinde matematician este o cutezanţă pe care puţine persoane în cunoştinţă de cauză şi-o pot permite. Şi-a permis-o *Norbert Wiener*, în titlul autobiografiei sale, după ce comunitatea matematică internaţională l-a recunoscut ca autor al unor importante noţiuni şi rezultate matematice şi ca un deschizător de drumuri. Dar un alt autor, *Paul R. Halmos*, cu o foarte bună reputaţie în matematică, însă cu o clasă sub aceea a lui *Wiener*, a fost mai prudent şi şi-a intitulat volumul său de memorii „I want to be a mathematician" (Doresc să fiu matematician). Avem deci în vedere pe matematician în ipostaza sa majoră. Drumul către această ţintă poate fi o aventură care merită a fi relatată, chiar dacă ţinta nu este efectiv atinsă.

Surpriza

Atunci când am devenit membru titular al acestui înalt for de cultură, am dorit să-mi prezint cât mai curând discursul de recepţie. Dar am vrut să văd, în prealabil, ce au spus în discursurile lor de recepţie profesorii mei. Am căutat deci discursurile prezentate de *Simion Stoilow*, *Victor Vâlcovici*, *Octav Onicescu*, *Gheorghe Vrănceanu*, *Miron Nicolescu*, *Gheorghe Demetrescu*, *Grigore C. Moisil*, *Alexandru Ghika*, *Nicolae Teodorescu*. Le-am căutat şi pe cele ale colegilor lor din alte centre universitare: *Alexandru Myller*, *Octav Mayer*, *Mendel Haimovici*, *Tiberiu Popoviciu*, *Gheorghe Călugăreanu*. Rezultatul acestei căutări a fost dezamăgitor: niciunul dintre ei nu şi-a prezentat un discurs de recepţie. Faptul se explică, fără

[1)] Prezentul material constituie textul Discursului de Recepţie rostit de acad. *Solomon Marcus* la Academia Română. (N. R.)

îndoială, prin lipsa de libertate care a existat in România atunci când aceştia au fost primiţi în Academie. Dar, chiar aşa stând lucrurile, mă simţeam oarecum stingherit şi tot amânam discursul meu.

Pe vremea când G. Ţiţeica îi răspundea lui G. Enescu

Mă aflu acum într-un moment în care orizontul meu temporal nu mai este foarte generos şi de aceea m-am decis, după multe ezitări, să mă prezint în faţa acestui for, cu o încercare de recapitulare a unei vieţi care mă umple de mirare.

Dacă profesorii mei nu şi-au ţinut discursul de recepţie, am mers la discursurile profesorilor profesorilor mei, ale celor pe care-i consider un fel de bunici spirituali. Surpriza nu a lipsit nici aici, dar ea a fost una plăcută, plină de semnificaţii. În acele vremuri, cultura românească avea o anumită unitate. Disciplinele nu erau încă ferm constituite, iar dialogul lor era modul normal de existenţă. Inginerului, matematicianului şi pedagogului *Petrache Poenaru*, care-şi consacrase discursul de recepţie rostit în anul 1871 lui *Gheorghe Lazăr* şi şcolii româneşti, i-a răspuns scriitorul *George Sion*. Fizicianului, chimistului şi matematicianului *Emanoil Bacaloglu*, care vorbise la 1880 despre calendar, i-a răspuns scriitorul şi inginerul *Ion Ghica*. Discursului despre *Spiru Haret*, rostit de *Gheorghe Ţiţeica* în 1914, i-a răspuns fizicianul şi meteorologul *Stefan C. Hepites*. În 1933, compozitorul *George Enescu* îşi prezintă discursul despre scriitorul *Iacob Negruzzi* şi despre intrarea muzicii la Academia Română, iar răspunsul este dat de matematicianul *Gheorghe Ţiţeica*. În 1936, matematicianul *Dimitrie D. Pompeiu* îşi consacră discursul chimistului *Petru Poni* şi medicului *Ioan Cantacuzino*, iar răspunsul este dat de un alt medic, *Gheorghe Marinescu*.

Putem recupera acest dialog al disciplinelor?

Frumoase vremuri! Iată însă că acum ne aflăm într-o perioadă în care, din cu totul alte motive decât cele care explică situaţia din urmă cu o sută ani, dialogul disciplinelor se impune ca o necesitate majoră. Aţi văzut însă câtă mirare a produs, în urmă cu câţiva ani, răspunsul dat de un matematician la discursul rostit în această aulă de un critic literar. Disciplinele au proliferat peste măsură şi uneori se uită că valoarea lor culturală este dată şi de capacitatea lor comunicaţională. Discursul de recepţie al unui matematician nu se adresează numai colegilor săi de breaslă, ci întregii comunităţi academice. Nu ascund că am fost tentat de a invita pe un coleg dintr-o altă secţie să-mi dea răspunsul; dar a învins dorinţa de a mă adresa cuiva care este martor de multe decenii la itinerarul meu spiritual şi care are la activul său o remarcabilă operă de creaţie, în bună măsură interdisciplinară.

A căzut în desuetudine discursul de recepţie?

Trebuie totuşi să ne întrebăm dacă discursul de recepţie, în forma sa tradiţională, mai este actual. După cum ar fi cazul să ne întrebăm de ce nu se mai practică decât rareori lecţia de deschidere la cursurile universitare. Am asistat, în această Academie, la splendide discursuri de recepţie ale unor membri de onoare din străinătate, în ciuda faptului că pentru ei statutul nu prevede acest discurs. Cine poate uita prezenţa în această aulă a lingvistului *Eugenio Coşeriu* sau a scriitorului *Jean Lefèvre D'Ormesson*? Este mai important momentul titularizării decât cel al primirii în Academie? Dacă răspunsul este negativ – şi poate că acesta este cazul – atunci n-ar trebui ca momentul primirii în Academie să fie şi cel al discursului de recepţie (cel puţin pentru a fi consecvenţi cu denumirea acestui discurs)?

Singurătatea matematicii şcolare

Rarele bucurii pe care mi le-a oferit matematica în adolescenţă au venit nu atât din viaţa şcolară propriu zisă, cât din ceea ce am putut afla în timpul meu liber. Mult mai puternică s-a dovedit atunci atracţia pentru literatură şi pentru filozofie, dar nu ca urmare a celor învăţate la şcoală, ci prin lecturile de acasă, din cărţi care nu făceau parte din programa şcolară. Prima revelaţie oferită de matematică am trăit-o abia la vârsta bacalaureatului, când am citit ceva despre geometriile neeuclidiene, dar nu din cărţile de şcoală. Am realizat, pentru prima oară, frustrarea căreia îi cad victimă cei mai mulţi copii şi adolescenţi. Au trecut de atunci peste 60 de ani; în tot acest timp, am urmărit evoluţia matematicii şcolare. Dincolo de unele ameliorări locale şi temporare, la vârsta de 11, 12, 13 ani se produce ruptura de pe urma căreia cei mai mulţi elevi resping matematica şi o consideră un fel de pedeapsă. Amintindu-ne de ceea ce scria revizorul şcolar Eminescu despre predarea matematicii în şcoală şi de însemnările lui *Spiru Haret*, putem conchide că matematica şcolară trăieşte, de un secol şi jumătate, într-o nemeritată singurătate.

„Faceţi *tabula rasa* din matematica şcolară!“

Am optat, într-un moment de mare derută din toamna anului 1944, pentru studiul matematicii. Chiar de la prima oră de curs, am primit de la Profesorul *Miron Nicolescu* îndemnul de a face *tabula rasa* din matematica şcolară. Desigur, aceste cuvinte nu puteau fi luate ad litteram, dar sensul lor profund îmi devenise clar. Era o confirmare a impresiei la care ajunsesem la terminarea liceului: adevărata matematică nu este aceea din manualele şcolare, chiar dacă unele cunoştinţe căpătate din ele sunt utile. Era o constatare negativă. Dar lecturile privind geometriile neeuclidiene şi primele ore de curs cu Profesorul *Miron Nicolescu*, cel care avea să-mi devină mentor şi părinte spiritual, au fost primii paşi spre o înţelegere a naturii reale a matematicii. Iniţierea în analiza matematică mi-a dezvăluit două aspecte esenţiale ale ei: atenţia acordată proceselor cu o infinitate de etape şi discrepanţa dintre ceea ce devine inteligibil prin matematica acestor procese şi ceea ce este vizibil, perceptibil pe cale directă. Dar mi-am dat imediat seama că aceste aspecte nu-mi erau necunoscute. Unde le mai întâlnisem? În poezia lumii, de la *Eminescu*, *Arghezi*, *Blaga* şi *Barbu* la *Edgar Poe*, *Baudelaire*, *Mallarmé* şi *Rimbaud*. Poezia are acces la infinitul existenţei, la „comportamentul ei asimptotic“. În acelaşi timp, întocmai ca şi matematica infinitului, poezia transgresează locul comun al existenţei cotidiene, pentru a ne pune în contact cu aspectele anti-intuitive, paradoxale, ale existenţei. În acest fel mi-am dat seama că veneam spre matematică marcat fiind de lecturile mele literare şi filozofice.

Lecturile din anii ’50

Prima propunere a unei teme de cercetare, din partea Profesorului *Miron Nicolescu*, nu m-a entuziasmat. Mi-a dat atunci un articol al lui *G.P. Tolstov* despre comportamentul derivatelor parţiale ale unei funcţii de două variabile şi m-a invitat să-i fac o lectură critică. Aşa s-a născut primul meu articol. Profesorul îmi ghicise preferinţa pentru ceea ce se numea atunci patologia funcţiilor reale, un domeniu care se născuse în secolul al XIX-lea, ca urmare a nevoii de decantare şi aprofundare a noţiunilor de bază ale analizei matematice. Această preocupare a căpătat amploare în secolul al XX-lea, prin *Emile Borel*, *Henri Lebesgue*, *René Baire* şi *Arnaud Denjoy* în Franţa, prin şcoala poloneză a lui *Waclaw Sierpinski*, prin ruşii *N. Luzin*, *M. Suslin* şi *N. Bary* şi prin *Dimitrie Pompeiu*, *Simion Stoilow*, *Alexandru Froda* şi *Miron Nicolescu*, în România. În anii '50 ai secolului trecut, m-am aplecat cu atenţie asupra acestor cercetări şi am publicat câteva zeci de articole privind comportamentul anti-intuitiv al mulţimilor şi funcţiilor reale.

Interesul pentru mulţimile şi funcţiile urâte

Totul era un joc de aşteptări frustrate, deoarece făpturile care făceau obiectul cercetării nu admiteau o reprezentare vizuală. Cine se gândeşte că, atunci când trasează o linie pe o foaie de hârtie, impune liniei respective constrângeri severe, cum ar fi obligaţia de a avea o tangentă în fiecare punct (eventual, cu excepţia unui număr finit de puncte) şi necesitatea ca acea tangentă să varieze în mod continuu (eventual, cu excepţia unui număr finit de puncte)? Dar şi cuvântul „continuu" are în matematică o semnificaţie mult mai generală decât corespondentul ei intuitiv. Noţiunea generală de curbă are o inteligibilitate incomparabil mai vastă decât partea ei vizibilă. Între inteligibil şi vizibil se produce o tensiune care nu a scăpat filozofilor şi cu atât mai puţin unui filozof matematician ca *René Thom*: vedem numai continuul (înţeles ca ceea ce se opune discretului), dar înţelegem numai finitul.

Nu au lipsit criticile care susţineau inutilitatea unor preocupări de acest fel. Dar istoria nu le-a dat dreptate. Acele mulţimi şi funcţii „urâte" s-au dovedit a fi precursoare ale obiectelor care aveau să constituie punctul de plecare în geometria fractală a naturii, propusă în anii '70 ai secolului trecut de *Benoit Mandelbrot*. Obiectele fractale se află peste tot în jurul nostru: norii şi coastele oceanelor, fulgii de zăpadă şi mişcarea browniană, fenomenele biologice şi cele financiare, literatura fractală şi muzica fractală. *Baudelaire* şi, pe urmele sale, *Arghezi* au introdus urâtul în poezie, parcă în înţelegere cu autorii fractalilor.

Suntem suma reacţiilor celorlalţi

Trecerea de la studenţie la predare şi cercetare a însemnat, în bună măsură, trecerea de la matematica din cursuri şi manuale la aceea din monografii, tratate şi, mai ales, reviste de specialitate. Matematica vie, aceea care te introduce în laboratorul de lucru al matematicianului, este numai aceea din reviste (cele de cercetare, nu de popularizare). În revistele de dată recentă, găseşti rezultatul celor mai proaspete frământări şi căutări ale cercetătorilor. Îmi aduc aminte emoţia cu care intram, în anii '50 şi '60 ai secolului trecut, în Biblioteca de Matematică a Universităţii din Bucureşti sau în aceea a Institutului de Matematică al Academiei, având mereu ca primă întrebare: Ce noutăţi aţi mai primit? Dar şi plăcerea de a te cufunda în lectura celor care, într-un trecut mai mult sau mai puţin îndepărtat, au fost chinuiţi de întrebări şi curiozităţi asemănătoare celor de azi, ale tale, nu este de subapreciat. Păstrez şi acum zeci de caiete în care copiam fragmente din articole care mă interesau; era o vreme în care, nu numai că nu exista încă internetul, dar nici xeroxul nu apăruse iar procedeele mai rudimentare de copiat erau şi ele un lux. Aşa mi s-a cristalizat caracterul de ştafetă al cercetării. Porneşti de la probleme, idei şi rezultate ale altora, încerci să faci un pas mai departe şi, dacă reuşeşti sau numai crezi că ai reuşit, încerci să transmiţi altora mesajul tău. Aştepţi cu înfrigurare reacţia lor, pentru a testa în acest fel coerenţa, corectitudinea şi interesul mesajului respectiv şi pentru a vedea în ce fel este, la rândul său, dus mai departe. Aşa cum un părinte este interesat să vadă cum evoluează propria-i odraslă, ca autor al unei lucrări doreşti să urmăreşti ecoul ei. Nu cumva tocmai în aceste reacţii ale altora se află o sursă preţioasă pentru preocupările tale ulterioare? Nu cumva tocmai în acest dialog generalizat se află esenţa activităţii de cercetare, a creaţiei, în general? Bănuind că răspunsul corect la aceste întrebări este cel afirmativ, m-a preocupat, de la primii paşi în cercetare, impactul activităţii mele. În măsura în care l-am putut urmări (într-o vreme în care comunicarea cu lumea era dificilă), l-am înregistrat cu grijă, iar cele peste o sută de caiete care s-au acumulat în această privinţă fac parte organică din biografia mea intelectuală. Acum, internetul facilitează considerabil urmărirea acestui aspect. Biografia noastră în domeniul creaţiei culturale a devenit în mare măsură publică.

Anii 1956-1957: umanistica în haine noi

În 1956 apare articolul lingvistului *Noam Chomsky* privind trei modele matematice de descriere lingvistică iar în 1957 apare cartea acestuia „Syntactic Structures", în care modelul anterior este detaliat şi explicat pe îndelete. Pe de altă parte, în aceiaşi ani, apar la Moscova câteva articole orientate şi ele spre o alianţă între lingvistică şi matematică: *A. N. Kolmogorov* propune un model algebric al cazului gramatical, *V.A. Uspenski* publică un model algebric al părţii de vorbire iar *R.L. Dobrushin* propune un model algebric al categoriei gramaticale. Primele experimente de traducere automată, începute încă în anii '40, au un caracter predominant ingineresc, dar în 1958 *O.S. Kulagina* extrage din acest tip de activitate o descriere a noţiunilor de bază ale gramaticii pe baza teoriei mulţimilor. Tatonarea posibilităţilor de traducere automată si de documentare automată în Europa occidentală, în cadrul Euratom, şi în S.U.A., de exemplu, prin *David Hays*, conduce, spre sfârşitul anilor '50 şi începutul anilor '60, la diverse idei de proiectivitate sintactică (*Yves Lecerf* şi alţii), o provocare interesantă pentru teoria grafurilor. În toate aceste activităţi sunt implicate esenţial logica matematică (gramatica generativă a lui *Chomsky* este, în esenţă, un sistem formal în sensul lui *Hilbert*) şi unele capitole de combinatorică (sistemele lui Post şi probleme de tipul celor propuse la începutul secolului trecut de *Axel Thue*). Tot din direcţie logico-matematică provin ideile lingvistice şi logice ale lui *Y. Bar-Hillel* (1953) şi *J. Lambek* (1958). *F. Harary* şi *N. Paper* propun în 1957 un calcul al distribuţiei fonemelor, *N. Chomsky* prezintă în 1958 o analiză a relaţiei dintre lingvistică, logică, psihologie şi calculatoare; în acelaşi an, *Y. Bar-Hillel* analizează procedurile de decizie în limbile naturale. *M. Masterman* discută în 1957 relaţia dintre semantică şi sintaxă în traducerea automată. La toate acestea trebuie să adăugăm articolul lui *S.C. Kleene* din 1956, privind reprezentarea evenimentelor în reţele nervoase şi în automate finite, în ordinea de idei inaugurată de articolul din 1943 al lui *W.S. McCulloch* şi *E. Pitts*, asupra unui calcul logic al ideilor implicate în activitatea nervoasă.

Cum puteam rămâne indiferent la noile evoluţii?

Să rezumăm. Dezvoltări din direcţii foarte diferite fac joncţiunea în a doua parte a anilor '50, aducând într-o albie comună discipline dintre cele mai diverse: lingvistica, psihologia (*Chomsky* considera lingvistica generativă un capitol al psihologiei cognitive), calculatoarele, matematica, logica şi biologia; dar, prin teoria informaţiei, în plin elan atunci, s-a făcut legătura şi cu fizica, în special cu termodinamica. Inutil să mai adăugăm că filozofia se afla în faţa unor provocări fără precedent. Evenimentele enumerate aveau loc într-un moment în care se năştea informatica în România, sub bagheta extraordinarului dirijor de energii creatoare care a fost *Grigore C. Moisil.* Şi pentru că, vorba poetului, toate aceste lucruri trebuia să poarte un nume, s-au inventat diverse etichete, una dintre ele fiind lingvistica matematică. Sintactic, nu putem alătura decât doi termeni; dar era clar că noile preocupări nu combinau numai două domenii, ci mai multe. Marea noutate consta în faptul că se aflau împreună cel puţin şase discipline, dintre care trei din domeniul socio-uman. Se mai aflau împreună ştiinţa şi ingineria. Polaritatea pascaliană „spiritul de geometrie, spiritul de fineţe" şi contrastul dintre cele două culturi, la care se referea *C. P. Snow*, primeau o provocare fără precedent. Ne aflam în plină transdisciplinaritate.

Cum puteam rămâne indiferent la aceste evoluţii? Am intrat în joc. Am simţit că unor energii care aşteptau de mult să se dezlănţuie le-a venit ceasul. Într-un timp record, m-am iniţiat în lingvistica structurală, disciplina prin care te apropiai de noile preocupări din direcţia lingvisticii. Am fost ajutat în această privinţă de discuţiile cu *Emanuel Vasiliu*, cel mai apropiat de logică şi de matematică, dintre lingviştii români ai acelui moment, şi de *Paula Diaconescu*, entuziastă cercetătoare în analiza structurală a limbii române; amândoi, de la Catedra de limba română a Universităţii din Bucureşti, catedră condusă de Profesorul *Alexandru Rosetti.* Lor, li s-au adăugat ulterior *Edmond Nicolau* şi *Sorin Stati.* Între *Rosetti* şi *Moisil* a existat o atracţie magnetică, ei au încurajat şi sprijinit o colaborare faţă de care cei mai mulţi se arătau sceptici. Sprijinul lor, la Universitate şi la Academie, a permis României să fie una dintre primele ţări în care s-au ţinut cursuri universitare de lingvistică matematică şi computaţională şi în care s-a înfiinţat o revistă de profil, în limbi internaţionale.

Un loz câştigător

Drept rezultat, a urmat o dezvoltare vertiginoasă, oglindită parţial în recentul volum „*Grigore C. Moisil and His Followers in Theoretical Computer Science*" (Ed. Academiei Române, 2007).

În această atmosferă, am redactat cursul de lingvistică matematică pe care Editura Didactică şi Pedagogică mi l-a publicat în 1963, cu rezerva considerată normală faţă de o întreprindere aparent hazardată. Entuziasmul mă împiedica să sesizez caracterul aparent utopic al traseului pe care mă angajam. Cursul se baza în bună măsură pe cercetările mele personale, publicate în reviste. Pentru a mă testa, am trimis cartea la câteva adrese universitare potenţial interesate într-o atare aventură. A fost un loz câştigător. A urmat publicarea ei la New York, la Paris, la Moscova şi la Praga. Marile enciclopedii Brockhaus, Encyclopaedia Universalis, Enciclopedia

Einaudi, Great Soviet Encyclopedia, Encyclopedia of Mathematics şi numeroase enciclopedii de lingvistică, de cibernetică, de informatică au menţionat una sau alta dintre versiunile cărţii. Trăiam astfel o experienţă nouă, nu mai rămâneam cantonat într-un domeniu cu graniţe destul de precise, ci mă aflam pe un traseu transdisciplinar, care mă obliga să învăţ nu numai lingvistică, ci şi biologia sistemului nervos, biologia eredităţii, logică, psihologie cognitivă, structura limbajelor de programare şi anumite capitole de matematică discretă care nu erau pe linia antrenamentului meu anterior, din studiul funcţiilor reale şi al topologiei generale.

Am simţit tot timpul, în această nouă etapă, sprijinul Profesorilor *Rosetti*, *Moisil* şi *Miron Nicolescu.* Atunci am descoperit faptul că, prin interacţiune cu disciplinele socio-umane, matematica şi calculatoarele dobândesc, pentru un public destul de larg, o valoare culturală.

În faţa unei noi provocări

În perioada iniţială a activităţii mele de cercetare, în care eram preocupat exclusiv de probleme de analiză matematică, mă mulţumeam să comunic despre ele numai cu matematicieni. De îndată ce am trecut la o activitate transdisciplinară, am devenit un interlocutor interesant pentru persoane din toate domeniile, inclusiv pentru scriitori, pentru filozofi şi pentru gazetari. Toţi mă asaltau cu întrebări care trădau mirarea lor faţă de o posibilă legătură între matematică şi calculatoare, pe de o parte, şi lingvistică, biologie şi psihologie, pe de altă parte. Descopeream astfel din nou singurătatea matematicianului. Şcoala nu le dăduse nicio idee despre alte conexiuni ale matematicii decât cele cu fizica (şi chiar despre acestea, informaţia era derizorie). Interlocutorii mei, de multe ori oameni cu o bogată cultură, nu-şi imaginau că matematica ar putea fi şi altceva decât un şir de calcule cu impact preponderent ingineresc şi se mirau aflând că în matematică mai sunt multe probleme care-şi aşteaptă răspunsul şi că mereu apar probleme noi. Posibilitatea unei matematici a calităţii, a structurii, li se părea în conflict cu natura ei. De altfel, am constatat că şi despre lingvistică reprezentarea multora era derizorie, nu-şi imaginau că această ştiinţă are şi altceva de făcut decât stabilirea normelor de vorbire şi scriere corectă.

Matematica: o unealtă utilă uneori

Prin anii 1950-1951 eram şi asistent la cursuri de matematică de la Politehnica bucureşteană, la Electrotehnică, la Energetică şi la Chimie industrială. Într-o zi, sunt invitat de Profesorul *Spacu*, decan la Chimie, care-mi atrage atenţia că seminarul meu este prea teoretic. „Din matematică, chimia nu are nevoie decât de puţin peste regula de trei". Cursul la care făceam seminarul era ţinut de Profesorul *Racliş*, care mă pusese în gardă chiar de la prima întâlnire: „Să nu cumva să încerci să faci demonstraţii, că eşti un om pierdut!" L-am urmărit cu atenţie; enunţurile erau validate prin expresii de tipul „Se vede pe figură că . . ." Figurile erau executate cu crete colorate şi impresionau prin acurateţe. Accentul cădea pe procedee, descompuse în paşi caligrafiaţi şi numerotaţi cu grijă pe tablă. Cred că a fost unul dintre cele mai apreciate cursuri. Nu m-am putut încadra în această conduită şi am părăsit Politehnica, pentru a mă dedica în întregime activităţii mele la Universitatea din Bucureşti, ca asistent al Profesorului *Miron Nicolescu.* De atunci, am urmărit cu atenţie statutul matematicii în învăţământul ingineresc. În urmă cu vreo 20 de ani, în cadrul unor dezbateri pe această temă, se cristalizaseră două puncte de vedere. Pentru unii, ca Profesorul *Dorin Pavel*, gândirea inginerească nu se formează prin matematică iar rolul acordat matematicii la admiterea în Politehnică şi pe parcursul studiilor este exagerat. Nici Profesorul *D. Drimer* nu părea a fi departe de acest punct de vedere. Pentru ei, matematica în inginerie era o simplă unealtă, utilă uneori. Nimic mai mult. Cu o altă ocazie, şi Profesorul *Remus Răduleţ* exprimase o opinie similară. Pentru alţii, ca Profesorul *Radu Voinea* şi Profesorul *Alexandru Balaban*, matematica este pentru inginer şi un mod de gândire exemplar iar prezenţa matematicii la admiterea în Politehnică şi pe parcursul studiilor trebuie întărită.

Matematica, de la unealtă la limbaj

Fizicienii teoreticieni obişnuiesc de multă vreme să considere funcţia de limbaj a matematicii, cu referire la capacitatea acesteia de a da o expresie concentrată şi riguroasă anumitor relaţii. Limbajul matematic este, de la Newton şi Galilei încoace, modul de a fi al unor vaste capitole ale fizicii. Dezvoltarea teoriei ecuaţiilor diferenţiale s-a aflat într-un metabolism permanent cu dezvoltarea fizicii. Ecuaţiile diferenţiale şi cele integrale au devenit modul predominat de exprimare a legilor fizicii. În secolul al XX-lea, ca urmare a dezvoltării teoriei relativităţii şi a mecanicii cuantice, în „jocul“ dintre fizică şi matematică mingea este mereu şi mereu pe terenul matematicii; limbajul matematic nu mai este simţit aici ca rezultat al unei operaţii de traducere a unor situaţii nematematice, rezultând din observaţie şi experiment, ci devine pur şi simplu modul de existenţă al fenomenelor fizice.

Apropierea dintre economie şi matematică are o istorie de câteva secole. În secolul al XX-lea şi mai ales în a doua jumătate a acestuia, limbajul matematic a devenit modalitatea predominantă de exprimare a fenomenelor economice, fapt oglindit de un mare număr de premii Nobel în economie acordate unor lucrări foarte matematizate. Acest fapt nu este străin de apariţia şi dezvoltarea teoriei jocurilor de strategie, având ca protagonişti pe *John von Neumann*, *Oskar Morgenstern* şi *John Nash*.

Un alt domeniu în care matematica a pătruns în mod masiv este biologia. În prima jumătate a secolului al XX-lea a avut loc o utilizare, mai degrabă sub formă de unealtă, a ecuaţiilor diferenţiale, a teoriei probabilităţilor şi statisticii matematice. În a doua jumătate a secolului trecut, studiul sistemului nervos şi al eredităţii a beneficiat de o pătrundere masivă a limbajului matematic, rezultat din dezvoltarea combinată a matematicii, biologiei şi informaticii.

De vreo jumătate de secol, la ingineria energiei, bazată în primul rând pe matematici continue, s-a adăugat ingineria informaţiei, care face apel în primul rând la matematici discrete. Graniţa dintre ştiinţă şi inginerie devine tot mai problematică. De la teza de doctorat a lui *Shannon*, de la sfârşitul anilor '30 ai secolului trecut, logica matematică şi ingineria intră în conexiune directă iar limbajul matematic a devenit esenţial pentru disciplinele informaţiei.

În intimitatea limbajului matematic

De la limbaj i se trage, în primul rând, matematicianului, singurătatea în care se află, deci merită să-i acordăm o atenţie specială.

Există realmente un limbaj matematic, sau este vorba aici de o simplă metaforă? Când se pretinde că *Jean-Jacques Rousseau* s-a servit de limbajul matematic pentru a explica teoria sa asupra guvernării (*Marcel Françon*, „Le langage mathématique de Jean-Jacques Rousseau", Isis 40 (1949), 341-344), despre ce anume este vorba? În primul capitol din cartea a treia a Contractului Social, *Rousseau* îşi propune să studieze diferite tipuri de relaţii şi forţe intermediare implicate în actul guvernării. Pentru a se face mai clar şi mai sugestiv, recurge la o utilizare metaforică a rapoartelor şi proporţiilor din algebra elementară. O metaforă de acelaşi tip avea să fie folosită în urmă cu vreo 30 de ani de *Samuel Huntington*, într-o carte a sa de ştiinţe politice. Sintagma *limbaj matematic* este, de cele mai multe ori, folosită la modul metaforic, pentru a numi o utilizare locală, pasageră, a unei analogii cu un termen sau cu un simbol matematic; alteori, dar la fel de abuziv, se desemnează prin această sintagmă folosirea locală a unei anumite formule, într-un text care, în cea mai mare parte a sa, nu are nimic comun cu matematica.

Dar nici termenul de *limbaj* luat singur nu este mai puţin echivoc. Predomină utilizările sale metaforice sau echivalarea sa cu un sistem arbitrar de semne. În consecinţă, expresii ca *limbajul florilor* sau *limbajul culorilor* rămân fără acoperire, dar acceptate ca metafore. În ce condiţii devine limbaj un anume sistem de semne, iată o problemă foarte controversată, pe care nu o putem discuta aici. Cercetări mai aprofundate au condus la ipoteza general acceptată, conform căreia sistemul de semne folosit în matematică are cele mai multe trăsături ale unui limbaj. Ca orice sistem de semne, un limbaj este dotat cu trei niveluri: sintactic, semantic şi pragmatic. Limbajelor li se mai cere, de obicei, să aibă o structură secvenţială. Această condiţie nu prea este îndeplinită de limbajul matematic, în a cărui ţesătură intervine, după cum a observat *Josh Ard*, o dinamică de tipul montajului vertical la care se referea *Eisenstein* în legătură cu filmul. Dar să vedem din ce anume este alcătuit limbajul matematic.

Componentele limbajului matematic

1) Limbajul natural (predominant în varianta limbii engleze);

2) Elemente ale limbajului natural, folosite ca simboluri artificiale (a, b, c, x, y, A, B, sin, $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$, p etc);

3) Simboluri, altele decât cele de la 2): 0, 1, 2, 3, ..., simbolurile de disjuncţie şi de conjuncţie logică, cele de reuniune, intersecţie şi incluziune relative la mulţimi, simbolul de apartenenţă al lui Peano, simbolul integralei etc.;

4) Expresii, relaţii, formule, ecuaţii etc. formate cu ajutorul entităţilor de la 2) şi 3);

5) Reprezentări pictoriale discrete (grafuri, matrici, diagrame etc);

6) Reprezentări pictoriale continue (curbe, suprafeţe etc);

7) Programe de calculator;

8) Metasisteme simbolice, cum ar fi limbajul programabil de printare TEX(după grecescul techné, asociat cu latinescul texere) şi cu derivatele sale, ca AmsTEX şi LATEX, care, sub forma unor comenzi, reglementează tipărirea textelor matematice;

9) Componenta orală a matematicii.

Câteva observaţii sunt necesare. Componenta semnalată la 1 este cea mai importantă, deoarece limbajul natural direcţionează întregul comportament al limbajului matematic. Gândim prin intermediul limbajului natural, chiar atunci când ne prevalăm de celelalte componente. Se preconizează, ca o medie, un echilibru prin care jumătate dintr-un text matematic rămâne scris în limbaj natural. Nu trebuie confundat limbajul matematic cu limbajul axiomatic deductiv sau cu cel formalizat. Matematica nu este şi (ştim acum) nu poate fi în întregime formalizată. Este uimitor felul în care toate aceste imperative de igienă a educaţiei sunt ignorate în matematica şcolară, în diferitele ei variante: manuale, predare la clasă, reviste pentru elevi, examene, concursuri. Reducem educaţia la aspectul ei sintactic, ignorând dimensiunea ei semantică. Dar semnificaţiile se exprimă în cuvinte, pentru a le înţelege şi exprima trebuie să construieşti un discurs. Este exact ceea ce şcoala nu reuşeşte. Acest eşec se transmite de la şcoală la universitate şi de la universitate în cercetare; modul în care ideile matematice sunt asimilate şi utilizate este profund afectat de această înţelegere fragmentară a lor.

Prezenţa componentelor 2, 3 şi 4 arată că limbajul matematic are o structură mixtă, fiind alcătuit dintr-o componentă naturală şi alta artificială. Ştim acum că în componenta artificială se regăsesc toate funcţiile componentei naturale: metaforă, metonimie, ambiguitate, relaţii de coordonare şi de subordonare etc. Ca urmare a prezenţei componentelor 4, 5 şi 6, limbajul matematic devine bidimensional şi, uneori, tridimensional. O liniarizare forţată răpeşte matematicii din forţa sa euristică şi sugestivă. Să mai observăm că limbajul matematic se prevalează atât de reprezentări discrete cât şi de reprezentări continue. Fiind un limbaj scris, el este esenţial vizual.

Componenta 9 are în vedere prezentarea orală a matematicii, care are alte reguli decât cea scrisă; nu dezvoltarea detaliilor, ci sublinierea ideilor, a contextului cultural-istoric, a cotiturilor periculoase. Prezentarea orală atenuează liniaritatea discursului scris, prin distribuirea mai nuanţată a accentelor. Dar, după cum observa *Dan Barbilian*, un rezultat matematic nu se poate valida decât pe baza formei sale scrise.

Funcţiile limbajului matematic

Putem acum să contemplăm, în toată splendoarea sa, această cucerire a spiritului uman care se numeşte limbajul matematic. Acest limbaj exploatează sinonimia sa infinită. Orice enunţ se poate reformula într-un mod echivalent. Demonstraţiile se bazează pe această parafrazare potenţial infinită a ipotezelor, proces care duce, după un număr finit de paşi, la concluzia dorită. În această activitate, sunt folosite deopotrivă relaţii anaforice şi cataforice. Este manifestă tendinţa de reducere a fenomenelor de omonimie, dar nu se poate ajunge la anihilarea lor totală. Caracterul esenţial metaforic al limbajului matematic provine în primul rând din procesele de generalizare. De exemplu, trecerea de la numere raţionale la cele iraţionale, în cazul de referinţă al evaluării lungimii diagonalei unui pătrat cu latura egală cu unitatea, s-a bazat pe căutarea unui număr care să se afle faţă de 2 într-o relaţie similară celeia în care se află n faţă de pătratul lui n. Procesul metaforic se referă aici nu la o entitate preexistentă, ci la una care se construieşte prin emergenţa procesului respectiv. Este deci vorba de metafore autoreferenţiale. Metafora declanşată de *Pitagora*, în legătură cu diagonala pătratului unitate, a avut nevoie de 2000 de ani pentru a conduce la conceptul de număr real şi, în cadrul acestuia, la conceptul de număr iraţional. Mai sunt apoi metaforele care sugerează o legătură cu lumea contingentă: frontieră, filtru, număr raţional, număr transcendent etc.

Metonimia ţine şi ea de natura intimă a matematicii. O problemă esenţială este citirea proprietăţilor unei mulţimi pe o parte cât mai restrânsă a ei. Cele mai multe numere reale sunt reprezentate printr-o parte finită a lor, deoarece nu cunoaştem reprezentarea lor esenţial infinită şi neperiodică. În afară de relaţia întreg-parte, este foarte importantă relaţia de contiguitate determinată de inferenţe de diverse tipuri: inducţii, deducţii şi abducţii.

Semantica limbajului matematic este, ca şi aceea a limbajului comun, de două feluri: aditivă (când semnificaţia întregii expresii se obţine prin concatenarea semnificaţiilor componentelor) şi integrativă (când semnificaţia întregii expresii este diferită de semnificaţia obţinută prin concatenarea semnificaţiilor componentelor). Un exemplu de al doilea tip este obţinut prin plasarea semnului integralei în faţa expresiei $f(x)\mathrm{d}x$. În acest caz, $\mathrm{d}x$ nu mai înseamnă diferenţiala lui x iar alăturarea dintre $f(x)$ şi $\mathrm{d}x$ nu are semnificaţia de produs. Dar notaţia se explică prin dorinţa păstrării analogiei cu sumele din care provine respectiva integrală, printr-un proces de trecere la limită.

Limbajul matematic realizează de multe ori un proces de optimizare semiotică, asemănător celui poetic. Este suficient să ne referim la cazul simplu al puterii a n-a a unui binom $a + b$. Putem exprima în cuvinte această putere pentru valori mici ale lui n, dar, de îndată ce valoarea lui n creşte, pierdem controlul. Simbolismul matematic ne salvează.

Narativitate şi dramatism în demonstraţia matematică

Dimensiunea narativă a limbajului matematic este vizibilă în itinerarele de cursă lungă, de tipul demonstraţiilor maratonice care au condus la validarea teoremei celor patru culori, a teoremei lui *Fermat*, a conjecturii lui *Kepler* etc. *André Gide* compara romanul cu o teoremă, dar teorema se poate afla uneori la capătul unei aventuri în care apar momente cu adevărat dramatice. De exemplu, teorema de clasificare a grupurilor simple finite, cu sute de autori, s-a aflat într-o astfel de situaţie atunci când, în urmă cu peste zece ani, murise singurul care ştia cum să articuleze într-un întreg rezultatele parţiale ale diverşilor autori. Demonstraţiile cu ajutorul programelor de calculator ridică probleme delicate, privind controlul acestor programe. Imposibilitatea de a obţine certitudinea adevărului anumitor teoreme este de un dramatism pe care timp de două mii de ani nimeni nu l-a crezut posibil. Semnificativ din acest punct de vedere este textul cu care redacţia revistei Annals of Mathematics prefaţează publicarea demonstraţiei conjecturii lui *Kepler*, publicare aprobată în ciuda faptului că referenţii nu au putut ajunge la validarea cu certitudine a demonstraţiei conjecturii respective.

Urmărirea greşelilor comise în încercările de demonstrare a unei ipoteze importante ne permite să înţelegem cum anume o greşeală poate deveni o sursă de creativitate. Şirul de greşeli comise în încercările succesive de demonstrare a teoremei lui Fermat este unul dintre cele mai frapante exemple de acest fel. Chiar autorul demonstraţiei acestei teoreme a comis, în prima sa tentativă, o greşeală, pe care a îndepărtat-o ulterior. O greşeală locală a lui *Lebesgue*, într-un celebru memoriu al său, l-a condus, pe cel care a descoperit-o, la deschiderea unui nou capitol de topologie, teoria mulţimilor analitice şi proiective.

Teatralitatea limbajului matematic

Cuvântul *teorema* are, după etimologia sa greacă, semnificaţia de spectacol. După exemplele date mai sus, înţelegem că drumul spre o teoremă poate fi într-adevăr un spectacol. Acest drum abundă în capcane şi este nevoie de multe ori de efortul câtorva generaţii de temerari care să le înfrunte, pentru a se ajunge la un rezultat; alteori nici câteva generaţii nu sunt suficiente. Contrastul dintre caracterul foarte elementar al unor enunţuri, cum ar fi conjectura lui *Goldbach* (orice număr par superior lui 2 este suma a două numere prime), şi dificultatea de a le demonstra sau infirma, chiar atunci când se pun în mişcare rezultate şi instrumente dintre cele mai fine, îi poate scandaliza pe matematicieni, dar, în acelaşi timp, îi stimulează şi îi ambiţionează în a-şi multiplica eforturile în direcţia respectivă.

În cartea lor „*What is Mathematics*?" (Oxford University Press, London, 1941-1946), *Richard Courant* şi *Herbert Robbins* se referă la natura teatrală a analizei matematice. În definirea noţiunilor de bază, ca limita unui şir, convergenţa sa, limita, continuitatea, derivabilitatea şi integrabilitatea unei funcţii etc., întâlnim mereu acelaşi scenariu: două personaje, A şi B, primul punându-l mereu la încercare pe al doilea. În cazul convergenţei şirurilor, A propune o valoare strict pozitivă a lui epsilon iar B trebuie să stabilească dacă există un număr natural N astfel încât, pentru m şi n mai mari decât N, o anumită inegalitate, incluzând pe epsilon, pe m şi pe n, este satisfăcută. Însă B trebuie să facă faţă acestui test oricare ar fi valoarea strict pozitivă a lui epsilon; nu este, ca în basmul popular, unde eroul trebuie să facă faţă, de obicei, la trei încercări.

Matematica, tragedia şi comedia, la vechii greci

Tragedia se asociază cu fenomenele de hybris şi nemesis. Hybris-ul este eroarea tragică, ce-l duce pe erou la moarte, după ce a ignorat avertismentul zeilor. Pentru *Scott Buchanan* („Poetry and Mathematics", The John Day Company, New York, 1929, p.175-197), hybris-ul este atitudinea de aroganţă sau de insolenţă a unei naturi oarbe. Nemesis-ul este rezultatul acestei aroganţe: faptele se răzbună pe cel care le-a ignorat. Dar, un personaj tragic trebuie nu numai să păcătuiască prin hybris, ci şi să aibă darul ironiei. „Tragedia procedează prin analogie şi prin substituţie omogenă în gândirea raţională a eroului. Evenimentele sunt pregătite, controlate şi interpretate, în aşa fel încât să fie în concordanţă cu ipoteza. Are loc o dezvoltare care tinde spre integrare şi generalitate".

În matematică, lucrurile decurg în mod asemănător. Comportamentul unei funcţii este tatonat prin observarea valorilor funcţiei atunci când se dau anumite valori particulare argumentului. Grecii foloseau acest procedeu pentru a identifica ceea ce ulterior avea să se numească „valorile limită ale funcţiei"; pe această cale, ei rezolvau unele ecuaţii. O atare metodă avea să capete o formă riguroasă abia cu dezvoltarea calculului diferenţial, mai precis, prin noţiunea de dezvoltare în serie *Taylor* a unei funcţii, cu ajutorul derivatelor ei succesive.

În cazul comediei, situaţia este diferită. Îl cităm pe *Scott Buchanan*: „Aici se procedează prin variaţie foarte largă şi prin substituţie heterogenă. Fiecare schimbare de direcţie a acţiunii marchează descoperirea unei inconsistenţe, a unui plan care nu funcţionează, a unei situaţii paradoxale. Şi aici avem o dezvoltare, dar în faza de discriminare a capacităţii de a opera distincţii. Eroul unei comedii sau este capabil de a sesiza orice glumă, orice vorbă de spirit, sau nu-i în stare să înţeleagă niciuna. În acest fel, toate ideile pot avea o şansă egală de conflict sau de purificare. Comedia de moravuri se bazează pe substituţia de idei".

Dependenţa de contexte lungi

Fenomenele de textualitate, de intertextualitate şi de hipertextualitate, în linia de gândire a unor *M. Bakhtin*, *J. Kristeva* şi a celor care, prin hipertextualitate, au transgresat secvenţialitatea textului tradiţional, sunt la ele acasă în matematică. Într-adevăr, într-un text matematic se manifestă, mai mult decât în orice alt text, fenomenele de dependenţă la distanţă. Suprimaţi dintr-o carte de matematică primele zece pagini şi riscaţi să nu mai înţelegeţi aproape nimic din rest. O operaţie similară într-o carte de geografie sau de istorie are un efect neglijabil. Faptul se explică prin structura textelor matematice; prin construcţia în etape, în care fiecare etapă se bazează în mod riguros şi explicit pe etapele anterioare. Desigur, în orice demers procedăm în etape care se folosesc de etapele precedente, dar de cele mai multe ori acest lucru se face prin reamintirea faptelor anterioare care urmează a fi utilizate. În matematică, preluarea noţiunilor, convenţiilor şi rezultatelor anterioare are o asemenea amploare, încât reluarea lor, de fiecare dată când ele sunt invocate, ar pune la grea încercare atenţia şi memoria şi ar sabota funcţia euristică a limbajului. Achiziţiile etapelor anterioare trebuie ordonate cu grijă, aşa cum se procedează într-o locuinţă, prin gruparea diferitelor obiecte în dulapuri, sertare, cutii diferite. În matematică, această ordonare impune folosirea unei anumite terminologii şi a unui anumit simbolism, prin care desemnăm noile noţiuni şi entităţi, în vederea folosirii lor cât mai comode în etapele următoare. Astfel emerge componenta artificială a limbajului matematic. Sub aspect istoric, acest fenomen s-a accentuat pe vremea lui *Galilei* şi a lui *Newton*, accelerându-se apoi şi atingând apogeul în secolul trecut.

La fel în poezie, dar din cu totul alt motiv

Să precizăm că dependenţa de contexte mari, practic, de întregul text, are loc în ambele direcţii, deci atât la stânga cât şi la dreapta. Aşa cum un element al textului depinde strict, chiar dacă indirect, de întreaga desfăşurare anterioară a textului respectiv, acelaşi element va fi invocat, direct sau indirect, în întreaga desfăşurare ulterioară a textului. Limbajul matematic este deci, prin excelenţă, un teritoriu de desfăşurare permanentă a relaţiilor anaforice şi cataforice.

Este interesant faptul că şi în poezie localul este solidar cu globalul, se vorbeşte chiar despre modul în care o serie de metafore locale se acumulează, producând o metaforă globală. Dar această dependenţă nu are, în poezie, caracterul precis şi explicit pe care îl are în matematică. Legătura dintre local şi global este, în poezie, o operaţie ambiguă, interpretabilă într-o infinitate de feluri; ea ţine deci de actul lecturii şi al interpretării, aparţine cititorului. Semnificaţiile în matematică au un statut conceptual iar conceptele sunt susceptibile de definiţii. Acest fapt le distinge de semnificaţiile poetice, care manifestă o tendinţă anticonceptuală. Poezia încearcă să recupereze cu ajutorul contextului ceea ce pierde în materie de dicţionar. De aceea ea are nevoie de contexte practic infinite, regăsind astfel, pe o cale complet diferită, o situaţie valabilă şi în matematică.

Este matematica exclusiv conceptuală?

Numai că, în practică, se constată că semnificaţiile matematice nu sunt epuizate de definiţiile lor de dicţionar; comportamentul lor contextual rezervă surprize. Faptul acesta este valabil chiar în matematica elementară. Încercaţi să-l înţelegeţi pe *zero* numai pe baza definiţiei sale şi veţi eşua. În legătură cu capcanele acestui număr, considerat uneori, în mod abuziv, număr natural, a se vedea cartea lui *Charles Seife*, tradusă recent în româneşte: *Zero. Biografia unei idei periculoase* (Humanitas, 2007). Multe semnificaţii din matematică şi din lingvistică (a se vedea sistemele formale, gramaticile generative şi diferite tipuri de maşini) se introduc nu prin definiţii de tip clasic (gen proxim şi diferenţă specifică), ci prin comportamentul lor într-un anumit proces, comportament de natură contextuală. Această interacţiune textuală este un fel de dialog, de aceea *Bakhtin* a folosit expresia de principiu dialogic.

Polifonia textului matematic

Textul matematic este, pe de altă parte, prin excelenţă polifonic (pentru a folosi termenul propus de *Bakhtin*). Aşa cum în muzică se suprapun două sau mai multe părţi vocale sau instrumentale, dezvoltându-se orizontal (prin contrapunct) şi vertical (prin armonie), într-un text matematic are loc o colaborare a unor coduri de o mare varietate, date de multiplicitatea componentelor şi funcţiilor sale, unele cu accent pe secvenţialitate, altele bazate pe transgresarea ei; unele metaforice, altele metonimice; unele continue, altele discrete; unele vizuale, altele sonore. În această ordine de idei, *Igor Shafarevich* asimilează matematica unei orchestre care execută o partitură unică, a nu se ştie cui; unii membri ai orchestrei dispar, fiind înlocuiţi cu alţii, dar motivele trec de la unii la alţii iar execuţia nu se încheie niciodată. Cu referire la acelaşi aspect al multiplicităţii de coduri puse în mişcare, a fost preluată, în cazul limbajului matematic, ideea cinematografică a lui *Eisenstein* privind montajul vertical. În ambele cazuri, are loc o articulare de elemente indexicale, iconice şi convenţionale, având ca rezultat reliefarea unei teme unice.

Lumea numerelor, într-un grav impas semiotic

Cele mai multe numere reale nu pot fi numite prin mijloace finite. Uneori pot fi arătate, indicate, de exemplu pe cele care sunt limite ale unor şiruri despre care se ştie că sunt convergente sau, în general, pe cele care apar ca rezultat al diferitelor comportamente asimptotice. Celor mai multe numere reale nu le ştim nici reprezentarea zecimală, nici reprezentarea în fracţie continuă. Trăiesc în devălmăşie, parcă lipite unul de altul. Cele mai multe informaţii despre numere sunt de natură globală, nu individuală. Dificultatea cu care au putut fi găsite, abia în anul 1844, primele exemple de numere transcendente (*Joseph Liouville*) a dat impresia că astfel de numere sunt rare. Dar *G. Cantor* a spulberat această impresie. S-a constatat în general, că lumea numerelor inteligibile este incomparabil mai vastă decât aceea a numerelor care rezultă prin procese cu un număr finit de etape, aplicate numerelor întregi. Dar sensul cuvintelor „cele mai multe“ în aprecierile de mai sus nu este cel trivial, de majoritate numerică, deoarece avem a face cu mulţimi infinite. Neglijabilul este aici în sensul cardinalităţii: numerele algebrice formează o mulţime numărabilă.

Culorile urmează îndeaproape situaţia semiotică a numerelor. În orice limbă naturală, cele mai multe culori nu au nume. Dar, în contrast cu numerele, culorile beneficiază de anumite relaţii de analogie şi de contiguitate, putând lua numele obiectelor care au culoarea respectivă: cărămiziu, portocaliu, muştar etc. Desigur, acest procedeu nu rezolvă decât o mică parte a problemei. Curcubeul comportă o infinitate de culori, cele mai multe dintre ele neputând fi numite. Pe de altă parte, problema semiotică a culorilor este reductibilă la aceea a numerelor. Vopselele au coduri combinate de litere şi cifre. Numerele reale sunt, în general, cunoscute prin valori aproximative, deci prin procese metonimice.

Între numărare şi numerotare

Disocierea, în franceză, între *nombre* şi *numéro*; în germană, între *Zahl* şi *Nummer*; în rusă, între *cislo* şi *nomer*, nu-şi are analogul în română, italiană, spaniolă, portugheză şi engleză. *Nombre* din *nombre premier* şi *numéro* din *numéro de sécurité sociale*) revin, în limba română, la acelaşi cuvânt: *număr*. Limba română face însă distincţia dintre *a număra* şi *a numerota*.

Paradoxul lui *Berry* se referă la *nombre*; paradoxul lui *Richard* se referă la *numéros*; numeraţia *Gödel* se referă la amândouă.

Este matematica numai un limbaj?

Limbajul este partea cea mai vizibilă a matematicii, partea care o trădează, stârnind admiraţia unora şi repulsia altora. Rareori se întâmplă ca matematica să fie privită cu indiferenţă; atitudinea neutră faţă de ea este mult mai puţin frecventă decât atitudinea extremă, într-un sens sau altul. Datele de care dispunem arată că detractorii sunt incomparabil mai mulţi decât admiratorii. Anchetele sociologice, semnalele din mass media, declaraţiile elevilor şi profesorilor confirmă antipatia celor mai mulţi pentru formule matematice, pentru ecuaţii, pentru calcule. Uşurinţa de a recunoaşte jargonul matematicii contrastează cu dificultatea de a defini matematica, dificultate cu nimic inferioară celeia privind definirea poeziei sau a filozofiei. Putem însă identifica diferite ipostaze, diferite aspecte ale matematicii:

a) domeniu de cunoaştere şi cercetare;
b) fenomen de cultură;
c) ştiinţă;
d) artă;
e) unealtă utilă în anumite situaţii;
f) limbaj;
g) mod de gândire;
h) catalizator al unor transferuri de idei, metode şi rezultate;
i) disciplină predată în şcoli şi universităţi;
j) fenomen social;
k) joc;
m) modă;
n) mijloc de intimidare şi chiar de terorizare;
o) formă de snobism;
p) posibilă formă de patologie;
q) mod de a înţelege lumea;
r) mod de viaţă;

s) mod de a înţelege propria noastră minte;
t) parte a vieţii noastre spirituale;
u) filozofie.
Ordinea nu este după importanţă. Lista este deschisă.

Fiecare dintre aspectele de mai sus comportă o întreagă discuţie. Îngrijorător este faptul că aspectul i, al matematicii ca disciplină de învăţământ, este aproape în întregime confiscat, la nivel şcolar, de aspectul e, care vizează partea instrumentală a matematicii, iar la nivel universitar apar, în plus, aspectele a (cunoaştere şi cercetare), c (ştiinţă) şi f (limbaj). Dar chiar şi acestea sunt de obicei considerabil sărăcite; de exemplu, rareori se întâmplă ca predarea matematicii să dezvăluie întreaga bogăţie a aspectelor de limbaj, aşa cum apar ele în multiplicitatea de componente şi de funcţii pe care le-am discutat anterior, în interacţiunea componentei naturale cu cea artificială, a secvenţialului cu polidimensionalul, a discretului cu continuul. Desigur, în măsura în care participanţii la procesul didactic sunt de o calitate superioară, pot apărea şi celelalte aspecte. Fapt este că manualele standard după care matematica este predată şi învăţată şi, mai ales, criteriile după care asimilarea ei este evaluată o transformă într-o palidă imagine a ceea ce este ea în realitate.

Eşecul educaţiei matematice

Recunoscută ca unealtă uneori utilă, matematica era încă departe de a fi şi un fapt de cultură. Ciocanul este şi el o unealtă utilă; devine, prin aceasta, cultură? Educaţia primită în şcoală şi, uneori, şi cea de la facultate nu prea lasă să se vadă că în matematică există şi idei, istorie, conflicte, interacţiuni cu alte discipline, dileme privind formarea conceptelor şi alegerea problemelor. Din variatele moduri de gândire matematică (inductivă, deductivă, abductivă, triadică, binară, analogică, metaforică, ipotetică, infinită, combinatorică, probabilistă, recursivă, topologică, algoritmică, imaginativă etc.), înzestrate cu puterea de a funcţiona şi în afara matematicii, practic având o rază universală de acţiune, şcoala nu se raportează decât la deducţie şi la combinare, uitând că modalitatea deductivă este numai haina în care matematica se prezintă în lume, nu şi substanţa ei. Metabolismul matematicii cu celelalte discipline şcolare este foarte slab. Aşa se ajunge la situaţia actuală, în care elevi şi părinţi protestează împotriva prezenţei matematicii în programele şcolare ale unor elevi care nu-şi propun să devină matematicieni. Intelectualii ajunşi la vârsta evocărilor nostalgice au rareori amintiri semnificative despre orele de matematică. Dacă acceptăm drept cultură ceea ce îţi rămâne după ce ai uitat tot, atunci trebuie să recunoaştem o realitate crudă: cei mai mulţi oameni nu se aleg aproape cu nimic din matematica şcolară. Destui rămân marcaţi pe viaţă de spaima examenelor de matematică. Dar dacă mergem la sursa acestei situaţii, atunci vom identifica o complicitate, e drept, neintenţionată, între matematicieni, factorii de putere din societate şi birocraţia învăţământului. Este educaţia matematică, prin natura ei, destinată unei elite? Sunt mulţi cei care dau un răspuns afirmativ acestei întrebări. Nu mă număr printre ei. Fapt este că se ajunge la ceea ce francezii numesc „mathématiques, récettes de cuisine“ iar americanii, în mod similar, „cook book mathematics“. Din această „monstruoasă coaliţie“ rezultă caricatura de educaţie matematică pe care încercăm s-o depăşim.

Mărturia din 1914 a lui Gheorghe Ţiţeica

Am căutat departe, în trecut, rădăcinile acestei situaţii. L-am evocat, în această privinţă, pe revizorul şcolar *Eminescu.* Câteva decenii mai târziu, iată cum începe discursul de recepţie al lui *Gheorghe Ţiţeica* la Academia Română, la 29 mai 1914: „Mă găsesc printre d-voastră ca reprezentantul unei ştiinţe pe care, cei mai mulţi, o socotesc mohorâtă, pentru care lumea are o deosebită groază, faţă de care chiar respectul unora nu e lipsit de un fior care ţine pe om la depărtare; în scurt, reprezint o ştiinţă puţin simpatică: matematica". Faţă de singurătatea în care se afla *Ţiţeica* în urmă cu aproape o sută de ani, s-a schimbat ceva esenţial în starea de singurătate a matematicianului? S-a schimbat, da, în sensul agravării situaţiei, ca urmare a faptului că limbajul matematic a devenit tot mai complicat şi , vorba filozofului francez *Michel Henry*, constituie o formă de barbarie („La Barbarie", Grasset, Paris, 1987), căpătând un caracter antiuman. Se ralia astfel filozofului englez *George Steiner*, care în „*Language and silence*" (Atheneum, New York, 1967) pleda pentru un punct de vedere similar. *Ţiţeica* merge mai departe şi, parcă anticipând reproşul care avea să fie adus matematicii şi care fusese adus ştiinţei încă din secolul al XIX-lea, de a fi fără patrie, îşi continuă discursul în modul următor:

„Ştiinţa matematică nu e legată de niciunul din resorturile noastre sufleteşti care s-o facă iubită. Istoria, cu scrutarea şi reînvierea trecutului, literatura, cu bogăţia de închipuire şi strălucirea de expresii, geologia, chimia, biologia cu problemele lor de interes practic şi naţional n-au nevoie să-şi dovedească foloasele. Fiecare din reprezentanţii lor aici înfăţişează câte o bogăţie a ţării: bogăţie de gândire, bogăţie de simţire, bogăţie de energii. Singură matematica nu are şi nici nu poate avea o însemnătate naţională".

Ţiţeica îl evocă şi pe *Schopenhauer*, a cărui părere nu prea favorabilă despre matematică şi despre matematicieni este binecunoscută.

Ţiţeica în rol de inculpat?

Cu această stare de spirit, *Ţiţeica* aproape că adoptă rolul de inculpat care trebuie să se apere în faţa tribunalului academic împotriva acuzaţiei de parazitism social. O face, aducând probe în sensul că „astăzi se poate dovedi cu argumente hotărâtoare că ştiinţa matematică nu e cu totul nefolositoare". Urmează exemple din ştiinţa galileo-newtoniană; dar rămâne modest în ceea ce priveşte statutul matematicii: „Matematica este, astfel, nu numai o limbă precisă, de exprimare simplă, dar şi o unealtă de cercetare; ... matematica este cea mai perfectă limbă în care se poate povesti un fenomen natural".

Iată în ce situaţie umilitoare s-a putut afla unul din marile spirite ale acestei ţări, într-o societate victimă a propriului ei eşec în domeniul educaţional. Sunt aproape o sută ani de atunci şi, iată, statutul social al matematicii rămâne la fel de contradictoriu. Desigur, veţi spune, *Ţiţeica* era foarte respectat iar postura de inculpat în care s-a plasat era efectul unui anumit scenariu pe care şi-a bazat discursul de recepţie. Numai că respectul de care beneficiază matematicienii nu este atât expresia înţelegerii semnificaţiei şi valorii culturale a profesiei lor, cât a consideraţiei faţă de un lucru bănuit a presupune un efort intelectual major, din moment ce rămâne pentru cei mai mulţi neînţeles. Numai că acest fel de respect poate oricând aluneca în suspiciune şi neîncredere.

Mihai Ralea acuză psihologia matematică

Într-o convorbire cu *Grigore Moisil*, la Senatul Universităţii din Bucureşti, *Iorgu Iordan* reproşa două lucruri matematicienilor: că se laudă prea mult între ei şi că nimeni nu înţelege ce fac ei. Dar, de la suspiciune la contestare nu-i decât un pas; în 1954, o personalitate de subtilitatea lui *Mihai Ralea* acuza psihologia matematică, aflată la primii ei paşi în S.U.A., de a fi „un refugiu pentru concepţiile idealiste în psihologie". Iată cum de la o atitudine aparent inocentă se poate ajunge la respingerea unui întreg capitol al ştiinţei, cu un impact major în disciplinele cognitive actuale; un capitol în care şcoala românească de teoria probabilităţilor, de la *Onicescu* şi *Mihoc* la *Marius Iosifescu* şi *Radu Theodorescu*, s-a afirmat în mod exemplar.

Matematica, mijloc de manipulare a maselor, a fost şi rămâne un slogan scos din când în când la suprafaţă, uneori cu scopuri ideologice, alteori din adversitate faţă de cultura ştiinţifică şi tehnologică, de care matematica este în mod tradiţional lipită.

Spre domeniul lingvisticii computaţionale

Instinctiv, izolarea intelectuală şi socială a matematicii, atât de ferm exprimată de *Ţiţeica* în 1914, am simţit-o tot timpul şi a fost pentru mine un impuls de a o compensa prin extinderea razei mele de acţiune. Încă din anii '50 primisem un avertisment: alianţa dintre matematică şi lingvistică era, sub aspect istoric, asociată cu emergenţa calculatoarelor electronice, a informaticii şi a nevoii sociale privind mărirea eficienţei în procesarea limbajului natural. De la revistele de matematică şi de lingvistică treceam treptat la cele de cibernetică şi de informatică. În 1963, publicam la Moscova, în *Problemy Kibernetiki* un articol de modelare matematică a unor fenomene morfologice; în aceeaşi perioadă, publicam un articol despre proiectivitatea sintactică în revista *Computational Linguistics* iniţiată de *Ferenc Kiefer* la Budapesta; această revistă a avut o viaţă scurtă, dar a fost una dintre primele cu acest profil. În 1967, prezentam la Grenoble o comunicare invitată la *A doua Conferinţă Internaţională privind procesarea automată a limbilor*, iar doi ani mai târziu eram invitat la Stockholm, de către *Hans Karlgren* (*Research Group for Quantitative Linguistics*) la ceea ce el a numit *International Conference on Computational Linguistics*. Era de fapt continuarea celeia de la Grenoble, dar inaugura denumirea de Computational Linguistics, care avea să facă istorie; ea avea să se impună, rezistând până în zilele noatre. Observaţi folosirea alternativă a epitetelor *quantitative* şi *computational*, simptomatică pentru acel moment încă derutant al lansării unor noi arii de investigaţie.

De la limbajul natural la cel formal, apoi înapoi la cel natural

Comunicarea mea din Suedia se intitula *Contextual grammars*. În 2009, se vor împlini 40 de ani de la prezentarea acestui nou tip de gramatici, care ocupă acum o literatură destul de vastă. Cele mai multe contribuţii se înscriu în domeniul informaticii teoretice, la capitolul de teoria limbajelor formale, dar în ultimii zece ani s-au cristalizat variante de gramatici contextuale cu impact în domeniul lingvisticii computaţionale, cum se poate vedea în articolele publicate în *Computational Linguistics* (1998) şi *Linguistics and Philosophy* (2001), două dintre cele mai prestigioase reviste în materie. Pe unii îi miră poate denumirea acestei din urmă reviste. Dar, aşa cum observa *Moisil*, nici filozofia nu mai este azi ceea ce a fost ea altă dată; drumul de la filozofie la inginerie nu mai are nevoie de intermediari. S-a scurtat şi drumul de la ştiinţă la inginerie. Graniţele considerate până mai ieri de netrecut sunt azi sub semnul întrebării. În 1997, *Gheorghe Păun* a publicat la Kluwer monografia de sinteză *Marcus Contextual Grammars*, dar după publicarea ei s-a acumulat o literatură atât de vastă în această direcţie, încât acum ar fi nevoie de o nouă sinteză.

Iată cum o idee născută din nevoia de a da o variantă generativă unor procedee analitice folosite în lingvistica descriptivă americană se întoarce acum la studiul limbajului natural, în perspectivă matematică şi computaţională, după un itinerar de câteva decenii în informatica teoretică.

O nouă provocare: poetica matematică

Câteva întâmplări, spre mijlocul anilor '60 ai secolului trecut, m-au condus la problemele de *poetică matematică*, o altă sintagmă aparent oximoronică, expresie a unui alt proiect aparent utopic. Caietele mele de note de lectură şi de însemnări personale erau de mai mulţi ani foarte bogate la acest capitol, dar nu se vedea modul de a organiza puzderia de observaţii disparate. Au intervenit însă, prin anii 1963-1965, trei evenimente care m-au ajutat să dau expresie frământărilor mele.

Mai întâi, dintr-un articol amplu publicat în Le Monde am aflat despre moartea lui *Matila C. Ghyka*, român stabilit în Occident, eminent cercetător al ritmului şi al aspectelor matematice ale artei, autor a două volume consacrate numărului de aur în biologie şi în artele vizuale. Am aflat deci despre o personalitate atât de puternică exact atunci când ea a murit. Apoi, cam în aceeaşi perioadă, Profesorul *Constantin Drâmbă* mă invita la biroul său de la Observatorul Astronomic, pentru a-mi arăta nişte documente. Aşa am aflat despre *Pius Servien* (fiul astronomului *Nicolae Coculescu*), ale cărui cărţi publicate la Paris în anii treizeci ai secolului trecut au contribuit, concomitent cu cele ale lui *Ghyka*, la naşterea esteticii matematice, ale cărei baze le pusese *George D. Birkhoff* cu câţiva ani mai devreme. În sfârşit, parcă în complicitate cu celelalte două întâmplări, Profesorul *Octav Onicescu* mă invita să studiez relevanţa poetică a noţiunii de energie informaţională, pe care tocmai o introdusese într-un articol din Comptes Rendus de L'Académie des Sciences (Paris). Contactul cu opera lui *Birkhoff*, *Ghyka* şi *Servien* a fost decisiv. Am reacţionat imediat la mesajul lor şi am simţit nevoia de a-l duce mai departe. Aveam impresia că-i purtam de mult în mine şi că a sosit momentul de a intra în scenă şi a-mi juca rolul. Notorietatea de care beneficiam de pe urma *lingvisticii matematice* m-a ajutat să-mi plasez uşor ideile privind contrastul dintre limbajul ştiinţific şi cel liric. *Roland Barthes* îmi ceruse o colaborare pe această temă, pentru un număr special din revista Langages, pe care-l edita la Paris.

Putem măsura frumuseţea? Pariul lui Birkhoff, Escher şi Coxeter

În 1970, public *Poetica matematică*. De această dată, „scandalul“ l-a întrecut pe cel anterior, de la apariţia *Lingvisticii matematice*, fapt firesc, deoarece poetica este mult mai populară decât lingvistica. Acest experiment în testarea reacţiilor faţă de o posibilă relevanţă a matematicii în teritorii ale artei a arătat unde anume este principala rezistenţă: matematicii i se recunoaşte capacitatea de a aprofunda structurile prozodice ale versului, aspectele structurale, formale ale figurilor retorice, aspectele tipologice ale narativităţii, tipurile de geometrie teatrală, dar i se refuză o eventuală pretenţie de a facilita accesul la inefabilul poetic sau de a furniza criterii de evaluare a calităţii artistice a unui poem. Dar *G. D. Birkhoff* tocmai acest lucru îl preconiza: un mod matematic de a aprecia plăcerea estetică pe care o generează un obiect. El porneşte de la figuri geometrice dintre cele mai simple şi de la piese muzicale dintre cele mai simple şi propune procedee de apreciere a gradului lor O de ordine şi a gradului lor C de complexitate. Apoi lansează ipoteza conform căreia plăcerea estetică produsă de obiectele respective ar fi proporţională cu O şi invers proporţională cu C. Ideile sale au fost suficient de provocatoare pentru a constitui obiectul unei prezentări invitate la Congresul Internaţional al Matematicienilor, din 1928. Experimentul şi ipoteza lui *Birkhoff* trebuie înţelese ca o lucrare de laborator privind psihologia creaţiei artistice. Ulterior, ideile sale aveau să fie exprimate şi discutate în termeni de teoria matematică a informaţiei, în cadrul şcolii germane a lui *Max Bense*. Pe de altă parte, tentativa de a aprecia comparativ valoarea estetică reapare în creaţia lui *M.C. Escher*, în cadrul colaborării sale cu geometrul *H.S.M. Coxeter*, criteriile fiind şi aici bazate pe ordine şi pe complexitate.

De la respingere fermă la entuziasm debordant

Era inevitabil ca din toată această poveste să izbucnească un mare scandal. Ceea ce la autorii de mai sus are un caracter ipotetic, de experiment local, capătă în ochii unora proporţiile unei blasfemii. Era respinsă tentativa de „a pune arta în ecuaţii şi în formule“; la aceasta se reducea, pentru unii, acţiunea de a da un sens sintagmei *poetica matematică*. Dar, ar fi nedrept să omitem faptul că destule spirite luminate din domeniul umanist au reacţionat într-un mod nuanţat şi, de multe ori, interesant. În cele câteva zeci de recenzii ale cărţii mele, aprecierile au mers de la negare fermă, dar cu argumente trimiţând la autorii latini – din partea specialistului în retorică *Vasile Florescu*, până la entuziasmul debordant al lui *Jean-Marie Klinckenberg* (Grupul de retorică de la Liège), care vedea în poetica matematică o etapă superioară în înţelegerea poeziei. Între aceste extreme s-au plasat mulţi dintre cei mai buni scriitori, critici, esteticieni ai acelui moment. Poeţii sunt foarte deschişi faţă de alăturările inedite de termeni, sunt gata să le accepte şi să le caute posibile semnificaţii, dar, în această căutare, ei îşi dezvăluie, inevitabil, prejudecăţile acumulate în legătură cu matematica. Pe de altă parte, în felul în care m-au recenzat cei de formaţie umanistă s-a putut desluşi modul în care ei presupun că o formaţie matematică ar putea fi o piedică în calea unei înţelegeri autentice a poeziei. Replica poetului *Nichita Stănescu*, într-o poezie pe care mi-a dedicat-o, este semnificativă: „Matematica s-o fi scriind cu cifre/dar poezia nu se scrie cu cuvinte“. Dar, este bine cunoscută replica dată de un important poet francez unui interlocutor care se plângea că nu scrie poezie deoarece nu are idei: Poezia nu se face cu idei, ea are nevoie de cuvinte. Cine are dreptate? Pentru a înţelege ce a vrut să spună *Nichita* în versurile de mai sus, scrise în 1970, trebuie să mergi la *Necuvintele* sale din 1969 şi la volumul de poetică *Respirări*, din 1982. Poezia şi matematica au în comun contrastul dintre haina în care ies ele în lume şi viaţa lor ascunsă.

Provocarea lui Claude Lévi-Strauss

În 1978, am editat la Klincksieck (Paris) lucrarea colectivă *La sémiotique formelle du folklore; Approche linguistico-mathématique*, care a trezit interesul profesorului *Pierre Maranda*, directorul Departamentului de Antropologie Culturală al Universităţii Laval (Québec). Am fost invitat acolo cu un scop precis: să reflectez asupra unei formule pe care o lansase *Claude Lévi-Strauss* în 1955, dar care îşi păstrase de-a lungul anilor caracterul ei enigmatic. În trei ani succesivi, de fiecare dată câte patru luni, am venit la această Universitate pentru a mă cufunda în cercetarea operei lui *Lévi-Strauss*. Formula sa avea aerul unui enunţ matematic, dar aparenţa era înşelătoare. Într-o terminologie teatrală, ea spunea, în esenţă, că un actor a în rolul x se află faţă de un alt actor b, aflat în rolul y, într-o situaţie asemănătoare celeia în care s-ar afla b în rolul x faţă de rolul y, devenit actor interpret al unui rol a^{-1} obţinut prin inversarea actorului a. Se observă că are loc o dublă răsucire, prima priveşte transformarea rolului y în actor, iar a doua constă în transformarea, prin inversiune, a actorului a în rolul a^{-1}. Timp de câteva decenii, nimeni nu a înţeles nimic din acest enunţ. Nici măcar autorul acestei pretinse formule nu dădea impresia că-şi mai aduce aminte de ea.

Dar anumite amintiri îndemnau la precauţie Nici infiniţii mici ai lui *Leibniz* nu au fost înţeleşi, iar neînţelegerea s-a risipit abia după vreo trei sute de ani, prin analiza non-standard a lui *Abraham Robinson*. Pe de altă parte, acum ştim că antropologul căruia îi vom marca centenarul în acest an a devenit un termen de referinţă pentru evoluţia ideilor în secolul al XX-lea. În anii '40, când se afla în Statele Unite, i-a propus unui tânăr matematician, *André Weil* (azi recunoscut drept unul din geniile matematice ale secolului trecut), o problemă privind regulile de căsătorie în societăţile primitive. Răspunsul, sub forma unui articol de câteva pagini, a constituit naşterea unui nou domeniu: matematica relaţiilor de rudenie. *Lévi-Strauss* a demonstrat că, deşi cultura sa matematică este săracă, poate chiar derizorie, potenţialul matematic al ideilor sale este imens. Eram avertizat că dispune de o extraordinară capacitate de a adresa întrebări esenţiale.

De la mituri la literatură şi la matematică

Literatura a apărut, în tradiţia occidentală, pe vremea lui *Homer*, deci cu câteva secole înaintea matematicii (*Thales* şi *Pitagora*). Amândouă sunt, într-un anume sens, fiice ale miturilor, de la care au preluat funcţia de simbolizare şi situarea într-un univers de ficţiune, care mediază relaţia cu lumea reală. Într-o etapă destul de târzie a evoluţiei lor, literatura mai întâi, matematica ulterior, s-au prevalat de un alt aspect al miturilor: transgresarea a ceea ce numim azi logica tradiţională, prin încălcarea unuia sau altuia dintre cele trei principii: de identitate, de necontradicţie şi cel al terţului inclus. Drept urmare, toate trei practică paradoxul, la diferite niveluri: sintactic, semantic sau pragmatic. O consecinţă inevitabilă a acestei situaţii este conflictul cu intuiţia curentă, decalajul dintre ceea ce este inteligibil şi ceea ce este vizibil. Toate trei se află sub semnul unor *aşteptări frustrate*. Toate trei dezvoltă un principiu de optimizare semiotică: maximum de gând în minimum de cuprindere (pentru a folosi o expresie a lui *Dan Barbilian*, în legătură cu *Gauss*).

O altă trăsătură comună priveşte principiul holografic: în anumite condiţii, aspectul local, individual, poate da seama despre aspectul global. În mituri există o legătură strânsă între persoană şi univers, între anthropos şi cosmos. În literatură, clipa poate da seama despre eternitate, un copac dă seama despre toţi copacii lumii. *William Blake* vede lumea într-un grăunte de nisip iar eternitatea într-o oră. În matematică, putem deduce comportamentul global al unei funcţii analitice din comportamentul ei local. Aşa s-a ajuns să se enunţe ipoteza structurii holografice a creierului uman şi a universului.

O altă trăsură comună este prezenţa elementului ludic; alta se referă la prezenţa metaforei. Am mai putea vorbi despre prezenţa infinitului şi despre depăşirea, într-un fel sau altul, a cadrului euclidian. Dar ne oprim aici.

Matematica: spiritualitate, libertate, gratuitate

Iată, deci, un tablou mai puţin, dacă nu deloc cunoscut al matematicii. Desigur, dincolo de aceste analogii între matematică, pe de o parte, mituri şi literatură, pe de altă parte, putem dezvolta un întreg şir de deosebiri între ele; dar aceste deosebiri nu pot fi înţelese corect decât în contextul elementelor comune, esenţiale pentru situarea istorică a matematicii ca fenomen de cultură.

Mai întâi, urmărind firul dezvoltării matematicii la vechii greci, constatăm caracterul predominant spiritual al ei, vocaţia contemplării unor armonii de forme şi arhetipuri. Inventarea teoremei este o achiziţie spirituală care, numai ea singură, ar fi suficientă pentru a asigura prestigiul peste milenii al culturii vechilor greci. La *Pitagora*, matematica şi muzica sunt inseparabile, amândouă raportate deopotrivă la cosmos şi la arhitectura spiritului uman. Numerele, intervalele muzicale şi mişcarea corpurilor cereşti conduc la ceea ce s-a numit *muzica sferelor*. Cele cinci tipuri de poliedre regulate puse în evidenţă de *Platon* sunt entităţi fundamentale la fel ca dreapta, cercul, pătratul şi sfera, la *Euclid*, şi fac parte din viziunea lui *Platon* asupra matematicii ca reprezentare a universului. Le găsim în mituri, în diferitele religii, în simbolismul artelor şi în rezultatele fundamentale ale ştiinţei. Numărul prim, şirul lui *Fibonacci*, proporţia de aur, ideile de grup, de mulţime ordonată, de spaţiu topologic, banda lui *Möbius*, sticla lui *Klein*, noţiunea de infinit mic, la *Leibniz*, şi universul non-standard al lui *Robinson* rezumă structuri, prototipuri şi procese sau comportamente cu valoare universală. De aceea pot apărea deopotrivă în natură şi în cultură, în ştiinţă şi în artă, în natura inertă şi în cea vie. Pentru cultura vechilor greci, *Platon* reprezintă cea mai înaltă expresie a matematicii ca aspect fundamental al spiritului uman. Pentru *Aristotel*, discipolul lui *Platon*, matematica nu este o parte a ştiinţei şi nu este subordonată acesteia; matematica se ocupă de obiecte al căror interes este de sine stătător şi care admit o motivare estetică.

Spiritualitatea matematicii : secolele XIII-XVII

Sf. Augustin (354-430) preluase de la *Platon* fascinaţia pentru numere, iar de la *Euclid* metoda de procedare axiomatic-deductivă. Această metodă avea să fie urmată de teologia catolică până spre secolul al XVII-lea. Dar nu numai teologia, ci şi alte discipline au urmat aceeaşi cale; a se vedea *Etica* lui *Spinoza* (1632-1677) şi mecanica newtoniană. *Duns Scotus* (secolul al XIII-lea) se ocupă de problema existenţei şi infinităţii lui Dumnezeu, folosind procedee care prefigurează noţiuni din ceea ce azi numim teoria mulţimilor ordonate. *Nicolaus Cusanus* (1401-1464) vede în matematică unicul mod de a ajunge la certitudine. Ca şi *Descartes*, mai târziu, *Cusanus* adoptă ipoteza unui Univers indefinit (nu infinit). *N. Copernic* (1473-1543) propune, în lucrarea sa privind mişcările de revoluţie ale sferelor cereşti (1540), un model matematic al heliocentrismului. Opera lui *Copernic* a rămas în primul rând pentru valoarea ei ştiinţifică, dar şi calitatea ei literară este remarcabilă; este un poem dedicat Soarelui şi Cercului.

În perioada Renaşterii (secolul al XV-lea) are loc o alianţă fericită între artele vizuale şi matematică, prin nume ca *Leonardo da Vinci*, *Bruneleschi*, *Alberti*, *Albrecht Dürer*, *Piero della Francesca* şi *Bombelli.* Se realizează astfel un progres substanţial în înţelegerea perspectivei (reprezentarea spaţiului cu trei dimensiuni în cel cu două dimensiuni).

Galileo Galilei (1564-1642), prin *Il Saggiatore, Sidereus Nuncius* şi mai cu seamă prin opera sa *Dialog* se înscrie în istorie drept unul dintre părinţii ştiinţei moderne, prin recunoaşterea rolului central al matematicii în înţelegerea lumii. Dar, după cum au atras atenţia *Leopardi* şi *Italo Calvino*, prin aceleaşi opere *Galilei* rămâne şi ca unul dintre marii scritori în proză ai Italiei. Un alt savant dublat de un scriitor este *Johannes Kepler* (1571-1630), care în *Astronomia Nova* (1609) face apel la cele cinci tipuri de poliedre ale lui *Platon* pentru a studia interacţiunea dintre om şi cosmos. *Kepler* demonstrează că traiectoriile planetelor nu sunt circulare, cum se credea, ci eliptice; sunt astfel aduse în atenţie secţiunile conice ale lui *Apollonios de Perga* (262-180). Pasul următor: *Isaac Newton* (1642-1727) descoperă legea atracţiei universale (1687).

René Descartes (1586-1650) preconizează o ştiinţă unificată, având ca model matematica. Asemenea lui *Galilei*, *Descartes* crede că matematica este cheia care deschide drumul spre o imagine globală, unificată şi coerentă a lumii. Plecând de la matematică, *Descartes* s-a simţit proiectat în fizică, filozofie, psihologie, fiziologie şi cosmologie, în toate acestea devenind un pionier. În *Discurs asupra metodei*, *Descartes* străluceşte nu numai prin deducţie filozofică, ci şi prin aspectul literar.

Spiritualitatea matematică: secolele al XVIII şi al XIX-lea

În *Convorbirile* sale cu *Eckermann*, *Goethe* are unele reflecţii privind matematica. Într-una dintre ele, consideră că matematica este o artă care ar trebui să se declare independentă de ceea ce îi este exterior, pentru a-şi urma marele ei traseu spiritual, capabil să cuprindă mai mult decât înţelegerea lumii comensurabile şi măsurabile. Pe de altă parte, *Kant* consideră că matematica este o ştiinţă, dar o ştiinţă a spiritului (*Geisteswissenschaft*), ceea ce îl apropie de poziţia lui *Goethe*, deoarece amândoi sunt de acord că matematica nu-şi are locul alături de ştiinţele naturii (*Naturwissenschaften*). Tot *Kant* consideră că partea cea mai profundă a matematicii este aceea care este cultivată ca fiind interesantă în sine, deci pentru propria ei plăcere.

Matematicianului nu-i poate rămâne lipsit de interes faptul că anumite situaţii paradoxale, care au intrat în raza de preocupări a matematicii abia spre sfârşitul veacului al XIX-lea, au apărut mult mai devreme în literatură. De exemplu, în secolul al XVIII-lea, *Lawrence Sterne*, în *Tristram Shandy*, recurge la situaţii autoreferenţiale iar, în secolul al XIX-lea, *Lewis Carroll* se prevalează sistematic de paradoxuri în *Alice in Wonderland* şi în *Through the looking glass.* Dar de această dată este vorba de un professor de matematică (*Charles Dodgson*, alt nume al lui *Lewis Carroll*); acesta este pasionat de jocul cu probleme de matematică şi de logică, pe care le introduce într-o formă paradoxală în literatura sa debordând de imaginaţie. Într-un fel, îl putem considera pe *Lewis Carroll* ca un precursor al literaturii absurdului, deoarece îi introduce de multe ori pe cititori într-o lume a haosului şi a lipsei de sens.

În secolul al XIX-lea, *George Boole* este atras de problemele cunoaşterii iar lucrarea sa devenită clasică se intitulează *Investigaţii asupra legilor gândirii.* Proiectul său de articulare a logicii, algebrei, limbajului şi gândirii era clar o încercare temerară de pătrundere în arhitectura spiritului uman. Am aflat astfel că o condiţie necesară pentru realizarea corespondenţei urmărite de *Boole* este natura binară a cadrului algebric considerat. Aşa se face că numele lui *Boole* a rămas în memoria colectivă a matematicienilor asociat cu binaritatea. *Boole* îl continua pe *Leibniz*, de aceea *Leibniz* trebuie şi el introdus în această mare tradiţie spirituală a matematicii.

În *Hard Times* (1854), *Charles Dickens* se foloseşte de un studiu al lui *Sissy Jupe* privind proporţiile, pentru a protesta contra entuziasmului unor contemporani ai săi pentru analiza aritmetică şi statistică a condiţiilor economice şi sociale din industria engleză.

În secolul al XIX-lea, sub influenţa geometriilor neeuclidiene, literatura a preluat unele preocupări privind lumile cu mai multe dimensiuni. În *Flatland* (1884), *Edwin Abbott* introduce un narator care trăieşte într-un univers bidimensional. Apare o sferă şi naratorul încearcă să-şi convingă cetăţenii de existenţa celei de a treia dimensiuni, dar este arestat. Progresul nu este acceptat.

Dubla singurătate a matematicii

Matematicianul are nevoie de singurătate pentru a se proteja. Nu este vorba de linişte necesară oricărei activităţi intelectuale, ci de faptul că, preluând o anumită întrebare, el o transformă, pentru a-i da un sens. Autorul întrebării, un inginer, un fizician, un economist, un lingvist sau altcineva, se simte de multe ori frustrat, el are impresia că problema lui a fost înlocuită cu o alta. Dintr-o dată, are loc o despărţire de lume, se naşte o suspiciune. De aici şi gluma conform căreia un matematician îţi rezolvă orice problemă..., în afară de aceea care te interesează. Să-l cităm, într-o traducere aproximativă, pe *Goethe* (tot din *Convorbirile cu Eckermann*): „Matematicienii sunt ca francezii; le propui o problemă, ei o trec pe limba lor şi mai departe nu mai înţelegi nimic". De aici, s-a dedus uneori că *Goethe* nu-i agrea pe matematicieni. Este însă mai potrivit să credem că autorul lui *Faust* avea o profundă înţelegere a naturii activităţii matematice, în care se manifestă un mod specific de a distinge un enunţ cu sens de unul fără sens şi o percepţie specială a demarcaţiei dintre claritate şi obscuritate. Mai este apoi faptul că, instinctiv, matematicianul caută să se folosească de acele părţi ale matematicii care-i sunt familiare, deci modul de a da un sens unei întrebări depinde şi de tipul culturii sale matematice. Structurile, formele, tiparele, formaţiunile matematice de orice fel se îmbogăţesc mereu şi sunt apte, prin generalitatea şi varietatea lor, de a găzdui idei dintre cele mai diverse; iar, dacă imaginaţia sa este suficient de bogată, el va îmbogăţi repertoriul existent cu formaţiuni noi.

Dar, concomitent cu singurătatea care-l are pe el ca autor, matematicianul trăieşte singurătatea pe care matematica o resimte în viaţa socială. Începând cu anii de gimnaziu, cei mai mulţi elevi resping ceea ce li se propune sub eticheta matematicii, rămânând pe viaţă marcaţi de această experienţă negativă. Dacă se mai întâlnesc cu ea, în studenţie sau profesie, este vorba de aspectul unealtă, sub forma unui algoritm, a unei formule, a unei reprezentări grafice de care se prevalează la un anumit moment, într-un itinerar care, în ansamblu, nu este de natură matematică. Într-un caz mai fericit, dar destul de rar, apare nevoia de a face apel la matematica-limbaj, deci nu numai la o utilizare locală, ci la una care angajează, pe un întreg parcurs, folosirea limbajului matematic, dacă nu în toate cele 9 componente ale sale, măcar cu o parte a lor. Pariul educaţiei matematice se referă la faptul că modul de gândire pe care-l oferă această disciplină are o valoare universală, deci este folositor în orice altă disciplină şi în orice domeniu al vieţii. În momentul de faţă ne aflăm la o distanţă astronomică de împlinirea acestui deziderat. Concludent este şi faptul că, ajunşi la vârsta a treia, cei mai mulţi nu-şi amintesc din matematică nicio idee, niciun fapt cu semnificaţie culturală; numai unele cuvinte-sperietoare, ca logaritm, sinus sau rădăcina pătrată, le mai apar în memorie, ca un vis urât. Izolarea socială şi culturală a matematicii este gravă.

La ora paşilor peste graniţe

Matematica este aruncată în derizoriu de modul în care se face educaţia ei şi de percepţia ei publică. Faptul acesta iese în relief de îndată ce, prin contrast, luăm în considerare complexitatea culturală şi datele istorice privind potenţialul spiritual al matematicii, pe care ne-am străduit să le configurăm. Ele ne ajută să înţelegem de unde anume vin bogăţia intelectuală, forţa artistică; universalitatea în cuprindere şi capacitatea de seducţie a matematicii, atunci când aceasta rămâne autentică şi nu înlocuită cu o caricatură a ei.

Deocamdată însă, toate aceste comori rămân ascunse, chiar inexistente, în educaţie, în percepţia publică, în cultură, în orizontul celor mai mulţi intelectuali. Nici măcar cei care, prin profesie, au contact cu partea instrumentală a matematicii (fizicieni, ingineri, economişti etc.), de cele mai multe ori nu ajung la aerul tare al marilor spectacole pe care le oferă matematica. Aşa cum am încercat să arătăm, limbajul nu este decât unul dintre multele aspecte ale matematicii, dar şi acest aspect este sesizat numai prin câteva dintre numeroasele sale componente şi funcţii.

Ce s-a preferat, în schimbul celor de mai sus? S-a restrâns educaţia matematică la o aşa zisă funcţie utilitară, înţeleasă ca un ansamblu de procedee de operare, care ar avea legătură cu problemele practice şi cu celelalte discipline. Realitatea este însă alta. Metabolismul matematicii cu celelalte domenii este aproape inexistent în educaţie iar viaţa cotidiană nu de formule are nevoie, ci de deprinderi de gândire în etape, pe care matematica ni le inoculează; când, totuşi, prin aplicarea unei simple formule învăţate la şcoală, jucătorii la loterie şi-ar putea evalua şansele de câştig, se constată că cei mai mulţi nici măcar nu-şi amintesc de existenţa ei.

Matematica îşi extrage probleme de peste tot. Am putea chiar spune că cele mai interesante aspecte sunt cele care apar la interfaţa matematicii cu restul lumii. Spre această zonă mi-am orientat o bună parte din cercetări. Am dat exemplul formulei canonice a mitului. În ultimii 30 de ani, de când autorul ei a revenit la ea, accentuându-i relevanţa, faptul că ea se află în raport cu miturile într-o relaţie asemănătoare celeia în care miturile se află în raport cu viaţa, cercetarea formulei respective s-a intensificat şi câteva sinteze dau seama despre aceste căutări. Punctul de vedere al matematicii nu a lipsit, mergând de la logică şi algebră la matematica morfogenezei, a lui *René Thom*. Dar în ce a constat aici rolul matematicii? S-au propus lumi alternative, coerente, în cadrul cărora intuiţiile lui *Lévi-Strauss* capătă un statut conceptual. Nu atât despre teoreme este vorba, ci de metafore matematice a căror relevanţă antropologică va fi pusă mereu în discuţie. Matematica se află la ora paşilor peste graniţe, la care se raporta *Werner Heisenberg*, într-o celebră carte a sa.

De la izolarea matematicii la universalitatea ei

Dacă aventura lingvistică a matematicii avea predecesori iluştri, de la *Newton* şi *Leibniz* la *Kolmogorov* şi *Dobrushin*; dacă asocierea ei cu arta s-a aflat în atenţia lui *G.D. Birkhoff*, *A. N. Kolmogorov* şi *H.S.M. Coxeter* (pentru a ne referi la secolul al XX-lea); dacă imixtiunea matematicii în antropologie îl avea ca iniţiator pe unul dintre cei mai importanţi matematicieni ai secolului al XX-lea, *André Weil*, noul domeniu, semiotica, spre care aveam să mă îndrept în anii '70 ai secolului trecut, purta girul celui mai important matematician american al secolului al XIX-lea, *Charles Sanders Peirce*. Este vorba de un punct de vedere care-şi are originea la vechii greci, trece prin teologia catolică a Evului mediu şi se regăseşte la *Leibniz*, pentru a schiţa o mică parte din itinerarul acestei discipline a modului de generare şi transformare a semnelor. Între matematică şi semiotică legătura este atât de naturală, încât apare tentaţia de a o considera pe prima drept o ramură a celei de a doua. Cu toate acestea, în mod paradoxal, la începutul anilor '70 ai secolului trecut, când semiotica a căpătat o bază instituţională, nu matematicienii, ci lingviştii, literaţii şi artiştii au fost cei mai activi în promovarea studiilor de semiotică. Ulterior au apărut şi biologii, informaticienii, matematicienii etc. Dar, ca urmare a activităţii mele anterioare în lingvistică, am trecut uşor la noua orientare iar *Umberto Eco* m-a invitat ca raportor la Primul Congres al Asociaţiei Mondiale de Semiotică, pe care-l organiza în 1974, la Milano. Semiotica s-a dovedit a fi liantul de care aveam nevoie pentru a facilita legătura dintre ideile matematice, pe de o parte, şi problemele provenite din biologie, informatică, psihologie, literatură, economie, lingvistică, istorie, relaţii internaţionale etc., pe de altă parte. Un moment important, în această direcţie, a fost Seminarul combinat de matematică, genetică moleculară, lingvistică şi informatică pe care l-am organizat la Institutul de lingvistică al Americii (Buffalo, New York, 1971).

Numai câţiva ani mai târziu, în 1976, am devenit şeful echipei Universităţii din Bucureşti în cadrul Proiectului Universităţii Naţiunilor Unite (Tokio) *Obiective,* *procese şi indicatori de dezvoltare.* Dialogul cu specialişti din alte domenii, din câteva zeci de ţări, pe care mi l-a prilejuit, timp de vreo şapte ani, acest experiment a avut un rol decisiv în antrenamentul meu transdisciplinar iar în anii '80 întreaga cunoaştere îmi apărea unitară şi devenisem foarte conştient de daunele lipsei de comunicare dintre discipline. Dar să nu uităm că încă în prima jumătate a secolului trecut ideea unei unificări a cunoaşterii revenise puternic, dominând preocupările Cercului din Viena; *Rudolf Carnap* susţinea că nu există decât o singură ştiinţă.

Mi s-a configurat astfel capacitatea matematicii de a fi un catalizator al transferurilor de idei, concepte şi rezultate între domenii dintre cele mai diferite. Nu cumva tocmai izolarea la care este condamnată îi conferă matematicii universalitatea pe care nimeni nu i-o poate contesta?

Solidaritate cu lumea cercetării

Pe măsură ce mă implicam în domenii tot mai variate, devenea tot mai dificilă urmărirea impactului meu în aceste domenii. Începusem, încă din anii '80, să consult *Science Citation Index*, de acolo aflam despre unii autori care se refereau la ceea ce publicasem, dar de multe ori revistele respective erau inaccesibile. Aveam nevoie ca de aer de aceste ecouri. Mă citeşte cineva? Interesează pe cineva ceea ce public? Este recunoscută întreprinderea mea drept o acţiune necesară - sau măcar interesantă - de injectare a gândirii matematice în domenii aparent depărtate de matematică? Nu cumva sunt perceput ca un intrus? Sau ca unul care complică inutil lucrurile? Gluma care pretinde că matematicianul este recunoscut după faptul că dă răspunsuri lung gândite, precise, dar inutile, nu a apărut din senin.

Toate aceste întrebări erau pentru mine expresia unei nevoi organice de a mă cunoaşte, de a mă evalua, independent de ceea ce birocraţia universitară îmi cerea să raportez periodic. Aşa cum este de neconceput să te angajezi în studiul unei probleme fără a te interesa de cei care s-au ocupat anterior de ea, la fel de gravă mi se pare atitudinea de indiferenţă faţă de cei care au reacţionat, într-un fel sau altul, la mesajul tău, preluând ipotetica ta ştafetă şi ducând-o mai departe. Acest act de solidaritate, în interiorul lumii cercetării, oferă o compensare măcar parţială a stării de singurătate, de izolare faţă de cei din afară.

Dar, pentru a duce până la capăt această idee, mai trebuie adăugat ceva. Dacă ne interesează reacţiile celorlalţi, atunci este nevoie în prealabil ca mesajul nostru să ajungă efectiv la cât mai mulţi dintre potenţialii interesaţi. Aceasta revine la faptul că rezultatele noastre sunt publicate în locurile cele mai vizibile, deci în revistele cele mai frecventate. Numai că aceste reviste sunt şi cele mai exigente. Riscul de a primi un răspuns negativ sau unul critic, implicând reconsiderarea textului, este mare. Într-o lume grăbită, care funcţionează după sloganul „a publica sau a pieri", într-o lume comodă, perspectiva trimiterii unui articol la o revistă de înaltă exigenţă nu pare atractivă.

Cultura română, timidă în comunicarea cu lumea

Acceptăm cu greu şi de multe ori respingem realitatea în care trăim. Cunoaşterea s-a globalizat, cercetarea s-a globalizat şi ea, monitorizarea şi evaluarea lor se fac la nivel global. Suntem controlaţi de alţii, dar, în măsura în care suntem validaţi, participăm şi noi la procesul de monitorizare şi evaluare a altora. Situaţia este perfect simetrică. Ne aflăm în faţa unei probleme care nu este numai a fiecărui cercetător în parte, ci şi a culturii române în ansamblul ei. Această cultură a fost timidă în ceea ce priveşte comunicarea cu lumea. O inerţie istorică trebuie acum învinsă.

Ca o consecinţă firească, faţă de anii '50 şi '60, am devenit mai exigent. Nu mă limitez să constat că un anume autor îmi acordă atenţie, mă interesează substanţa acestei atenţii. Este vorba de o referinţă esenţială sau numai de una marginală, locală sau, eventual, de una pur formală? Sau cumva demersul meu este chiar punctul său de plecare, fie pentru a-l continua, fie pentru a propune unul alternativ?

Este el o autoritate recunoscută a domeniului sau un începător? Este revista în care se face referinţa respectivă una de mare prestigiu sau măcar una onorabilă? Mi se pare de asemenea semnificativă rezistenţa în timp a unui rezultat. Atenţia de care beneficiază un articol la 50 de ani după publicarea sa are o greutate mult mai mare decât citarea sa la numai câţiva ani după publicare. Se întâmplă să fii citat ani de-a rândul pentru un anumit rezultat, până în momentul în care cineva publică o sinteză a domeniului respectiv, în care articolul tău este citat cum se cuvine, dar ulterior cei mai mulţi nu mai trimit la articolul în cauză, ci la sinteza care l-a înglobat. Paradoxal, cel mai înalt elogiu care se poate aduce unui anumit concept, unui anumit rezultat, este dispariţia nevoii de a-l mai menţiona pe autor.

O lume inefabilă

Este vorba despre lumea matematicii, o lume inefabilă, în primul rând pentru că nu se poate defini. Când li se cere definiţia, matematicienii fac un ocol şi răspund prin a indica unele atribute ale domeniului lor; o definiţie directă, cât de cât scurtă, a matematicii este evitată. Din acest punct de vedere, matematica se află în situaţia artei, la fel de imposibil de definit. Există şi un alt mod de a ocoli definiţia: prin indicarea diferitelor ei compartimente, de exemplu, aşa cum figurează ele în marile reviste de referate. Acest ocol este folosit uneori şi atunci când trebuie explicat ce este arta.

Există şi un alt fel în care se manifestă inefabilul matematicii: prin contrastul dintre modul în care se prezintă matematica în lume şi modul în care arată viaţa ei ascunsă. La suprafaţă, matematica este dominată de deducţii, de formule şi de algoritmi; ea procedează de la definiţii, leme şi teoreme la demonstraţii, corolare şi exemple. În căutările şi frământările ei, ea este străbătută de întrebări, încercări, ezitări, greşeli, eşecuri, tatonări, analogii, asocieri de tot felul, amintiri din ce-am trăit sau ce-am visat cândva, reprezentări vizuale, testări pe exemple particulare, mirări, intuiţii şi emoţii. Simptomatică pentru discrepanţa dintre aparenţa şi substanţa matematicii este distanţa, care poate fi foarte mare, dintre momentul găsirii unui rezultat şi cel al confirmării sale prin demonstraţie. Totul se întâmplă ca în celebra reflecţie a lui *Blaise Pascal*; pentru a porni în căutarea unui lucru, trebuie mai întâi să-l găsim. Nu este nicio contradicţie aici. Găsirea este abductivă, iar căutarea urmăreşte o confirmare deductivă.

Ordinea în care matematica se prezintă în lume este în bună măsură opusă ordinii istorice. De exemplu, noţiunile de limită, continuitate, derivată şi integrală sunt învăţate în această ordine, dar ordinea în care ele s-au cristalizat este inversă acesteia.

G. Călinescu aprecia că istoria literară este o *ştiinţă inefabilă*. Matematica este inefabilă, are, printre diferitele ei trăsături, şi unele comune cu ştiinţa, fără însă a putea fi inclusă printre ştiinţe, deoarece nu se ocupă, prin destinaţia ei, de o anumită felie a naturii sau a societăţii. Aşa cum am mai observat, matematica are un potenţial ştiinţific, are şi unul artistic, are şi unul filozofic; dar ea rămâne, în concertul culturii, o voce separată, inconfundabilă. O bună parte a lumii academice îi respectă acest statut.

Matematica, în viziunea ideilor primite, în sensul lui Flaubert

Cea mai răspândită este aceea de *ştiinţă exactă*. Conform unei definiţii de dicţionar, „ştiinţele exacte sunt acele domenii ale ştiinţei care sunt capabile de o expresie cantitativă acurată sau de predicţii precise şi de metode riguroase de testare a ipotezelor, în special de experimente reproductibile, implicând predicţii şi măsurători cuantificabile“ (Wikipedia). După cum se vede, acest clişeu se bazează, la rândul său, pe alte două clişee: „matematica, ştiinţă a cantităţii“ şi „matematica, ştiinţă a naturii sau/şi societăţii“. Primul clişeu domină şi acum percepţia comună a matematicii, după cum rezultă din definiţia ei în *Dicţionarul explicativ al limbii române*: „ştiinţă care se ocupă cu studiul mărimilor, al relaţiilor cantitative şi al formelor spaţiale (cu ajutorul raţionamentului deductiv)“. Al doilea clişeu rezultă din asimilarea matematicii cu domeniile în care ea se valorifică. Se observă şi un al treilea clişeu, care reduce matematica la funcţia ei de unealtă. Cât de departe suntem de geometria şi aritmetica văzute drept două dintre „cele şapte arte liberale“ (celelalte cinci fiind gramatica, retorica, logica, muzica şi astronomia)!

Desigur, matematicienii din a doua jumătate a secolului trecut au fost conştienţi de toate aceste falsificări ale naturii reale a domeniului lor şi au propus versiuni alternative: matematica, „studiu al formelor şi evoluţiei lor“ (*R. Thom*); „ştiinţă a modelelor (patterns)“ (*L. Steen*); „corp de cunoştinţe centrat pe conceptele de cantitate, structură, spaţiu şi mişcare“ (Wikipedia) iar, în secolul al XIX-lea, *B. Peirce* propusese „ştiinţa care dezvoltă concluzii necesare“. Fiecare dintre ele prinde câte un aspect, dar niciuna nu separă matematica de toate celelalte domenii.

Între funcţia cognitivă şi cea utilitară

Ca *Janus*, cel cu două feţe, matematica ne arată uneori funcţia ei cognitivă, alte ori pe cea utilitară. Relaţia dintre ele este pe cât de simplă, pe atât de paradoxală: cea mai bogată sursă de susţinere a funcţiei utilitare a matematicii se află în avansul funcţiei sale de cunoaştere. Dar preţul care trebuie plătit pentru ca acest lucru să se întâmple este libertatea acordată matematicianului de a-şi dezvolta cercetările sale nestingherit, neîmpins de la spate de tot felul de planificări, ci ghidat exclusiv de curiozitatea sa, de bucuria sa de a „vagabonda“ în lumea ideilor matematice, lume pentru el suficientă pentru a-l motiva în efortul său intelectual.

Nu întâmplător am folosit verbul „a vagabonda“; m-am gândit la verbul francez *errer* şi la latinescul *errare*, care înseamnă, în acelaşi timp, „a rătăci“, „a vagabonda“ şi „a greşi“. Cu alte cuvinte, când mergi încoace şi încolo, tatonând diverse posibilităţi, eşti supus greşelii şi eşecului; încerci din nou şi din nou şi acesta este marele joc al matematicii (dar nu numai al ei).

Matematica trebuia să rămână ca muzica, să fie cultivată pentru propria ei plăcere. Funcţia terapeutică a muzicii a fost observată de multă vreme, dar nimeni nu s-a gândit ca societatea să-i condiţioneze pe compozitori de efectul curativ al creaţiei lor muzicale. Matematicienii n-au avut acest noroc. Societatea s-a focalizat mereu asupra funcţiei utilitare a matematicii şi, în mare măsură, a apreciat munca matematicienilor în raport cu cerinţele practice, fără a conştientiza sursa reală a acelei „unreasonable effectiveness of mathematics“ (*E. Wigner*).

„Pentru onoarea spiritului uman“

Dar aici mai trebuie subliniat un aspect. Cercetarea matematică este o activitate cu scadenţă nedeterminată; ea este, în general, o întreprindere de cursă lungă, se extinde la generaţii successive, care pot ocupa secole, dacă nu chiar milenii. Nu se ştie exact când a început şi nu i se întrevede un sfârşit. Acest atribut îl are şi cercetarea din alte domenii. Dar în matematică fiecare predare şi preluare a ştafetei este atât de explicită, de clară, încât poţi contempla în toată grandoarea sa acest spectacol în care eforturile unor oameni care au trăit în perioade dintre cele mai diferite ale istoriei se conjugă într-un singur elan, pentru a conduce la rafinamentul de gândire al matematicii contemporane. Am trăit pentru prima oară acest sentiment ameţitor, pe vremea când eram student, contemplând istoria analizei matematice, de la *Arhimede* până în secolul al XX-lea. O dulce ameţeală, la vârsta adultă, în prelungirea stării similare trăite în copilărie, la vârsta scrânciobului şi a toboganului.

În 1830, *Carl Gustav Jacobi*, într-o scrisoare către *Adrian-Marie Legendre*, scrie:

„*Dl. Fourier crede că scopul principal al matematicii este de a fi utilă şi de a explica fenomenele naturale; dar un filozof ca el ar fi trebuit să ştie că scopul unic al ştiinţei este onoarea spiritului uman şi că sub acest titlu o chestiune privind numerele nu valorează mai puţin decât una relativă la sistemul lumii*“.

Sloganul lui *Jacobi* a fost preluat ca titlu al cărţii sale din 1987, de către *Jean Dieudonné*: *Pour l'honneur de l'esprit humain* (Hachette, Paris). Ca şi pe *Jacobi*, pe *Dieudonné* îl animă înţelegerea (pe care am moştenit-o de la vechii greci) matematicii ca artă, mai degrabă decât înţelegerea ei ca ştiinţă; matematicianul caută frumuseţea, nu utilitatea. Dar utilitatea vine şi ea, la vremea ei. Cu alte cuvinte, ar fi o profundă eroare să credem că funcţia cognitivă şi estetică a matematicii este un mijloc prin care atingem scopul reprezentat de funcţia ei utilitară. Adevărata matematică este cultivată pentru propria ei plăcere şi tocmai prin aceasta ea onorează spiritul uman.

Capacitatea formativă a matematicii vine din gratuitatea ei

Ajungem astfel la una din sursele eşecului matematicii şcolare: greşeala de a crede că îl educăm pe elev furnizându-i scule cu utilizări precise. Regulile de folosire a sculelor pot fi deprinse relativ uşor, dar valoarea lor educaţională este derizorie. Aritmetica şi geometria dispun de resurse bogate de dezvoltare a capacităţii copilului de a se mira, de a se întreba, de a imagina răspunsuri, de a tatona diferite căi de rezolvare, de a stabili punţi de legătură cu înţelegerea naturii, a limbajului, a istoriei şi geografiei. Dar totul trebuie să se bazeze pe dezvoltarea propriei sale curiozităţi, în aşa fel încât el să accepte ca unică răsplată bucuria, plăcerea de a înţelege, prin paşi mărunţi, câte ceva din lumea care îl înconjoară şi de a se înţelege pe sine.

La întrebarea pe care o auzim mereu, din partea unor elevi, dar şi din partea unor părinţi şi educatori: De ce matematică pentru copii care nu-şi propun să devină matematicieni? le răspundem: Pentru că matematica este un mod de gândire cu valoare universală şi pentru că ea prilejuieşte bucurii spirituale la care orice fiinţă umană ar trebui să aibă acces. În măsura în care adolescenţii vor învăţa să se bucure de frumuseţile matematicii, ale ştiinţei, ale artei şi literaturii şi vor simţi nevoia de a le frecventa, ei nu vor mai suferi de plictiseală iar tentaţia unor activităţi derizorii, uneori antisociale, va scădea.

Pornind de la o întrebare a lui Rilke

În celebrele sale *Scrisori către un tânăr poet*, pe care le-am citit ca adolescent, *Rainer Maria Rilke* îl sfătuia pe interlocutorul său, atras de magia versurilor, să persiste în a scrie poezie numai dacă simte că nu ar putea trăi altfel. Cercetarea matematică nu este cu nimic mai puţin exigentă şi selectivă, chiar dacă severitatea selecţiei este aici de o altă natură. Întrebarea lui *Rilke* devine inevitabilă: Să faci cercetare matematică numai dacă simţi că nu ai putea trăi altfel? *Paul R. Halmos* a dat undeva un răspuns afirmativ unei întrebări similare. În ceea ce mă priveşte, un singur lucru pot spune: că nu mi-aş fi putut imagina viaţa altfel decât într-o activitate de cercetare iar, în măsura în care aş fi fost împiedicat s-o fac, m-aş fi considerat de-a dreptul nenorocit.

Maeştri şi discipoli

Tradiţiei evocării unui predecesor ilustru, la primirea în Academia Română, ar trebui să i se adauge, cel puţin din considerente de simetrie, portretizarea unui discipol, a unui posibil viitor membru al acestei Academii. Mă voi conforma acestui principiu, dar o voi face nu atât din raţiunile de simetrie la care m-am referit, cât dintr-o nevoie profundă de a spune adevărul, de a mă mărturisi: am învăţat de la unii dintre foştii mei studenţi nu mai puţin decât au învăţat poate ei de la mine. Într-o circularitate simptomatică pentru vremea în care trăim, ajungem să învăţăm de la cei care ieri au învăţat ei de la noi. Într-un anume sens, discipolii de ieri ne devin azi profesori.

Relaţia maestru-discipol trebuie deci reconsiderată. Faţă de complexitatea actuală a vieţii academice şi faţă de cerinţele tot mai variate ale competiţiei actuale a valorilor, tânărul în plină formare are nevoie de mai multe puncte de sprijin, de mai mulţi termeni de referinţă. Nimeni nu excelează în toate privinţele, nimeni nu este un reper în toate; nevoia de mai multe repere este legitimă. Dar, pe de altă parte, înaintarea în vârstă adaugă la maeştrii şi la discipolii de ieri pe alţii, care apar pe parcurs. Ca student, aveam câteva repere: *Miron Nicolescu* şi *Simion Stoilow*, *Dan Barbilian* şi *Gheorghe Vrănceanu*. Ulterior, s-a adăugat *Grigore C. Moisil*. De la fiecare dintre ei am preluat altceva. Dar treptat, pe măsură ce îi descopeream, prin lectură, pe profesorii profesorilor mei, m-am ataşat puternic de *Spiru Haret*, *Dimitrie Pompeiu*, *Traian Lalescu* şi *Petre Sergescu*. Cu toţi aceştia m-am simţit pe aceeaşi lungime de undă. N-au fost numai matematicienii, dar nu mai este loc pentru ei aici.

Un discipol care mi-a devenit maestru: Vasile Ene

Până aici pare totul normal, conform aşteptărilor. Numai că printre noii mei maeştri au început a se strecura unii dintre foştii mei studenţi. Voi da un singur exemplu: *Vasile Ene*. Venea dintr-o familie săracă, îşi trăise copilăria într-o casă fără bibliotecă. Ca elev, aflase dintr-o carte de popularizare că există integrale mai bune decât aceea care se afla în manualul şcolar. Ardea de curiozitatea de a le cunoaşte. A ales matematica. Nu era studentul meu, predam la altă serie. Dar într-o zi, în sala de lectură a Bibliotecii Facultăţii de Matematică, m-a abordat. După căutări haotice, fără rezultat, în rafturile Bibliotecii, încercase pe cont propriu să imagineze o continuare la ceea ce se afla în cursul universitar. I-am recomandat să consulte colecţia revistei *Real Analysis Exchange*, în care se publicau frecvent articole pe tema care-l obseda. A fost pentru el un moment de revelaţie, care i-a schimbat viaţa. A devenit, în scurt timp, un colaborator aproape permanent al acestei reviste de înaltă exigenţă. Trăia cu atâta intensitate problemele integralelor neabsolute, observa cu atâta fineţe punctele delicate şi cotiturile periculoase cărora trebuia să le facă faţă, îmi vorbea despre ele cu atâta pasiune, recurgând la reprezentări vizuale, gesturi, mirări, încât aveam impresia că obiectele sale matematice erau nişte fiinţe vii, cu care convieţuia într-o armonie deplină. Mă simţeam un invitat privilegiat în laboratorul său de creaţie. Nu mai trăisem momente de acest fel decât la cursurile profesorului *Dan Barbilian*. Întâlnirile mele periodice cu *Vasile Ene* erau zile de sărbătoare, prilejuite de câte un nou articol care urma să fie trimis la *Real Analysis Exchange*. Contrastul izbitor dintre caracterul foarte tehnic al acestor texte şi modul în care ele prindeau viaţă în discuţia directă cu autorul lor avea pentru mine o valoare simbolică şi suna ca un avertisment privind felul greşit în care se face educaţia matematică. Da, aveau dreptate vechii greci, o teoremă este un spectacol, dar trebuie ca cineva să-i asigure regia; o teoremă poate fi un sentiment, cum observa *Moisil*, dar pentru a-l trăi este nevoie şi de expresia sa verbală.

Despre *Vasile Ene* pot spune cu certitudine că, din momentul în care a cunoscut adevărata matematică, nu a mai putut trăi fără ea. Această pasiune a dat vieţii sale un sens superior, de o valoare intelectuală şi morală exemplară. A murit la vârsta de 41 de ani, răpus de o boală căreia nu i s-a putut stabili natura. Pentru cercetările sale profunde de analiză matematică, revista *Real Analysis Exchange* l-a omagiat prin înfiinţarea a ceea ce se numeşte *Vasile Ene Memorial Fund*, anunţat în fiecare număr al revistei şi destinat finanţării participării unui tânăr matematician român la o conferinţă internaţională de profil.

Prin omagiul pe care-l aduc lui *Vasile Ene*, îmi exprim recunoştinţa faţă de toţi cei care m-au insoţit, în vreun fel sau altul, în călătoria neverosimilă care, probabil, se apropie de sfârşit.

Îmi vin în minte versurile lui *Serghei Esenin*:
Te-am trăit sau te-am visat doar, viaţă?
Parcă pe un cal trandafiriu
Vesel galopai de dimineaţă!

Bucureşti

Grupuri de matrici din $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ şi aplicaţii la rezolvarea ecuaţiei diferenţiale $LX' + MX = 0$, unde $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ şi $L \notin \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$

de Adrian Reisner

Abstract

The article shows how certain aspects of the theory of matrix groups can be used in solving a differential equation.

Key words: matrix groups.

M.S.C.: 34A05.

Partea I: Grup de matrici

Vom nota cu aceaşi literă A un endomorfism al spaţiului vectorial $\mathbb{R}^n$ şi matricea sa în baza canonică al lui $\mathbb{R}^n$.

Considerăm un grup multiplicativ G conţinut în mulţimea $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, nu redus la $\{0\}$. Elementul neutru al grupului G va fi notat cu E (acest element E poate fi diferit de I_n matricea unitate al algebrei $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$). Deci, G nu este în general un subgrup al grupului $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Pentru orice matrice $A \in G$ avem $AE = A$, $EA = A$ şi există o unică matrice $A' \in G$ astfel încât: $AA' = A'A = E$. Avem:

Propoziţia 1. *Toate elementele din G au acelaşi rang $r \geq 1$.*

Demonstraţie. Într-adevăr, din egalitatea $AE = A$ deducem: $\mathrm{rg}\ A \leq \mathrm{rg}\ E$ $[\mathrm{rg}\ (AB) \leq \inf\{\mathrm{rg}\ A, \mathrm{rg}\ B\}]$. La fel egalitatea $E = AA'$ conduce la inegalitatea $\mathrm{rg}\ E \leq \mathrm{rg}\ A$ şi, în final, pentru orice $A \in G$, $\mathrm{rg}\ A = \mathrm{rg}\ E = r$, c.c.t.d.

De acum înainte vom numi G_r un grup multiplicativ conţinut în mulţimea $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ care verifică, pentru orice $A \in G_r$, $\mathrm{rg}\ A = r$. Are loc:

Propoziţia 2. *Matricea E este asemenea matricei*

$$J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Demonstraţie. Deoarece $E^2 = E$, endomorfismul E este un proiector pe $\mathrm{Im}E$ şi de nucleu $\mathrm{Ker}E$. Rezultă $\mathbb{R}^n = \mathrm{Im}E \oplus \mathrm{Ker}E$. Fie atunci $\{e_1, e_2 \ldots e_r\}$ o bază a spaţiului $\mathrm{Im}E$ şi $\{e_{r+1}, \ldots, e_n\}$ o bază a spaţiului $\mathrm{Ker}E$. Matricea endomorfismului asociat lui E în baza $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ este

$$J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c.c.t.d.

Dacă $r = n$, avem $E = I_n$: în acest caz avem $A' = A^{-1}$ şi G_n este un subgrup (propriu sau impropriu) al grupului $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Fie $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ verificând $J_r = P^{-1}EP$. Avem următoarea teoremă care caracterizează un grup G_r:

Teorema 3. *Următoarele cele două aserţiuni sunt echivalente*:

i) *Matricea A de rang $r < n$ aparţine unui grup G_r de element neutru $E = PJ_rP^{-1}$.*

ii) *Matricea A este asemenea unei matrice de forma* $\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ unde $A_1 \in \mathcal{G}$ subgrup al grupului $\mathrm{GL}_r(\mathbb{R})$:

$$A = P \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Mai mult, cu aceste notaţii, avem

$$A' = P \begin{pmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Demonstraţie. i) $\Rightarrow$ ii) Considerăm aplicaţia $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $X \mapsto P^{-1}XP$. Mulţimea G'_r imaginea grupului G_r este un grup multiplicativ – având pe J_r ca element neutru. Pentru orice matrice

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} \in G'_r$$

descompusă în blocuri, din egalităţile $BJ_r = J_rB = B$ deducem $B_2 = B_3 = B_4 = 0$. Pe de altă parte conform propoziţiei 1, pentru orice $B \in G'_r$, $\mathrm{rg}B = \mathrm{rg}\ J_r = r$ şi deci $B_1 \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{R})$. A fiind o matrice oarecare din G_r,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

unde $A_1 \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{R})$. Aplicaţia $\varphi : G_r \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{R})$, $A \mapsto A_1$, este un morfism de grupuri. Imaginea $\mathrm{Im}\varphi$ a morfismului φ, este deci un subgrup $\mathcal{G}$ al grupului $\mathrm{GL}_r(\mathbb{R})$:

$$G_r = \left\{ P \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \middle| A_1 \in \mathcal{G} \right\}.$$

Deoarece J_r este elementul neutru al grupului G'_r, matricea A' este asemenea matricei $\begin{pmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$A' = P \begin{pmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 00 & \end{pmatrix} P^{-1}.$$

ii) $\Rightarrow$ i) Invers dacă $\mathcal{G}$ este un subgrup al grupului $\mathrm{GL}_r(\mathbb{R})$ şi P o matrice oarecare aparţinând grupului $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ rezultă imediat că

$$G_r = \left\{ P \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \middle| A_1 \in \mathcal{G} \right\}$$

este un grup multiplicativ. Teorema 3 este astfel demonstrată . Cu alte cuvinte:

Orice grup multiplicativ G_r conţinut în mulţimea $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ este $P-$ conjugat unui subgrup $\mathcal{G}$ al grupului $GL_r(\mathbb{R})$ unde $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Observaţie. Matricea A poate aparţine mai multor grupuri G_r. Matricea A' nu depinde decât de matricea A, independent de grupul G_r care conţine A.

Avem atunci:

Corolarul 4. Cele cinci proprietăţi următoare sunt echivalente:
a) A aparţine unui grup multiplicativ G.
b) rg $A =$ rg A^2.
c) Im$A =$ ImA^2.
d) Ker$A =$ KerA^2.
e) $\mathbb{R}^n = \mathrm{Im}A \oplus \mathrm{Ker}A$

Demonstraţie. a) $\Rightarrow$ b) A şi A^2 sunt două matrici aparţinând grupului G: conform propoziţiei 1 deducem atunci aserţiunea b).

b) $\Rightarrow$ c) Avem $\mathrm{Im}A^2 \subseteq \mathrm{Im}A$ deci dacă rg $A =$ rg A^2, avem $\mathrm{Im}A = \mathrm{Im}A^2$.

c) $\Rightarrow$ d) Având $\mathrm{Im}A = \mathrm{Im}A^2$, teorema rangului conduce imediat la $\dim \mathrm{Ker}A = \dim \mathrm{Ker}A^2$. Pe de altă parte $\mathrm{Ker}A \subset \mathrm{Ker}A^2$ şi deci aserţiunea d) este demonstrată.

d) $\Rightarrow$ e) Demonstrăm că $\mathrm{Ker}A \cap \mathrm{Im}A = \{0\}$. Fie $x \in \mathrm{Ker}A \cap \mathrm{Im}A$; Avem $x = A(y)$ şi $0 = A(x) = A^2(y)$. Deci $y \in \mathrm{Ker}A^2 = \mathrm{Ker}A$; deci $x = A(y) = 0$.

Având $\dim \mathrm{Im}A + \dim \mathrm{Ker}A = n$ deducem aserţiunea e).

e) $\Rightarrow$ a) Fie $\{e_1, e_2, \ldots, e_r\}$ o bază a spaţiului ImA şi $\{e_{r+1}, \ldots, e_n\}$ o bază a spaţiului Ker$A$. ImA fiind un supliment al spaţiului Ker$A$ deducem că restricţia endomorfismului A la spaţiul ImA este un izomorfism $\mathrm{Im}A \to \mathrm{Im}A$. A_1 fiind matricea acestui izomorfism în baza $\{e_1, e_2, \ldots, e_r\}$, matricea A este asemenea matricei $\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Implicaţia ii) $\Rightarrow$ i) din teorema precedentă permite atunci să se deducă concluzia.

Mai mult, are loc:

Propoziţia 5. *Toate elementele grupului $G_r (r \leq n)$ au aceeaşi imagine şi acelaşi nucleu.*

Demonstraţie. Din egalitatea $EA = A$, pentru orice $A \in G_r$ se deduce că $\mathrm{Im}A \subset \mathrm{Im}E$, pentru $A \in G_r$. La fel egalitatea $AA' = E$, pentru orice $A \in G_r$ conduce la $\mathrm{Im}E \subset \mathrm{Im}A$, pentru orice $A \in G_r$. Deci $\mathrm{Im}A = \mathrm{Im}E$, pentru orice $A \in G_r$. De asemenea, pentru nucleul Ker$A$, folosind egalităţile $AE = A$ şi $A'A = E$, pentru $A \in G_r$ (sau teorema rangului), rezultă $\mathrm{Ker}A = \mathrm{Ker}E$, pentru orice $A \in G_r$.

Observaţie. Cu această propoziţie, A şi A^2 aparţinând grupului G_r, aserţiunile b), c), d), e) din corolarul 4 sunt astfel evidente.

Exemplu numeric

• Matricea nilpotentă
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
nu aparţine nici unui grup multiplicativ de matrici căci avem $A^2 = 0$ deci rg $A \neq$ rg A^2.

• Fie matricea
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

Avem
$$A^2 = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 5 \\ 12 & 20 & 10 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

şi deci rg $A =$ rg $A^2 = 2$, adică A aparţine unui grup multiplicativ de matrici G_2. Matricea A este asemenea matricei

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 5 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

avem

$$E = PJ_2P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

şi

$$A' = P \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ -8 & 4 & 2 \\ 21 & -10 & -5 \end{pmatrix}.$$

O altă caracterizare al grupului G_r este dată de propoziţia următoare:

Propoziţia 6. *Următoarele două aserţiuni sunt echivalente*:

a) *A aparţine unui grup multiplicativ G*;

b) *Există o matrice $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ astfel încât să avem*: $AX = XA = E$, $X^2A = X$ *şi* $A^2X = A$.

Mai mult această matrice X este unică şi nu depinde decât de matricea A şi nu de grupul G care conţine matricea A.

Demonstraţie. a) $\Rightarrow$ b) A' fiind inversa matricei A în grupul G, matricea $X = A'$ verifică $AX = XA = E$, $X^2A = X(XA) = XE = X$, $A^2X = A(AX) = AE = A$. Deci matricea $X = A'$ verifică egalităţile din aserţiunea b).

b) $\Rightarrow$ a) Invers presupunând existenţa unei matrice X verificând egalităţile din aserţiunea b) avem $A = A^2X$ deci rg $A \leq$ rg A^2. Dar cum rg $A^2 \leq$ rg A deducem rg $A =$ rg A^2. Implicarea b) $\Rightarrow$ a) din corolarul 4 termină demonstraţia.

Acum, presupunem că există două matrici X_1 şi X_2 verificând $AX_i = X_iA$, $X_i^2A = X_i$ şi $A^2X_i = A$ pentru $i = 1, 2$. Calculând în două maniere diferite produsul X_1AX_2 obţinem, pe de o parte

$$X_1AX_2 = (X_1^2A)AX_2 = X_1^2A^2X_2 = X_1^2(A^2X_2) = X_1^2A = X_1$$

şi, pe de altă parte:

$$X_1AX_2 = (X_1A)(X_2^2A) = A^2X_1X_2^2 = AX_2^2 = X_2^2A = X_2.$$

În final rezultă $X_1 = X_2$. Matricea X fiind unică, avem deci $X = A'$ şi observaţia de la teorema 3 permite să tragem concluzia.

Observaţie. Unica matrice $X = A'$ verifică relaţile $AA'A = A$ şi $A'AA' = A'$: deci A' este o pseudoinversă a matricei A; A' este unica pseudoinversă a matricei A care verifică $\mathrm{Im}A' = \mathrm{Im}A$ şi $\mathrm{Ker}A' = \mathrm{Ker}A$ (vezi [1]).

Am dat mai sus două exemple numerice. Un alt exemplu de matrici aparţinând unui grup multiplicativ conţinut în $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ este dat de

Propoziţia 7. *Orice matrice B de forma*

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),$$

unde $B_1 \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{R})$ cu $r < n$, *aparţine unui grup multiplicativ* G *de matrici. Mai mult, matricea* B' *este de aceeaşi formă*

$$B' = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

unde $C_1 \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{R})$.

Demonstraţie. Matricea B conţinând o submatrice B_1 de rang r, avem rg $B \geq r$. Dar toţi determinanţii bordând submatricea B_1 fiind nuli – având o linie nulă – B_1 este o submatrice pricipală a matricei B şi deci rg $B = r$. Pe de altă parte având

$$B^2 = \begin{pmatrix} B_1^2 & B_1B_2 \\ & 0 \end{pmatrix}$$

deducem – în acelaşi fel – că rg $B^2 = r$. Implicaţia b) $\Rightarrow$ a) din corolarul 4 încheie demonstraţia. Mai mult, să căutăm matricea B' – G – inversa lui B – având forma

$$B' = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

şi verificând $B'B = BB'$, $B'^2B = B'$, $B^2B' = B$; obţinem sistemul matricial $\begin{pmatrix} B_1C_1 & B_1C_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1B_1 & C_1B_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} C_1^2B_1 & C_1^2B_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} B_1^2C_1 & B_1^2C_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Deducem, matricea B_1 fiind inversibilă, că $C_1 = B_1^{-1}$ şi $C_2 = B_1^{-2}B_2$. Matricea B' fiind unică propoziţia 7 este demonstrată.

Partea a II-a: Generalizare

Generalizăm aici noţiunile introduse în partea I, considerând sistemul matricial având necunoscuta X:

$$(S)\ AX = XA, \quad X^2A = X$$

şi există $i \geq 0$ verificând $A^{i+1}X = A^i$. [Pentru partea I avem $i = 1$]. Fie $Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ comutând cu matricea A şi verificând $Y^2A = Y$ şi pentru un întreg convenabil j: $A^{j+1}Y = A^j$. Avem atunci:

Lema 8. a) *Pentru orice* $m \geq 0$ *avem egalitatea* $X^{m+1}A^m = X$;

b) *Există un întreg* m *astfel ca produsul* $X^{m+1}A^{m+1}Y$ *să fie comutativ.*

Demonstraţie. a) Într-adevăr, egalitatea este trivială pentru $m = 0$ şi se procedează apoi prin inducţie: presupunând egalitatea verificată pentru m avem matricile A şi X comutând :

$$X^{m+2}A^{m+1} = XA(X^{m+1}A^m) = XAX = X^2A = X.$$

b) Verificăm imediat că pentru $m \geq i$ $A^{m+1}X = A^m$ şi la fel pentru $m \geq j$, $A^{m+1}Y = A^m$. Pentru $m \geq \sup(i,j)$:

$$X^{m+1}A^{m+1}Y = X^{m+1}(A^{m+1}Y) = X^{m+1}A^m = X$$

după a) şi la fel

$$YA^{m+1}X^{m+1} = (A^{m+1}Y)X^{m+1} = A^mX^{m+1} = X^{m+1}A^m = X,$$

matricile A, X pe de o parte şi A, Y comutând. În final, produsul $X^{m+1}A^{m+1}Y$ este comutativ pentru $m \geq sup(i,j)$. Deducem :

Teorema 9. *Dacă sistemul* (S) *are o soluţie atunci această soluţie* X *este unică .*

Demonstraţie. Presupunem că există două soluţii pentru sistemul (S): X şi Y.

Produsul comutativ precedent $X^{m+1}A^{m+1}Y = YA^{m+1}X^{m+1}A$, $m \geq \sup(i,j)$, poate fi evaluat astfel

$$X^{m+1}A^{m+1}Y = X^{m+1}A^mAY = XAY$$

$$X^{m+1}A^{m+1}Y = YAA^mX^{m+1} = YAX.$$

Avem, deci, ţinând seama de aserţiunea b) din lema precedentă, $XAY = = YAX = X$. Dar X şi Y având roluri identice în prima egalitate deducem imediat că $X = Y$.

Cazuri speciale

• Dacă $\mathrm{Im}A = \mathbb{R}^n$, A este inversibilă şi din $A^{i+1}X = A^i$ deducem imediat că $AX = I$. În acest caz, unica soluţie a sistemului (S) este $X = A^{-1}$.

• Dacă $\mathrm{Im}A = \mathrm{Im}A^2 \neq \{0\}$ unica soluţie a sistemului (S) este $X = A'$ matrice introdusă în partea I (vezi corolarul 4 c) şi propoziţia 6).

• Dacă matricea A este nilpotentă de indicie k (i.e. $A^k = 0$, $A^{k-1} \neq 0$) aserţiunea a) din lema 8 conduce (pentru $m = k$) la: unica soluţie al sistemului (S) este $X = 0$.

Presupunând de acum înainte că matricea A nu este nici inversibilă nici nilpotentă, avem:

Propoziţia 10. *Şirul de subspaţii* $(\mathrm{Im}A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ *este staţionar începând de la un indice* k *şi avem suma directă* $\mathbb{R}^n = \mathrm{Im}A^k \oplus \mathrm{Ker}A^k$.

Demonstraţie. Şirul $(\mathrm{Im}A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ este descrescător deci staţionar din motive de dimensiune şi deci prima aserţiune al propoziţiei este demonstrată. [Putem preciza acest rezultat: avem, în mod evident

$$\mathrm{Im}A^k = \mathrm{Im}A^{k+1} \Rightarrow \forall m \geq k, \quad \mathrm{Im}A^m = \mathrm{Im}A^k$$

şi deci pentru $m \geq k$:

$$\mathrm{Im}A^m = \mathrm{Im}A^k \underset{\neq}{\subset} \mathrm{Im}A^{k-1} \underset{\neq}{\subset} \mathrm{Im}A^{k-2} \underset{\neq}{\subset} \ldots \underset{\neq}{\subset} \mathrm{Im}A,$$

k fiind primul indiciu pentru care $\mathrm{Im}A^{k+1} = \mathrm{Im}A^k$.]

Pentru demonstraţia egalităţii $\mathbb{R}^n = \mathrm{Im}A^k \oplus \mathrm{Ker}A^k$, este suficient să arătăm că $\mathrm{Im}A^k \cap \mathrm{Ker}A^k = \{0\}$ din motive de dimensiuni al subspaţiilor vectoriale.

Fie deci $x \in \mathrm{Im}A^k \cap \mathrm{Ker}A^k$. Avem $x = A^ky$ şi $0 = A^kx = A^{2k}y$ deci $y \in \mathrm{Ker}A^{2k} = \mathrm{Ker}A^k$, de unde, în final, $x = 0$.

Definiţie. Cu notaţile precedente subspaţiul $\mathrm{Im}A^k$ se numeşte centrul endomorfismului A şi se va nota $\mathrm{Co}(A) = \mathrm{Im}A^k$ ([1]).

Rangul s al matriciei A^k fiind diferit de n (căci A nu este inversibilă) şi de 0 (căci A nu este nilpotentă) are loc:

Teorema 11. *Există o matrice $P \in GL_n(\mathbb{R})$ verificând*

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & N_1 \end{pmatrix},$$

unde $C_1 \in \mathrm{GL}_s(\mathbb{R})$ şi $N_1^k = 0$. Mai mult, avem $CN = NC = 0$, $A = C + N$, $\mathrm{Im}C = \mathrm{Im}C^2$ unde matricile C şi N sunt definite prin $C = P\begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}$, $N = P\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & N_1 \end{pmatrix}P^{-1}$.

Demonstraţie. Fie $\{e_1 \dots e_s\}$ o bază a spaţiului $\mathrm{Im}A^k$, $\{e_{s+1} \dots e_n\}$ o bază a spaţiului $\mathrm{Ker}A^k$ şi P matricea de trecere de la baza canonică la baza $\{e_1 \dots e_n\}$. Spaţiile $\mathrm{Im}A^k$ şi $\mathrm{Ker}A^k$ fiind stabile pentru endomorfismul A fie: $C_1 : \mathrm{Im}A^k \to \mathrm{Im}A^k$, $x \mapsto Ax$, în baza $\{e_1 \dots e_s\}$ şi $N_1 : \mathrm{Ker}A^k \to \mathrm{Ker}A^k$, $x \mapsto Ax$ în baza $\{e_{s+1} \dots e_n\}$. Avem atunci

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & N_1 \end{pmatrix}.$$

Mai mult, $N_1^k : \mathrm{Ker}A^k \to \mathrm{Ker}A^k$, $x \mapsto A^k x$, deci $N_1^k = 0$.

La fel endomorfismul $C_1^k : \mathrm{Im}A^k \to \mathrm{Im}A^k$, $x \mapsto A^k x$ este injectiv, deci bijectiv, căci $\mathrm{Im}A^k \cap \mathrm{Ker}A^k = \{0\}$; C_1^k este inversibilă şi deci $C_1 \in \mathrm{GL}_s(\mathbb{R})$. Pe de altă parte: $CN = NC = 0$ şi $A = C + N$ (evident), unde C este matricea endomorfismului lui $\mathbb{R}^n$ definit prin $C : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto Ax_1$, unde $x = x_1 + x_2$ cu $x_1 \in \mathrm{Im}A^k$ şi $x_2 \in \mathrm{Ker}A^k$. Deci $\mathrm{Im}C = \mathrm{Im}A^k$; la fel pentru C^2. Rezultă $\mathrm{Im}C = \mathrm{Im}C^2 = \mathrm{Im}A^k$.

Deducem imediat:

Corolarul 12. *Sistemul (S) admite o soluţie unică: $X = C'$ cu notaţile din partea* I.

Demonstraţie. Cu

$$C' = P\begin{pmatrix} C_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}$$

(vezi partea I) verificăm imediat că $AC' = C'A$,

$$C'^2A = P\begin{pmatrix} C_1^{-2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1} = P\begin{pmatrix} C_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1} = C'$$

şi

$$A^{k+1}C' = P\begin{pmatrix} C_1^{k+1} & 0 \\ 0 & N_1^{k+1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1} =$$

$$= P\begin{pmatrix} C_1^{k+1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1} = P\begin{pmatrix} C_1^{k} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1} = P\begin{pmatrix} C_1^{k} & 0 \\ 0 & N_1^k \end{pmatrix}P^{-1} = A^k.$$

Deducem corolarul 12, soluţia sistemului (S) fiind unică (teorema 9). Vom nota cu A'' această unică soluţie. Spectrul $\mathrm{Sp}A''$ al matricei A'' este dat de

Teorema 13. *Spectrul matricei A fiind* $\{\lambda_1 \neq 0,\ldots,\lambda_s \neq 0, \lambda_{s+1} = \ldots \lambda_n = 0\}$, *spectrul matricei* A'' *este* $\left\{\mu_1 = \dfrac{1}{\lambda_1}, \ldots, \mu_s = \dfrac{1}{\lambda_s}, \mu_{s+1} = \ldots = \mu_n = 0\right\}$.

Demonstraţie. $\chi(M)(X)$ fiind polinomul caracteristic al matricei $M \in \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avem, ţinând seama de teorema 11:

$$\chi(A)(X) = \chi(C_1)(X)\chi(N_1)(X) = X^{n-s}\chi(C_1)(X)$$

matricea N_1 fiind nilpotentă şi $\chi(A'')(X) = X^{n-s}\chi(C_1^{-1})(X)$. Matricea C_1 inversibilă având pentru spectru $\mathrm{S_p}C_1 = \{\lambda_1 \neq 0, \ldots, \lambda_s \neq 0\}$ deducem

$$\mathrm{S_p}C_1^{-1} = \left\{\mu_1 = \frac{1}{\lambda_1}, \ldots \mu_s = \frac{1}{\lambda_s}\right\},$$

ceea ce încheie demonstraţia teoremei 13.

Pentru calculul matricei A'' ne propunem să demonstrăm că există un polinom $Q \in \mathbb{R}[X]$ verificând $Q(A) = A''$. Având $CN = NC$, formula binomului conduce la $(C+N)^m = C^m + N^m$, pentru orice $m \in \mathbb{N}$, deci:

$$\forall\, Q \in \mathbb{R}[X], \quad Q(A) = Q(C) + Q(N) = P\begin{pmatrix} Q(C_1) & 0 \\ 0 & Q(N_1) \end{pmatrix}P^{-1}.$$

În consecinţă

$$Q(A) = A'' \Leftrightarrow Q(C_1) = C_1^{-1} \quad \text{şi} \quad Q(N_1) = 0.$$

Teorema 14. *Există un polinom* $Q \in \mathbb{R}[X]$ *verificând* $Q(A) = A''$.

Demonstraţie. Polinomul caracteristic $Q_1(X)$ al matricei C_1 nu admite pe 0 ca rădăcină, matricea C_1 fiind inversibilă. Deci polinoamele $Q_1(X)$ şi X^{k+1} sunt polinoame prime între ele, teorema lui *Bézout* asigură că există două polinoame $U(X)$ şi $V(X)$ verificând: $U(X)Q_1(X) + V(X)X^{k+1} = 1$. Din teorema lui *Cayley-Hamilton* avem că $Q_1(C_1) = 0$ şi deci $V(C_1)C_1^{k+1} = I$. Fie $Q(X) = V(X)X^k$; avem $Q(C_1) = V(C_1)C_1^k = C_1^{-1}$ şi $Q(N_1) = 0$ – căci $N_1^k = 0$. Rezultă $Q(A) = A''$.

Exemplu numeric

Matricea

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

este matricea asociată polinomului caracteristic al lui A:

$$\chi(A)(X) = X^4 - 2X^3 + X^2 = X^2(X-1)^2.$$

Aici, $k = 2$, $Q_1(X) = (X-1)^2$. Căutând polinoamele $U(X)$ şi $V(X)$ astfel ca $U(X)(X-1)^2 + V(X)X^3 = 1$ găsim $U(X) = 3X^2 + 2X + 1$ şi $V(X) = -3X + 4$. Deducem, deci, ţinând seama de teorema 14:

$$A'' = A^2V(A) = A^2(-3A + 4I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Partea a III-a: Aplicaţie

Fie ecuaţia diferenţială

$$(\mathcal{E})\ \ LX' + MX = 0,$$

unde $L \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ şi X este o funcţie de variabila reală t cu valori în $\mathbb{R}^n$. Generalizarea din partea II ne va permite să rezolvăm această ecuaţie, în anumite condiţii. Să distingem două cazuri:.

Cazul 1: $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$

În acest caz avem:

Teorema 15. *Există o matrice inversibilă P astfel încât X este soluţia ecuaţiei $(\mathcal{E})$ dacă şi numai dacă $Y = P^{-1}X$ este soluţie fie a ecuaţiei diferenţiale $Y = N_1 Y'$ (cazul* a)), *fie a ecuaţiei*

$$Y = \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & N_1 \end{pmatrix} Y',$$

(*cazul* b), *unde N_1 este nilpotentă şi $C_1 \in \mathrm{GL}_s(\mathbb{R})$ pentru un s convenabil ales.*

Demonstraţie. Avem echivalenţa

$$(\mathcal{E})\quad LX' + MX \Leftrightarrow X = AX',$$

unde $A = -M^{-1}L$.

• Dacă A este nilpotentă obţinem:

$$(\mathcal{E})\quad LX' + MX = 0 \Leftrightarrow Y = N_1 Y',$$

unde $Y = X$ $(P = I)$ şi $N_1 = A$.

• Dacă A nu este nilpotentă, fie P o matrice inversibilă astfel ca

$$P^{-1}AP \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & N_1 \end{pmatrix}$$

(vezi teorema 11). (Matricea A nu este inversibilă căci $L \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$).

În acest caz avem

$$(\mathcal{E})\quad LX' + MX = 0 \Leftrightarrow PY = APY' \Leftrightarrow Y = P^{-1}APY' = \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & N_1 \end{pmatrix} Y'.$$

Teorema 15 este demonstrată. Deducem cele două propoziţii următoare:

Propoziţia 16. *În cazul a) – A este nilpotentă – singura soluţie a ecuaţiei $(\mathcal{E})$ este: $X(t) = 0$*

Demonstraţie. În acest caz avem de rezolvat ecuaţia $Y = N_1 Y'$. Deoarece N_1 este nilpotentă, această matrice este triangularizabilă pe corpul $\mathbb{R}$: deci există $R \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ astfel încât

$$R^{-1}N_1R = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots\cdots\cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} \ \ \ldots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Cu $Z = R^{-1}Y$ obţinem sistemul:

$$Z_1 = a_{12}Z_2' + \ldots + a_{1n}Z_n', \ldots, Z_{n-1} = a_{n-1\,n}Z_n', Z_n = 0,$$

de unde $Z_1 = 0 \ldots Z_{n-1} = 0$, $Z_n = 0$; fie $Z = 0$ deci $Y = 0$ şi, în final, $X = 0$.

Observaţie. Nu putem scrie $Y = N_1^k Y^{(k)}$ căci nimic nu garantează că Y este suficient derivabilă .

Propoziţia 17. *În cazul b) ecuaţia diferenţială* $(\mathcal{E})$ *admite pentru orice* $a \in \mathrm{Co}(A)$, $\mathrm{Co}(A) = \mathrm{Im}A^k$ *(vezi definiţia după propoziţia* 10, *pagina* 202) *– o soluţie unică trecând prin punctul* $(0, a) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$: $X(t) = \exp(tA'')a$ *unde* A'' *este unica matrice definită la corolarul* 12. *Mai mult, pentru orice* $t_0 \in \mathbb{R}$ *problema Cauchy relativ la punctul* (t_0, a) *admite o soluţie dacă şi numai dacă* $a \in Co(A)$ *(pentru orice* $t_0 \in \mathbb{R}$ *şi pentru fiecare* $a \in \mathrm{Co}(A)$ *ecuaţia diferenţială* $(\mathcal{E})$ *admite o soluţie unică trecând prin punctul* $(t_0, a) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : X(t) = \exp[(t - t_0)A'']a)$.

Demonstraţie. a) Fie $a \in \mathrm{Co}(A)$, $a = A''b$ $(\mathrm{Im}A^k = \mathrm{Im}A'' = \mathrm{Co}(A))$. Notând cu $X(t) = \exp(tA'')a = \exp(tA'')A''b$, deducem $X'(t) = \exp(tA'')A''^2b$, de unde $AX'(t) = AA''^2\exp(tA'')b = A''\exp(tA'')b = \exp(tA'')a = X(t)$, matricile A'' şi $\exp(tA'') = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!}A''m$ comutând. Mai mult – cu notaţiile de la propoziţia 15 – deducem ultima afirmaţie din propoziţia 17, căci sistemul diferenţial :

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & N_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1' \\ Y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & Y_1' \\ N_1 & Y_2' \end{pmatrix}$$

conduce la $Y_1 = C_1Y_1'$ şi $Y_2 = N_1Y_2'$ unde $C_1 \in \mathrm{GL}_s(\mathbb{R})$ şi N_1 este nilpotentă. Avem, deci, imediat $Y_1(t) = \exp[(t-t_0)C_1^{-1}]Y_1(t_0)$ – sistem diferenţial cu coeficienţii constanţi –, $Y_2(t) = 0$ (propoziţia 16).

Această propoziţie conduce la corolarul următor:

Cazul 2: $M \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$

Corolarul 18. • *Dacă există* $\alpha \in \mathbb{R}$ *astfel ca matricea* $\alpha L + M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ *atunci pentru orice* $t_0 \in \mathbb{R}$ *şi pentru fiecare* $a \in \mathrm{Co}(A)$, unde $A = -(\alpha L + M)^{-1}L$, *ecuaţia diferenţială* $(\mathcal{E})$ *admite o soluţie unică trecând prin punctul* $(t_0, a) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Demonstraţie. Într-adevăr cu $Z(t) = e^{-\alpha t}X(t)$ de unde $X(t) = e^{\alpha t}Z(t)$ avem: $X'(t) = e^{\alpha t}[\alpha Z(t) + Z'(t)]$. Deducem

$$(\mathcal{E}) \quad LX' + MX = 0 \Leftrightarrow L(\alpha Z + Z') + MZ = 0 \Leftrightarrow LZ' + (\alpha L + M)Z = 0$$

şi astfel am redus ecuaţia $(\mathcal{E})$ la cea rezolvată la propoziţile 16) sau 17).

• Dacă pentru orice $\alpha, \alpha L + M \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ atunci fie $n + 1$ numere reale distincte $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ – deci matricile $\alpha_i L + M \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ pentru $i = 0, \ldots, n$. Avem atunci :

Propoziţia 19. *Cu această ipoteză ecuaţia* $(\mathcal{E})$ *admite soluţii trecând prin punctul* $(0, 0)$ *diferite de soluţia* $X(t) = 0$*; acestea sunt funcţiile de forma*:

$$X(t) = \sum_{i=0}^{n} x_i \mathrm{e}^{\alpha_i t},$$

unde $x_i \in \mathrm{Ker}(\alpha_i L + M)$, $\sum_{i=0}^{n} x_i = 0$.

Demonstraţie. Pentru $i = 0, \ldots, n$ matricile $\alpha_i L + M$ nefiind inversibile, subspaţiile vectoriale $\mathrm{Ker}(\alpha_i L + M)$ sunt de dimensiune 1 cel puţin şi avem $n+1$ astfel de subspaţii. Deci aceste subspaţii nu sunt în sumă directă şi putem găsi x_i, nu toţi nuli, verificând $\sum_{i=0}^{n} x_i = 0$, $x_i \in \mathrm{Ker}(\alpha_i L + M)$.

Fie atunci $X(t) = \sum_{i=0}^{n} x_i \mathrm{e}^{\alpha_i t}$; atunci $X'(t) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x_i \mathrm{e}^{\alpha_i t}$.

Funcţia $X(t) = \sum_{i=0}^{n} x_i \mathrm{e}^{\alpha_i t}$ nu poate fi identic nulă căci funcţiile $t \mapsto \mathrm{e}^{\alpha_i t}$, $i = 0, \ldots, n$ sunt liniar independente. Pe de altă parte

$$LX'(t) + MX(t) = \sum_{i=0}^{n} (\alpha_i L + M) x_i \mathrm{e}^{\alpha_i t} = 0$$

şi $X(0) = 0$, căci $\sum_{i=0}^{n} x_i = 0$.

Deci în acest caz *problema lui Cauchy relativ la punctul* $(0,0)$ *nu admite o soluţie unică*. Deducem o condiţie necesară şi suficientă pentru ca matricea $\alpha L + M$ să fie *singulară* pentu orice real α. Această condiţie este dată de

Teorema 20. *Următoarele două aserţiuni sunt echivalente*:
i) *pentru orice* $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha L + M \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$;
ii) *există* $n+1$ *numere reale distincte* $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ *astfel ca matricile* $\alpha_i L + M \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ *pentru* $i = 0, \ldots, n$

Demonstraţie. i) $\Rightarrow$ ii) Trivial.

ii) $\Rightarrow$ i) **Prima demonstraţie**. Presupunând că există α astfel ca $\alpha L + M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, deducem din teoremele 16 şi 17 **Cazul 1**, $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ – că problema *Cauchy* relativ la punctul $(0,0)$ admite o *unică soluţie* ceea ce contrazice propoziţia 19.

A doua demonstaţie. $\alpha \mapsto \det(\alpha L + M)$ este o *funcţie polinomială* de grad inferior sau egal cu n şi admite $n+1$ rădăcini. Deci această *funcţie este identic nulă* ceea ce încheie demonstraţia teoremei 20.

Bibliografie

[1] A. Reisner, *Pseudoinversă şi inversă a unei aplicaţii liniare*, Recreaţii maatematice, iulie-decembrie 2006, pag. 97-101.

[2] L. Chambadal, J. L. Ovaert, *Algèbre linéaire tensorielle*, Dunod Paris, *Nilespace et cœur d'un endomorphisme Exercice 24 B* pag. 456.

Centrul de Calcul E. N. S. T.,
Paris
Adrien.Reisner@enst.fr

Generalizări ale inegalităţilor lui Young, Hölder, Rogers şi Minkovski

DE DORIN MĂRGHIDANU

Abstract

We present a short proof of the generalized Young inequality. This allows an unitary exposition of generalizations of the Hölder, Rogers, Cauchy-Buniakovski-Schwarz and Minkowski inequalities.

Key words: Young, Jensen, Hölder, Rogers and Minkowski inequalities.

M.S.C.: 26D15.

§1. O generalizare a inegalităţii lui Young

Este binecunoscută inegalitatea lui Young, [1]- [4], [12] - [15]:

• pentru numerele reale $a, b \geq 0$ şi $p, q > 1$, astfel încât $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, are loc relaţia

$$a \cdot b \leq \frac{1}{p} \cdot a^p + \frac{1}{q} \cdot b^q, \tag{1}$$

cu egalitate dacă $a^p = b^q$.

Cu ajutorul ei, se compară produsul a două numere cu o sumă specială a celor două numere (mai precis, cu o combinaţie convexă de puteri a celor două numere).

Prin aplicaţiile sale, inegalitatea lui *Young* se dovedeşte a fi poate cea mai importantă dintre inegalitaţile clasice. Din ea derivă – cum se va vedea şi în continuare – inegalitatea mediilor şi inegalitatea lui *Hölder*, iar din inegalitatea lui *Hölder* rezultă inegalitatea lui *Minkowski*.

1.1. Definiţie. *Numerele reale p, q, pentru care* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*, se mai numesc şi numere (Hölder) conjugate.*

Observaţie. Pentru numere (*Hölder*) conjugate are loc următoarea echivalenţă:

$$(p > 0) \text{ şi } (q > 0) \Leftrightarrow (p > 1) \text{ şi } (q > 1),$$

deoarece relaţia din definiţie se mai scrie echivalent, $q = \frac{p}{p-1}$ etc.

O extindere naturală a acestei definiţii se impune prin următoarea

1.2. Definiţie. *Numerele reale* $p_1, p_2, \ldots, p_n > 1$ *se numesc Hölder-conjugate, dacă şi numai dacă, prin definiţie avem* ,

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \ldots + \frac{1}{p_n} = 1.$$

O formulare firească şi generală a inegalităţii lui *Young* este surprinsă în

1.3. Propoziţie (inegalitatea lui Young generalizată). *Dacă* $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 0$ *şi* $p_1, p_2, \ldots, p_n > 1$*, sunt numere Hölder-conjugate, atunci*

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \leq \frac{1}{p_1} \cdot a_1^{p_1} + \frac{1}{p_2} \cdot a_2^{p_2} + \ldots + \frac{1}{p_n} \cdot a_n^{p_n}, \tag{2}$$

cu egalitate dacă şi numai dacă $a_1^{p_1} = a_2^{p_2} = \ldots = a_n^{p_n}$.

Demonstraţie. Utilizăm inegalitatea ponderată a lui *Jensen* pentru funcţii concave:

• dacă $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie concavă, I -interval, atunci

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} w_k x_k\right) \geqslant \sum_{k=1}^{n} w_k f(x_k),\ w_k > 0,\ x_k, \sum_{k=1}^{n} w_k x_k \in I, \sum_{k=1}^{n} w_k = 1. \tag{3}$$

Folosind concavitatea funcţiei logaritmice cu bază $b > 1$ şi inegalitatea (3), în aranjarea

$$\log_b a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = \frac{1}{p_1}\log_b a_1^{p_1} + \frac{1}{p_2}\log_b a_2^{p_2} + \ldots + \frac{1}{p_n}\log_b a_n^{p_n} \leq$$

$$\leq \log_b\left(\frac{1}{p_1}\cdot a_1^{p_1} + \frac{1}{p_2}\cdot a_2^{p_2} + \ldots + \frac{1}{p_n}\cdot a_n^{p_n}\right),$$

cu monotonia functiei $\log b$, se obţine inegalitatea din enunţ. Asemănător, se poate demonstra folosind inegalitatea lui *Jensen* pentru funcţia convexă $f(x) = \mathrm{e}^x$.

Pentru alte demonstraţii vezi şi [1] [4] , [13] , [14] .

1.4. Corolar. *Dacă* $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, *atunci*

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \leq \frac{1}{n}\cdot(a_1^n + a_2^n + \ldots + a_n^n), \tag{4}$$

cu egalitate dacă şi numai dacă $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Demonstraţie. Dacă în (2) luăm $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = n$ (evident, *Hölder*-conjugate) se obţine inegalitatea din enunţ.

Dacă, în plus, în (4) luăm $x_i = \sqrt[n]{a_i}$, $i = \overline{1,n}$, deducem

1.5. Corolar (inegalitatea clasică a mediilor). Are loc inegalitatea

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} \leq \frac{1}{n}\cdot(x_1 + x_2 + \ldots + x_n), \tag{5}$$

penru orice $x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Putem obţine, ceva mai general

1.6. Propoziţie (inegalitatea ponderată a mediilor). *Dacă* $x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ *şi* $0 < q_1, q_2, \ldots, q_n < 1$, $q_1 + q_2 + \ldots + qn = 1$, *atunci*

$$x_1^{q_1} \cdot x_2^{q_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{q_n} \leq q_1 x_1 + q_2 x_2 + \ldots + q_n x_n. \tag{6}$$

Demonstraţie. Inlocuind în inegalitatea lui *Young* generalizată : $a_1 = x_1^{q_1}$, $a_2 = x_2^{q_2}$, ..., $a_n = x_n^{q_n}$ şi $\frac{1}{p_1} = q_1$, $\frac{1}{p_2} = q_2$, ..., $\frac{1}{p_n} = q_n$ echivalent cu

$$p_1 q_1 = 1,\ p_2 q_2 = 1, \ldots, p_n q_n = 1, \tag{7}$$

obţinem :

$$x_1^{q_1} \cdot x_2^{q_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{q_n} \leq \frac{1}{p_1}\cdot(x_1^{q_1})^{p_1} + \frac{1}{p_2}\cdot(x_2^{q_2})^{p_2} + \ldots + \frac{1}{p_n}\cdot(x_n^{q_n})^{p_n} =$$

$$= q_1x_1 + q_2x_2 + \ldots + q_nx_n.$$

În fapt, obţinem ceva mai mult:

1.7. Corolar. *Inegalitatea generalizată a lui Young şi inegalitatea ponderată a mediilor sunt echivalente* (*în sensul că fiecare o implică pe cealaltă*).

Demonstraţie. Prin demonstraţia Propoziţiei 1.6., am demonstrat de fapt implicaţia Inegalitatea generalizată a lui *Young* $\Rightarrow$ inegalitatea ponderată a mediilor.

Cu aceleaşi substituţii (7), se demonstrează foarte uşor şi implicaţia contrară. Alte demonstraţii pentru inegalitatea mediilor – sau echivalenţe ale sale cu alte inegalităţi sunt prezentate şi în [8] [11] .

§2. Inegalitatea lui Hölder generalizată

Forma clasică a inegalităţii lui *Hölder* (v.[1]- [6], [13], [14]) este:

• dacă $a_i, b_i \geq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ şi $p, q > 1$ sunt numere *Hölder*-conjugate, atunci :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}, \tag{8}$$

cu egalitate când $\frac{a_i^p}{b_i^q} = \frac{a_j^p}{b_j^q}$, $i, j = \overline{1, n}$, $i \neq j$. Daca fie p, fie q este negativ, atunci în (8) se schimba sensul inegalitaţii.

Utilizând generalizarea inegalităţii lui *Young* din Propoziţia 1.3., vom oferi o demonstraţie şi pentru forma generală a inegalităţii lui *Hölder*, valabilă pentru mulţimi de numere *Hölder*-conjugate oarecare.

Pentru aceasta avem nevoie de următorul rezultat premergător :

2.1. Lemă. *Fie* $a_{ij} \geq 0$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$ *şi* $p_1, p_2, \ldots, p_m > 1$ *numere Hölder-conjugate. Dacă* $\sum_{i=1}^{n} a_{i1}^{p_1} = \sum_{i=1}^{n} a_{i2}^{p_2} = \ldots = \sum_{i=1}^{n} a_{im}^{p_m} = 1$, *atunci*

$$\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} a_{ij} \leq 1. \tag{9}$$

Demonstraţie. Pentru $i = \overline{1, n}$, cu inegalitatea lui Young generalizată, avem

$$\prod_{j=1}^{m} a_{ij} \leq \frac{1}{p_1} \cdot a_{i1}^{p_1} + \frac{1}{p_2} \cdot a_{i2}^{p_2} + \ldots + \frac{1}{p_m} \cdot a_{im}^{p_m}.$$

Însumând după $i = \overline{1, n}$, obţinem

$$\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} a_{ij} \leq \frac{1}{p_1} \sum_{i=1}^{n} a_{i1}^{p_1} + \frac{1}{p_2} \sum_{i=1}^{n} a_{i2}^{p_2} + \ldots + \frac{1}{p_m} \sum_{i=1}^{n} a_{im}^{p_m} =$$

$$= \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \ldots + \frac{1}{p_m} = 1,$$

adică rezultatul din lemă.

2.2. Propoziţie (inegalitatea lui Hölder generalizată). *Dacă* $a_{ij} \geq 0$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$ *şi* $p_1, p_2, \ldots, p_m > 1$ sunt numere *Hölder*-conjugate, atunci

$$\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} a_{ij} \leq \prod_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^{p_j} \right)^{\frac{1}{p_j}}. \tag{10}$$

Demonstraţie. Să considerăm numerele:

$$\alpha_{ij} := \frac{a_{ij}}{\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^{p_j} \right)^{1/p_j}}, i = \overline{1,n}, j = \overline{1,m}.$$

Pentru acestea avem :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}^{p_j} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{a_{ij}}{\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^{p_j} \right)^{1/p_j}} \right)^{p_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_{ij}^{p_j}}{\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^{p_j}} = 1,$$

deci numerele α_{ij} sunt în situaţia numerelor a_{ij} din Lemă.

Prin urmare

$$\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} \alpha_{ij} \leq 1 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} \frac{a_{ij}}{\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^{p_j} \right)^{1/p_j}} \leq 1 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} a_{ij} \leq \prod_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^{p_j} \right)^{1/p_j}.$$

Notiţă istorică. Forma generală a inegalităţii lui *Hölder* a fost dată *J. L. W. V. Jensen* în 1907, cf. [1], [14] (pp.52, 78), chiar pentru o condiţie mai largă pentru p_j, $j = \overline{1,m}$, anume $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \ldots + \frac{1}{p_m} \geqslant 1$.

După [3] (p.181), sau [6], este adevărată următoarea

2.3. Propozitie (inegalitatea lui Rogers). *Dacă* $0 < r < 1$, *atunci*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^r b_i^{1-r} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right)^r \left(\sum_{i=1}^{n} b_i \right)^{1-r}. \tag{11}$$

Demonstratie. Printr-o simplă schimbare de variabile , inegalitatea lui *Rogers* este echivalentă cu inegalitatea lui *Hölder*, (8) (v. [6], sau demonstraţia mai generală ce urmează).

Nu este dificil să formulăm şi generalizarea acestei inegalităţi.

2.4. Propozitie (inegalitatea lui Rogers generalizată). *Dacă* $a_{ij} \geq 0$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$ şi $0 < r_1, r_2, \ldots, r_m < 1$ *astfel încât* $r_1 + r_2 + \ldots + r_m = 1$, *atunci*

$$\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} a_{ij}^{r_j} \leq \prod_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \right)^{r_j}. \tag{12}$$

Demonstratie. Echivalenţa dintre inegalitatea lui *Hölder* generalizată şi inegalitatea lui *Rogers* generalizată, are loc în baza substituţiilor $\dfrac{1}{p_j} = r_j$, respectiv, $a_{ij} \to a_{ij}^{1/p_j} = a_{ij}^{r_j}$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$.

Notiţă istorică. Datorită echivalenţei dintre cele două inegalităţi şi pentru că rezultatul lui *Rogers* a fost obţinut în 1888, iar al lui *Hölder* în 1889, *Maligranda* [6] consideră că inegalitatea lui *Hölder* ar trebui să fie numită inegalitatea lui *Rogers*, sau cel puţin inegalitatea lui *Rogers-Hölder*!

Nota bene. În lucrarea sa, *Hölder* a citat rezultatul lui *Rogers* !

2.5. Remarcă. Rezultatele din Lema 2.1. respectiv din Propoziţiile 2.2. şi 2.4 constituie rezultate interesante (şi în sine) pentru elementele unei matrici de n linii şi m coloane, cu componente reale pozitive.

2.6. Aplicaţie. Numerele 2, 3, 6 sunt *Hölder* - conjugate (i.e. $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6} = 1$), deci cu inegalitatea lui *Hölder* generalizată, avem

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i1}a_{i2}a_{i3} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i1}^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i2}^3\right)^{\frac{1}{3}} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i3}^6\right)^{\frac{1}{6}},$$

sau eventual, trecând la notaţiile cu un singur indice $a_{i1} \to x_i$, $a_{i2} \to y_i$, $a_{i3} \to z_i$, aceasta devine

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i z_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^3\right)^{\frac{1}{3}} \left(\sum_{i=1}^{n} z_i^6\right)^{\frac{1}{6}}. \tag{13}$$

2.7. Corolar (inegalitatea lui Cauchy-Buniakovski-Schwarz generalizată). *Dacă* $a_{ij} \geq 0$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$, $m, n \in \mathbb{N}^*$, *atunci*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} a_{ij}\right)^{m} \leq \prod_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^m\right). \tag{14}$$

Demonstraţie. Luând $p_1 = p_2 = \ldots = p_m = m$ (care evident sunt numere *Hölder* - conjugate) în inegalitatea lui *Hölder* generalizată, se obţine

$$\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} a_{ij} \leq \prod_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^m\right)^{\frac{1}{m}},$$

iar prin ridicare la puterea m, rezultă enunţul.

2.8. Remarcă. Luând în inegalitatea *C-B-S* generalizată (10) $m = 2$, se obţine inegalitatea *C-B-S* clasică.

Pentru $m = 3$, şi notaţiile din Aplicaţia 2.6., se obţine inegalitatea *C-B-S* pentru trei variabile:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i z_i\right)^3 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^3\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^3\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} z_i^3\right). \tag{15}$$

§3. Inegalitatea lui Minkowski generalizată

Ca şi inegalitatea lui *Rogers-Hölder*, inegalitatea lui *Minkowski* este prezentă în diverse capitole de algebră, analiză şi geometrie .

Forma clasică a inegalităţii lui *Minkowski* are următorul enunţ:

3.1. Propoziţie (inegalitatea lui Minkowski). Dacă $a_j, b_j \geq 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ şi $p > 1$, atunci :

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(a_j + b_j)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^{n} a_j^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^{n} b_j^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{16}$$

cu egalitate dacă şirurile $(a_i)_{i=\overline{1,n}}$, $(b_i)_{i=\overline{1,n}}$ sunt proporţionale.

Dacă $p < 1$, $p \neq 0$, inegalitatea este inversă.

Demonstraţia sa o vom urmări într-o formulare mai generală, în care apar sume de câte m termeni. Mai precis, vom enunţa şi demonstra pentru această inegalitate următoarea:

3.2. Propoziţie (inegalitatea lui Minkowski generalizată). *Dacă* $a_{ij} \geq$ ≥ 0, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$, $m, n \in \mathbb{N}^*$ şi $p > 1$, atunci

$$\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\right)^p\right)^{1p} \leq \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^p\right)^{1p}. \tag{17}$$

Pentru $p < 1$, $p \neq 0$, inegalitatea se inversează.

Demonstraţie. Vom demonstra prin inducţie după m. Pentru $m = 1$, relaţia are loc cu egalitate. Vom stărui mai mult asupra pasului $m = 2$, care este cazul esenţial al demonstraţiei, deoarece reprezintă inegalitatea clasică a lui *Minkowski* (cu notaţie modificată) şi este determinant în demonstrarea pasului inductiv. Mai exact, avem de demonstrat inegalitatea

$$\left(\sum_{j=1}^{n}(a_{1j} + a_{2j})^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^{n} a_{2j}^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{18}$$

Pentru probarea acesteia, utilizând o idee de demonstraţie a lui *Riesz* (v. [6], [13]), vom porni de la identitatea

$$\sum_{j=1}^{n}(a_{1j} + a_{2j})^p = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}\,(a_{1j} + a_{2j})^{p-1} + \sum_{j=1}^{n} a_{2j}\,(a_{1j} + a_{2j})^{p-1}$$

şi vom aplica inegalitatea lui Rogers-Hölder pentru fiecare sumă din membrul drept. Tinând cont şi de faptul că $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ este echivalent cu $(p-1)q = p$, avem

$$S := \sum_{j=1}^{n}(a_{1j} + a_{2j})^p \leq \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}^p\right)^{1/p}\left(\sum_{j=1}^{n}(a_{1j} + a_{2j})^{(p-1)q}\right)^{1/q} +$$

$$+\left(\sum_{j=1}^{n} a_{2j}^{p}\right)^{1/p}\left(\sum_{j=1}^{n}(a_{1j}+a_{2j})^{(p-1)q}\right)^{1/q}=$$

$$=\left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}^{p}\right)^{1/p}\left(\sum_{j=1}^{n}(a_{1j}+a_{2j})^{p}\right)^{1/q}+\left(\sum_{j=1}^{n} a_{2j}^{p}\right)^{1/p}\left(\sum_{j=1}^{n}(a_{1j}+a_{2j})^{p}\right)^{1/q}=$$

$$=\left[\left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}^{p}\right)^{1/p}+\left(\sum_{j=1}^{n} a_{2j}^{p}\right)^{1/p}\right]\left(\sum_{j=1}^{n}(a_{1j}+a_{2j})^{p}\right)^{1/q}=$$

$$=\left[\left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}^{p}\right)^{1/p}+\left(\sum_{j=1}^{n} a_{2j}^{p}\right)^{1/p}\right]\cdot S^{1/q}.$$

Împărţind inegalitatea obţinută prin $S^{1/q}$, se obţine inegalitatea (18).

Presupunem adevarată inegalitatea (17) în cazul m şi vom demonstra că este adevărată şi în cazul $m+1$. Într-adevăr, folosind cazul $m = 2$, demonstrat mai sus şi ipoteza de inducţie, avem succesiv

$$\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m+1} a_{ij}\right)^{p}\right)^{1p}=\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}+a_{m+1j}\right)^{p}\right)^{1p}\leq$$

$$\leq\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\right)^{p}\right)^{1p}+\left(\sum_{j=1}^{n} a_{m+1j}^{p}\right)^{1p}\leq$$

$$\leq\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{p}\right)^{1p}+\left(\sum_{j=1}^{n} a_{m+1j}^{p}\right)^{1p}=\sum_{i=1}^{m+1}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{p}\right)^{1p},$$

ceea ce încheie definitiv demonstraţia prin inducţie .

3.3. Remarcă finală. Toate inegalităţile anterioare, exprimate în cazul discret, pot fi transpuse în inegalităţi integrale.

Bibliografie

[1] E. F. Beckenbach & R. Bellman R, *Inequalities*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg - New-York, 1961 .

[2] P. S. Bullen & D. S. Mitrinović & P. M. Vasić, *Means and Their Inequalities*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht/Boston, 1988 .

[3] P. S. Bullen, *Handbook of Means and Their Inequalities*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London, 2003.

[4] G. H. Hardy & J. E. Littlewood & G. Polya, *inequalities* , 2- nd ed., Cambridge University Press, England, Cambridge (reprinted), 1988.

[5] L. Maligranda, *A simple proof of the Hölder and Minkowski inequality*, Amer. Math. Monthly, 102, pp.256-259, 1995.

[6] L. Maligranda, *Why Hölder's inequality should be called Rogers' inequality*, Math. Ineq. App., 1, pp.69-73, 1998.

[7] D. Mărghidanu, M. Bencze, *New Proofs for AM - GM and Pondered AM - GM Inequalities*, in OCTOGON Mathematical Magazine, Vol.12, nr. 1, April , pp. 233-235, 2004.

[8] D. Mărghidanu, *Inegalitatea lui Lagrange este echivalentă cu inegalitatea mediilor*, în ARHIMEDE, nr. 3-4 , pp. 17-19, 2005.

[9] D. Mărghidanu, M. Bencze, *New Means and Refinements for AM-GM-HM Inequalities*, în OCTOGON Mathematical Magazine, Vol 13, No. 2, pp.999-1001, October, 2005.

[10] D. Mărghidanu, M. Bencze, *A new Proof for AM-GM Inequalitiy*, în OCTOGON Mathematical Magazine, Vol 13, No. 2, pp.1021-1026, October, 2005.

[11] D. Mărghidanu, *O demonstraţie a inegalităţii mediilor (pornind de la o problema din Crux Mathematicorum)* , Revista de Matematică din Timişoara, anul XI , (Seria a IV-a), pp. 6-7, nr. 1/2006.

[12] D. Mărghidanu, *O generalizare ale inegalităţii lui Young*, (va apare).

[13] D. S. Mitrinović (in coop. with P. M. Vasić), *Analytic Inequalities*, Band 165, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New-York, 1970.

[14] D. S. Mitrinovic & J. E. Pečarić, *Srednje Vrednosti u Matematici*, Naucna Knjiga, Beograd, 1989 (în sârbo-croată).

[15] W. H. Young, *On classes of summable functions and their Fourier series*, Proc. Royal Soc. London, A 87, pp.225-229, 1912.

Profesor dr.,
Colegiul Naţional „Al. I. Cuza"
d.marghidanu@gmail.com

How many disjoint subsets with a given sum of elements can $\{1, 2, \ldots, n\}$ have?

DE GABRIEL DOSPINESCU ŞI MARIAN TETIVA

Abstract

This note contains some results about partitioning a set of natural numbers into subsets having equal sums of their elements.

Key words: partition of a finite set.
M.S.C.: 05A05.

Maybe you have noticed, maybe not: the second author of this note loves Kvant's problem **M1115** (part b) (obsessively?). We remind that the problem states that for positive integers m, n and k such that $mk = 1 + \cdots + n$ and $n \geq 2k - 1$ (which is equivalent to $m \geq 2k-1$), the set $\{1, \ldots, n\}$ of the first n positive integers can be partitioned into k subsets, each having the same sum of elements (the sum m, evidently). In fact this happens if and only if k divides $1 + \cdots + n$ and $n \geq 2k + 1 \Leftrightarrow m \geq 2k - 1$ (see [1],[3]). Thinking and thinking about this problem we arrived to the following:

Proposition. *Let n, m and k be positive integers satisfying $m \geq 2k - 1$ and*

$$mk \leq 1 + 2 + \cdots + n.$$

Then m can be expressed in (at least) k different ways as the sum of some integers from $\{1, \ldots, n\}$, such that all the summands (from all the k expressions of m) are mutually distinct.

From here one can infer the following generalization of the old contest problem that appeared as **M1115b**: if n and k are positive integers with $n \geq 2k-1$ and $\dfrac{n(n+1)}{2}$ leaves remainder r when divided by k, then the set of the first n positive integers, excepting r, can be split into k disjoint subsets such that the sum of elements of any of this subsets is the same. In what follows we intend to present the proof for this generalization of **M1115**. But before that, we must say that a far more general result stands, being proved in [2]; namely, this is the following beautiful

Theorem. *Let k, n, and $m_1 \geq \ldots \geq m_k$ be positive integers such that $m_1 + \cdots + m_k = \dfrac{n(n+1)}{2}$ and $m_{k-1} \geq n$. Then $\{1, \ldots, n\}$ can be partitioned as $S_1 \cup \ldots \cup S_k$ in such a way that $\sum\limits_{x \in S_i} x = m_i$ for any $1 \leq i \leq k$.*

Unfortunately, the proof itself of the theorem is much more complicated (it uses graph theory) than what we are going to do. We invite the interested reader to see this proof in [2] and to understand how the theorem implies the proposition, and we hope that he or she will enjoy the proof of the particular case that we present further (proof which is based on the same ideas from [1]).

Proof of the proposition. We show the result by induction on n. There is nothing to prove for $n = 1$ (only $m = k = 1$ is then possible), so we assume the claim to be true for all positive integers less than n and show its validity for n. We distinguish between several cases concerning m.

First we observe that the given relations imply

$$n(n+1) \geq (2k-1)2k \Rightarrow n \geq 2k-1$$

and that for $m = 2k-1$ the expressions

$$m = 2k-1 = (2k-2)+1 = \ldots = k+(k-1)$$

solve the problem (the numbers $1, 2, \ldots, 2k-1$ are from the set $\{1, \ldots, n\}$). Also, if $m = 2k$ it follows that $n \geq 2k$ and we are done with the equalities

$$m = 2k = (2k-1)+1 = \ldots = (k+1)+(k-1);$$

therefore, we may assume $m > 2k$.

The first case is when $m \leq n+1 \Leftrightarrow m-1 \leq n$, when the numbers $1, \ldots, m-1$ are among the first n positive integers. Now the relations

$$m = (m-1)+1 = \ldots = (m-k)+k$$

are those that we need, since $m-k > k$.

The case $m \geq 2n$ is also relatively simple, but now we need to appeal the induction hypothesis. We may write

$$mk \leq 1+2+\ldots+n$$

as

$$mk \leq 1+\ldots+(n-2k)+(n-2k+1)+\ldots+n,$$

or

$$mk \leq 1+\ldots+(n-2k)+k(2n-2k+1 \Leftrightarrow (m-2n+2k-1)k \leq 1+\ldots+(n-2k).$$

According to the recurrence assumption (which may be used, since $m-2n+2k-1 \geq 2k-1$ and $n-2k < n$) it is possible to express $m-2n+2k-1$ as k sums with (all) distinct terms from $\{1, \ldots, n-2k\}$. If to any of these expressions we add one of the k pairs

$$\{n, n-2k+1\}, \ldots, \{n-k+1, n-k\}$$

(each having the sum $2n-2k+1$) we obtain exactly k expressions of m with distinct terms from $\{1, \ldots, n\}$.

It remains to see what happens when $n+1 < m < 2n$; in this case we have $0 < m-n < n$ and it is natural to try to decrease n using equalities like

$$m = (m-n)+n = (m-n+1)+(n-1) = \ldots = (m-n+s-1)+(n-s+1)$$

with s as big as possible. In fact it is easy to see that the biggest possible s (for which $m-n+s-1 \leq n-s+1$, ensuring that all the numbers are from the set $\{1, \ldots, n\}$) is

$$s = \left[n - \frac{m}{2}\right] + 1,$$

where $[x]$ denotes the integer part of x. And that if m is odd precisely all numbers from $m-n$ to n are involved in these equalities (each one time) and they form s pairs with the sum m; hence in this case we have

$$mk \leq 1+2+\ldots+n \Leftrightarrow mk \leq 1+\ldots+(m-n-1)+(m-n)+\ldots+n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow mk \leq 1+\ldots+(m-n-1)+sm \Leftrightarrow m(k-s) \leq 1+\ldots+(m-n-1).$$

(Of course, we are done if $s \geq k$, so we suppose $k > s$.) Now we use again the induction hypothesis, for the number $m-n-1$ instead of n and $k-s$ in place of k; m is the same, so the relation $m \geq 2(k-s)-1$ follows from $m \geq 2k-1$. According to this, there are $k-s$ expressions of m as sums of different summands from the set $\{1, \ldots, n-m-1\}$; together with the above s expressions of m (with terms from $\{m-n, \ldots, n\}$), we have again k expressions as requested for m.

One more case is yet to consider, namely $n+1 < m < 2n$, but now m is even. In this situation the numbers from

$$m = (m-n)+n = (m-n+1)+(n-1) = \ldots = (m-n+s-2)+(n-s+2)$$

are all the numbers from $m-n$ to n, $\frac{m}{2} = m-n+s-1 = n-s+1$ excepted, so we obtain

$$mk \leq 1+\ldots+(m-n-1)+(s-1)m+\frac{m}{2}$$

(there are $s-1$ groups with sum m); consequently,

$$(2k-2s+1)\frac{m}{2} \leq 1+\ldots+(m-n-1).$$

The number n is diminished to $m-n-1$ ($m < 2n < 2n+1$) and we could apply the induction hypothesis if we had

$$\frac{m}{2} \geq 2(2k-2s+1)-1$$

($\frac{m}{2}$ is in place of m and $2k-2s+1$ in place of k). Since in this case $\frac{m}{2}$ is an integer, we have $s = n - \frac{m}{2} + 1$ and this inequality becomes

$$m \geq 8k - 8\left(n - \frac{m}{2} + 1\right) + 2 \Leftrightarrow 8n+6 \geq 8k+3m.$$

To prove it, remember first that $k \leq \frac{n(n+1)}{2m}$, therefore

$$8k+3m \leq \frac{4n(n+1)}{m} + 3m,$$

then consider the function $f : (0,\infty) \to (0,\infty)$ defined by

$$f(x) = \frac{4n(n+1)}{x} + 3x, \ x > 0$$

(suppose, for the moment, that n is fixed) and observe that it has exactly one minimum point in the interval $(0,\infty)$ (like any function of the form $f(x)=\dfrac{A}{x}+Bx$, for positive A and B), therefore its maximum value in any compact interval included in $(0,\infty)$ is attained at one of its endpoints. In our case, we have

$$f(x)\le\max\{f(n),f(2n)\}=\max\{7n+4,8n+2\}<8n+6$$

for any $x\in[n,2n]$, hence

$$8k+3m\le\frac{4n(n+1)}{m}+3m<8n+6$$

for any m between n and $2n$, and our inequality is proved.

So, we can apply the induction hypothesis, for the numbers $m-n-1$, $\dfrac{m}{2}$, $2k-2s+1$ instead of n, m, k respectively (of course, we do this only if $2k-2s+1>0$; else we have $k\le s-1$ and the $s-1$ pairs $(m-n,n)=\left(\dfrac{m}{2}-s+1,\dfrac{m}{2}+s-1\right),\ldots$ $\ldots,(m-n+s-2,n-s+2)=\left(\dfrac{m}{2}-1,\dfrac{m}{2}+1\right)$ suffice for our purpose) to find that there are $2k-2s+1$ expressions of $\dfrac{m}{2}$ as sums of distinct numbers from the set $\{1,\ldots,m-n-1\}$. Together with the number $\dfrac{m}{2}$ itself (which has not been used in the mentioned $s-1$ expressions of m with numbers from $\{m-n,\ldots,n\}$) $2k-2s+2$ groups with sum $\dfrac{m}{2}$ arise, which yield precisely $k-s+1$ groups with sum m (if we associate them two by two in a certain way) and these $k-s+1$ groups with the previous $s-1$ are the k desired expressions of m in this case, completely closing the proof.

As concerns the remark following the enounce of the proposition, it is quite simple now, that we have the first part at our disposal. Indeed, we consider $m=\left[\dfrac{n(n+1)}{2k}\right]$ (the square brackets denote the integral part), for which we have

$$m\ge\left[\frac{(2k-1)(2k-1+1)}{2k}\right]=2k-1$$

(since $n\ge 2k-1$) and, obviously,

$$m\le\frac{n(n+1)}{2k}\Leftrightarrow mk\le 1+\ldots+n.$$

Thus, the previously proved result may be used and it yields the existence of k sums of different numbers from $\{1,\ldots,n\}$, all sums being equal to m. The numbers from $\{1,\ldots,n\}$ that do not participate to any of these sums have then the sum

$$1+\ldots+n-km=\frac{n(n+1)}{2}-k\left[\frac{n(n+1)}{2k}\right]=r$$

and this means exactly the remainder r left by $1+\ldots+n$ when it is divided by k. So, apart from the k expressions of m as sums of terms from the set $\{1,\ldots,n\}$

remain some numbers with sum r; if this group consists only of r we are done, else we replace r from one of the expressions (it must appear in one of them, actually exactly in one, since all the numbers from $\{1, \ldots, n\}$ are now involved) with the group of this "outsiders" and let r alone, as the enounce claims; thus the numbers from $\{1, \ldots, n\} - \{r\}$ are now partitioned in k classes, each of which has the same sum, namely m.

Remark. Many other questions arise from this problem, and we submit here only one of them: what are the (necessary and sufficient) conditions for n and k such that the set $\{1^p, \ldots, n^p\}$ can be partitioned in k subsets, each with the same sum of elements (p being a given positive integer)? Are there similar results to those proved above for the set $\{1^p, \ldots, n^p\}$?

References

[1] A. V. Andjans, *Solution of the Problem M1115*, Kvant, nr. 11-12/1988.

[2] Fu-Long Chen, Hung-Lin Fu, Yiju Wang, Jianqin Zhou, *Partition of a Set of Integers into Subsets with Prescribed Sum*, Taiwanese Journal of Mathematics, 9(2005), no. 4, pp 629-638 (available on-line at http://www.math.nthu.edu.tw/tjm/).

[3] M. Tetiva, *Ca să rezolvi această problemă...*, G.M.-B, nr. 12, 2005, pp. 611-615.

École Normale Supérieure **Colegiul Naţional „Gheorghe Roşca-Codreanu“**
Paris **Bârlad**

La constante d'Euler exprimeé par des intégrales

PAR ALEXANDRU POPESCU-ZORICA

Abstract

In this paper we emphasize some integrals that can be expressed using the constant of *Euler*.

Key words: Constant of *Euler*, integrals, antiderivatives, uniform convergence, *Leibniz-Newton* formula, *Weierstrass* formula, theorem of *Cauchy*, *Tissérand*, *Painlevé*.

MSC.: 26A06, 26A09, 26A36, 26A42, 33B15, 40A05, 40A10.

La fameuse constante d'*Euler*,

$$C = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n\right) = 0,5772156649\ldots^{1)}$$

apparaît non seulement dans des problèmes attachés à la somme harmonique $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$ (par l'intermède de l'expression asymptotique du premier ordre, $H_n = \ln n + C + \varepsilon_n$, avec $\varepsilon_n \xrightarrow[(n\to\infty)]{} 0$, ou par celui des expressions asymptotiques d'ordre superieur

$$H_n = \ln n + C + \frac{1}{2n} + \sum_{j=2}^{k}(-1)^{j-1}\frac{B_j}{jn^j} + O\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right),$$

1) Elle est notée aussi γ. (N.A.)

B_j étant les nombres de *Bernoulli*), mais aussi dans beaucoup d'autres contextes, notamment:

(a) des formules qui contiennent des fonctions spéciales;

(b) l'expression de la valeur numérique de certaines intégrales définies (généralement impropres et ayant la primitive correspondente nonexprimable par un nombre fini de fonctions élémentaires);

(c) l'expression de la valeur numérique de la somme de certaines séries.

Les formules des catégories (b) et (c) peuvent être interprétées aussi comme des expressions de la constante C par des intégrales, respectivement par des sommes de séries. Dans la littérature mathématique destinée aux fonctions spéciales, aux intégrales et aux sommes de séries (*Bierens de Haan*, *Bateman-Erdélyi*, *Ryzhik-Gradstein*, *Abramowicz-Stegun*, *Janke-Emde - Lösch*, *Magnus-Oberhettinger-Soni*) toutes ces formules sont souvent seulement énoncées, sans être accompagnées par les démonstrations afférentes.

Dans cet article nous mettrons en évidence quelques formules du type (b), présentant aussi des démonstrations complètes, plus difficilement accessibles dans la littérature mathématique. Mais on ne fera pas de références aux livres déjà cités, en utilisant, que deux autres, *William Beyer* [1] et *François-Félix Tissérand* & *Paul Painlevé* [2].

Avant de passer à la présentation des intégrales, nous rappelons que, en ce qui concerne le nature de la constante C d'*Euler*, même si l'on suppose bien qu'elle devrait être un nombre transcendent (comme e et π), jusqu'à présent on n'a pas réussi d'établir au moins si C est un nombre rationel ou un nombre irrationel!

1. Dans [1], à la position 721, de la page 346, on trouve sans démonstration le

Théorème 1. *On a l'égalité*

$$\boxed{\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x} \ln x \mathrm{d}x = -C}. \tag{1.1}$$

Démonstration. La formule de *Weierstrass* concernant la fonction gamma, $\Gamma(x) \overset{\text{def}}{=} \int_0^\infty t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ (l'intégrale étant convergente) affirme que

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = x\mathrm{e}^{Cx} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right) \mathrm{e}^{-\frac{x}{n}}, \tag{1.2}$$

oú le produit infini du second membre est absolument et uniformément convergent sur tout intervalle compact de l'axe réel qui ne contient aucun entier négatif.

Logarithmons les deux membres: le logarithme transforme le produit infini de fonctions dérivables en une série de fonctions dérivables

$$-\ln\Gamma(x) = \ln x + Cx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}\right). \tag{1.3}$$

La série des dérivées du membre droit est $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+x}-\frac{1}{n}\right)$, ou encore $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-x}{x(n+x)}$ et elle est absolument convergente sur tout compact K, de l'axe réel. En effet, pour un tel K, il existe un $A>0$, tel que l'on ait $K\subset[-A,A]$; donc, pour tout $x\in K$, on a $|x|<A$ et, en prenant $n>2A$, il résulte $|n+x|>n-\frac{n}{2}=\frac{n}{2}$, c'est-á-dire $\left|\frac{1}{n(n+x)}\right|<\frac{2}{n^2}$, donc la série est majorée (à partir de $n>2A$) par la série convergente $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2}$. (Bien sûr, partant de l'égalité (1.3) qui contient certains logarithmes, la convergence de la série nous intéresse seulement sur l'ensemble $K\cap(0,\infty)$.) Donc l'égalité suivante est légitime

$$-\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}=\frac{1}{x}+C+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+x}-\frac{1}{n}\right). \tag{1.4}$$

On a ainsi

$$\Gamma'(x)=-\Gamma(x)\left(\frac{1}{x}+C+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+x}-\frac{1}{n}\right)\right). \tag{1.4'}$$

L'intégrale qui définit la fonction Γ (déja mentionnée)[1] est, pour $x\in\mathbb{R}$, $x>0$, uniformément convergente et la fonction Γ se trouve dans les conditions òu la dérivée s'obtient en dérivant la fonction de l'intérieur de l'intégrale par rapport au paramètre x

$$\Gamma'(x)=\int_0^{\infty}t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\ln t\mathrm{d}t. \tag{1.5}$$

De (1.4′) et (1.5) on trouve

$$\int_0^{\infty}t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\ln t\mathrm{d}t=-\Gamma(x)\left(\frac{1}{x}+C-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+x}\right)\right).$$

Pour $x=1$ et tenant compte que $\Gamma(1)=1$ et $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1$, on obtient

$$\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-t}\ln t\mathrm{d}t=-C. \qquad \blacksquare$$

[1] La définition se mentient aussi dans le demiplan complexe $\mathrm{Re}(z)>0$, c'est-à-dire $\Gamma(z)=\int_0^{\infty}t^{z-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ en faisant ensuite le prolongement qui conduit à une fonction méromorphe ayant comme pôles $-1,-2,-3,\ldots$.(N.A.)

2. Introduisant $x = -\ln t$ dans (1.1) et suivant le théorème de changement de variable pour les intégrales sur un intervalle non compact, on obtient une autre expression de la constante d'*Euler* à l'aide d'une intégrale sur un intervalle non compact (mais borné).

Théorème 2. *On a l'égalité*

$$\boxed{\int_0^1 \ln\left(\ln\frac{1}{t}\right) \mathrm{d}t = -C}\,. \tag{2.1}$$

*

* *

Pour l'obtention des deux résultats suivants on utilisera essentiellement la formule (1.1).

3. À la position 723 de [1] on trouve sans démonstration le

Théorème 3. *On a l'égalité*

$$\boxed{\int_0^\infty \left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-x}} - \frac{1}{x}\right) \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = C}\,. \tag{3.1}$$

Démonstration. On a, pour la primitive correspondante à l'intégrale, la suite d'égalités

$$\int \left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-x}} - \frac{1}{x}\right) \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = \int \left(\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}} - \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\right) \mathrm{d}x =$$

$$= \int \left(\frac{(1-\mathrm{e}^{-x})'}{1-\mathrm{e}^{-x}} - \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\right) \mathrm{d}x = \ln\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right) - \int \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\mathrm{d}x.$$

Effectuons pour la dernière intégrale, une intégration par parties, en choisissant

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x} \quad \ldots \quad f'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$$

$$g'(x) = \frac{1}{x} \quad \ldots \quad g(x) = \ln x,$$

donc

$$\int \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-x}\ln x + \int \mathrm{e}^{-x}\ln x\mathrm{d}x. \tag{3.2}$$

On a obtenu la formule

$$\int \left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-x}} - \frac{1}{x}\right) \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = \ln\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right) - \mathrm{e}^{-x}\ln x - \int \mathrm{e}^{-x}\ln x\mathrm{d}x. \tag{3.3}$$

On appliquera, en relation avec cette primitive, la formule de *Leibniz-Newton* pour les integrales impropres (ayant $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$, $f : (a,b) \to \mathbb{R}$)

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b, \tag{3.4}$$

où, par convention, on note

$$F(x)\Big|_a^b = \lim_{\substack{\alpha\searrow a\\ \beta\nearrow b}} \left(F(\beta) - F(\alpha)\right), \tag{3.4'}$$

ce qui est équivalent à

$$F(x)\Big|_a^b = \lim_{x\nearrow b} F(x) - \lim_{x\searrow a} F(x). \tag{3.4''}$$

La formule est valable en acceptant les hypothèses usuelles:

(i) f est intégrable sur tout compact $[\alpha,\beta]\subset(a,b)$;

(ii) f admet une primitive F;

(iii) les deux limites de (3.4″) sont finies ou bien leur différence est finie.

(Les deux conditions (i) et (ii) sont satisfaites dans le cas particulier où f est continue sur (a,b).)

Donc, de (3.3) et (3.4), nous obtenons

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-x}} - \frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = \ln\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right)\Big|_0^\infty - \mathrm{e}^{-x}\ln x\Big|_0^\infty - \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\ln x\mathrm{d}x =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\ln\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right) - \lim_{x\searrow 0}\ln\left(1-\mathrm{e}^{x}\right) - \left(\lim_{x\to\infty}\mathrm{e}^{-x}\ln x - \lim_{x\searrow 0}\mathrm{e}^{-x}\ln x\right) - \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\ln x\mathrm{d}x =$$

$$= \underbrace{\lim_{x\to\infty}\left(\ln\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right) - \mathrm{e}^{-x}\ln x\right)}_{l_2} - \underbrace{\lim_{x\searrow 0}\left(\ln\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right) - \mathrm{e}^{-x}\ln x\right)}_{l_1} - \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\ln x\mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-x}} - \frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = l_2 - l_1 - \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\ln x\mathrm{d}x. \tag{3.5}$$

Pour calculer l_2 et l_1 on utilisera les limites fondamentales

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x} = 1, \quad \lim_{x\searrow 0} x\ln x = 0, \quad \lim_{x\to\infty}\mathrm{e}^{-x}\ln x = 0. \tag{3.6}$$

On obtient

$$l_2 = \lim_{x\to\infty}\left(\ln\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right) - \mathrm{e}^{-x}\ln x\right) = 0. \tag{3.7}$$

On remarque aussi que

$$\ln\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right) - \mathrm{e}^{-x}\ln x = \ln\frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x} + \left(1-\mathrm{e}^{-x}\right)\ln x =$$

$$= \ln\frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x} + \frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}(x\ln x) = \ln\frac{\mathrm{e}^{-x}-1}{-x} + \frac{\mathrm{e}^{-x}-1}{-x}(x\ln x),$$

c'est-à-dire

$$\ln\big(1-\mathrm{e}^{-x}\big)-\mathrm{e}^{-x}\ln x=\ln\frac{\mathrm{e}^{-x}-1}{-x}+\frac{\mathrm{e}^{-x}-1}{-x}(x\ln x).$$

Avec cette transformation et en appliquant (3.6), on trouve

$$l_1=\lim_{x\searrow 0}\big(\ln(1-\mathrm{e}^{-x})-\mathrm{e}^{-x}\ln x\big)=0. \tag{3.8}$$

Des égalités (3.5), (3.7) et (3.8) il en résulte

$$\int\limits_0^\infty\left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-x}}-\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=-\int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\ln x\mathrm{d}x,$$

donc on a trouvé justement l'opposée de l'intégrale (1.1).

La formule (3.1) est donc obtenue. ■

4. À la position 724 de [1] on trouve la formule du

Théorème 4. *On a l'égalité*

$$\boxed{\int\limits_0^\infty\frac{1}{x}\left(\frac{1}{1+x}-\mathrm{e}^{-x}\right)\mathrm{d}x=C}\,. \tag{4.1}$$

Démonstration. Cette formule sera aussi déduite en partant de la formule (1.1) En effet, après une décomposition évidente en fractions simples, on trouve

$$\frac{1}{x}\left(\frac{1}{1+x}-\mathrm{e}^{-x}\right)=\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}-\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}. \tag{4.2}$$

Tenant compte des formules (4.2) et (3.2), la primitive correspondante à l'intégrale (4.1) sera

$$\int\frac{1}{x}\left(\frac{1}{1+x}-\mathrm{e}^{-x}\right)\mathrm{d}x=\ln x-\ln(1+x)-\int\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x=$$
$$=\ln\frac{x}{1+x}-\left(\mathrm{e}^{-x}\ln x+\int\mathrm{e}^{-x}\ln x\mathrm{d}x\right).$$

Appliquant la formule de *Leibniz-Newton*, on obtient, comme dans la démonstration de la section 3

$$\int\limits_0^\infty\frac{1}{x}\left(\frac{1}{1+x}-\mathrm{e}^{-x}\right)\mathrm{d}x=\ln\frac{x}{1+x}\bigg|_0^\infty-\mathrm{e}^{x}\ln x\bigg|_0^\infty-\int\limits_0^\infty\mathrm{e}^{-x}\ln x\,\mathrm{d}x=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\ln\frac{x}{1+x}-\lim_{x\searrow 0}\ln\frac{x}{1+x}-\left(\lim_{x\to\infty}\mathrm{e}^{-x}\ln x-\lim_{x\searrow 0}\mathrm{e}^{-x}\ln x\right)-\int\limits_0^\infty\mathrm{e}^{-x}\ln x\mathrm{d}x=$$

$$= \underbrace{\lim_{x\to\infty}\left(\ln\frac{x}{1+x} - \mathrm{e}^{-x}\ln x\right)}_{L_2} - \underbrace{\lim_{x\searrow 0}\left(\ln\frac{x}{1+x} - \mathrm{e}^{-x}\ln x\right)}_{L_1} - \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\ln x\mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire

$$\int\limits_0^\infty \frac{1}{x}\left(\frac{1}{1+x} - \mathrm{e}^{-x}\right)\mathrm{d}x = L_2 - L_1 - \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\ln x\mathrm{d}x.$$

Mais

$$L_2 = \lim_{x\to\infty}\left(\ln\frac{x}{1+x} - \mathrm{e}^{-x}\ln x\right) = 0$$

et

$$L_1 = \lim_{x\searrow 0}\left(\ln\frac{x}{1+x} - \mathrm{e}^{-x}\ln x\right) = \lim_{x\searrow 0}\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}(x\ln x) - \ln(1+x)\right) =$$

$$= \lim_{x\searrow 0}\left(\frac{\mathrm{e}^{-x}-1}{-x}(x\ln x) - \ln(1+x)\right) = 0.$$

Donc

$$\int\limits_0^\infty \frac{1}{x}\left(\frac{1}{1+x} - \mathrm{e}^{-x}\right)\mathrm{d}x = C. \qquad \blacksquare$$

5. Effectuons dans l'intégrale (3.1) le changement de variable $t = \mathrm{e}^{-x}$. On a donc $\mathrm{d}t = -\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$, $x = -\ln t$ et aussi

$$\begin{cases} x \searrow 0 \Rightarrow t \nearrow \mathrm{e}^0 = 1 \\ x \to \infty \Rightarrow t \searrow \lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0. \end{cases}$$

On trouve

$$\int\limits_0^\infty \left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-x}} - \frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{\ln t}\right)\mathrm{d}t.$$

Donc on a obtenu une expression de la constante d'*Euler* en tant qu'intégrale sur un intervalle borné.

Théorème 5. *On a l'égalité*

$$\boxed{\int\limits_0^1 \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{\ln t}\right)\mathrm{d}t = C}\,. \tag{5.1}$$

Mais cette intégrale n'est pas impropre! En effet, considérons la fonction $\varphi : [0,1] \to \left[\frac{1}{2}, 1\right]$

$$\varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-t} + \dfrac{1}{\ln t}, & \text{pour} \quad t \in (0,1) \\ 1, & \text{pour} \quad t = 0 \\ \dfrac{1}{2}, & \text{pour} \quad t = 1, \end{cases} \tag{5.2}$$

comme j'ai procédé en 1958.

La fonction est continue sur $(0,1)$ et un calcul simple des limites, en 0 et en 1 prouve la continuité en ces points; donc la fonction est continue sur tout l'intervalle $[0,1]$ et ainsi la formule (4.1) peut s'écrire d'une manière plus précise à l'aide d'une intégrale de *Riemann* sur un intervalle compact

$$\int\limits_{[0,1]} \varphi(t)\mathrm{d}t = C. \tag{5.1'}$$

Le graphe de la fonction φ est tangent à l'axe Oy au point $(0,1)$, ayant $\varphi'(0) = -\infty$, en temps que $\varphi'(1) = -\dfrac{1}{12}$; l'aire du trapèze curviligne $OAA'BO$ est exactement la constante d'*Euler*, C; en plus, φ est convexe ($\varphi'' > 0$) (voir la fig. 1).

À cause de l'inégalité $\dfrac{1}{2} \leq \varphi(t) \leq 1$ pour tout $x \in [0,1]$[1], on a $\dfrac{1}{2} <$ $< \displaystyle\int\limits_{[0,1]} \varphi(t)\mathrm{d}t < 1$, ce qui offre une belle illustration géométrique à l'inégalité connue $\dfrac{1}{2} < C < 1$.

Par l'intèrméde de la substitution $t = 1 - s$ dans la formule (5.1), on trouve la forme complémentaire

$$\boxed{\int\limits_0^1 \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{\ln(1-s)}\right)\mathrm{d}s = C}\,, \tag{5.3}$$

qui est, de nouveau, une intégrale de *Riemann* $\displaystyle\int\limits_{[0,1]} \overline{\varphi}(s)\mathrm{d}s$, òu $\overline{\varphi}(s) = \varphi(1-t)$. Les propriétés et le graphe de la nouvelle fonction $\overline{\varphi}$ s'obtiennent sans aucune difficulté de celles de φ, ou directement.

6. Supposons que la fonction $\overline{\varphi}$, restreinte à l'intervalle $(0,1)$, peut être exprimée comme somme d'une série convergente de puissances de la variable s. Alors, du développement connu [2]

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots, \qquad |x| < 1$$

en substituent $x = -s$ ($|s| < 1$), on aurait

$$\ln(1-s) = -\left(s + \frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{3} + \ldots\right), \qquad |s| < 1$$

---

[1] Ayant $\varphi(t) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow t = 1$ et $\varphi(t) = 1 \Leftrightarrow t = 0$. (N.A.)

[2] De *Mercator*. (N.A.)

d'óu, après un petit calcul,

$$\overline{\varphi}(s) = \frac{\ln(1-s)+s}{s\ln(1-s)} = \frac{\dfrac{1}{2}+\dfrac{s}{3}+\dfrac{s^2}{4}+\ldots+\dfrac{s^{n-2}}{n}+\ldots}{1+\dfrac{s}{2}+\dfrac{s^2}{3}+\ldots+\dfrac{s^{n-1}}{n}+\ldots} =$$

$$= c_0 + c_1 s + c_2 s^2 + \ldots + c_n s^n + \ldots \tag{6.1}$$

De là, en éliminent le dénominateur et en identifiant le coefficient de s^n, des deux membres de la nouvelle relation obtenue, on trouverait la relation de récurrence des coefficients c_n

$$\frac{1}{1}c_n + \frac{1}{2}c_{n-1} + \frac{1}{3}c_{n-2} + \ldots + \frac{1}{n}c_1 + \frac{1}{n+1}c_0 = \frac{1}{n+2}. \tag{6.2}$$

En écrivant les relations pour $n = 1, 2, 3, \ldots, k$ et en résolvant le système à l'aide de la règle de *Cramer* on pourait exprimer directement tous les c_k sous la forme d'un déterminant d'ordre $k+1$

$$c_k = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & \ldots & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 & \ldots & 0 & \frac{1}{4} \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ \frac{1}{k} & \frac{1}{k-1} & \frac{1}{k-2} & & 1 & \frac{1}{k+1} \\ \frac{1}{k+1} & \frac{1}{k} & \frac{1}{k-1} & & \frac{1}{2} & \frac{1}{k+2} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^k \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 & \ldots & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ \frac{1}{k+1} & \frac{1}{k} & \frac{1}{k-2} & \multicolumn{2}{c}{\ldots\ldots\ldots} & 1 \\ \frac{1}{k+2} & \frac{1}{k+1} & \frac{1}{k-1} & \multicolumn{2}{c}{\ldots\ldots\ldots} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} \tag{6.3}$$

(le déterminant du système étant égal à 1).

De l'égalité $\overline{\varphi}(s) = c_0 + c_1 s + c_2 s^2 + \ldots + c_n s^n + \ldots$, par intégration terme par terme sur l'intervalle $[0, 1]$ et tenent compte de $(5.1')$, on obtiendrait que la constante d'*Euler* est la somme d'une série qui ne contient plus aucun logarithme

$$C = c_0 + \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{3} + \ldots + \frac{c_{n-1}}{n} + \frac{c_n}{n+1} + \ldots. \tag{6.4}$$

Ces coefficients pouraient être obtenus l'un après l'autre. Les premiers seraint $c_0 = \frac{1}{2}$, $c_1 = \frac{1}{12}$, $c_2 = \frac{1}{24}$, $c_3 = \frac{19}{720}$, $c_4 = \frac{3}{160}$, $c_5 = \frac{863}{60480}$, $c_6 = \frac{275}{24192}$, $c_7 = \frac{33953}{3628800}$, ...

7. Dans [2], le problème 4 de la page 449 exige d'établir l'égalité[1)]

$$\boxed{\int_0^\infty \left(\frac{1}{1+x^2} - \cos x\right) \frac{1}{x} \mathrm{d}x = C}. \tag{7.1}$$

Solution. (Nous réproduisons exactement celle de [2].) Partons de la fonction

$$F(z) = \frac{1}{z}\left(\frac{1}{1+z} - \mathrm{e}^{-z}\right).^{2)}$$

Cette fonction est holomorphe à l'origine, car $\frac{1}{1+z} - \mathrm{e}^{-z}$ est développable suivant les puissances de z et contient z en facteur [3)]

Appliquons le théorème de *Cauchy* au contour $OAA'BO$ du problème précédent (voir la fig. 2).

Quand R[4)] croit indéfiniment, l'intégrale étendue à AA'

$$\int_0^R \frac{1}{R+\mathrm{i}y}\left(\frac{1}{1+R+\mathrm{i}y} - \mathrm{e}^{-R}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y}\right) \mathrm{i}\mathrm{d}y,^{5)\ 6)}$$

tend vers zéro, car elle est moindre en module que

$$\int_0^R \frac{1}{R}\left(\frac{1}{R} + \mathrm{e}^{-R}\right) \mathrm{d}y,$$

c'est-à-dire que $\frac{1}{R} + \mathrm{e}^{-R}$. De même, l'intégrale étendue à $A'B$

$$\int_0^R \frac{1}{x+\mathrm{i}R}\left(\frac{1}{1+x+\mathrm{i}R} - \mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}R}\right) \mathrm{d}x,$$

---

1) Dans ce probléme, la demande est formulée prenant comme définition de la constante d'*Euler* justement la valeur de l'intégrale du théorème 4. (N.A.)

2) Il s'agit, bien sûr, d'une fonction complexe de variable complexe. (N.A.)

3) En effet, $\mathrm{e}^{-z} = 1 - \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} - \ldots$ avec convergence uniforme sur tout compact et, pour $|z| < 1$, on a $\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - \ldots$, donc $\frac{1}{1+z} - \mathrm{e}^{-z}$ admet même z^2 en facteur. D'une écriture plus moderne, $F : \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C}$, $F(z) = \frac{1}{z}\left(\frac{1}{1+z} - \mathrm{e}^{-z}\right)$ pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$, $z \neq 0$ et $F(0) = 0$. (N.A.)

4) R est le côté du carré $OAA'BA$. (N.A.)

5) L'auteur utilise la notation courante $z = x + \mathrm{i}y$ et les règles usuelles de l'intégration complexe. (N.A.)

6) La lecteur soucieux des détails est vivement conseillé à refaire par sois-même tous les calculs! (N.A.)

est moindre en module que

$$\int_0^R \frac{1}{R}\left(\frac{1}{R}+\mathrm{e}^{-x}\right)\mathrm{d}x,$$

donc moindre que $\frac{2}{R}$, et tend vers zéro avec $\frac{1}{R}$. D'aprés cela, on peut écrire

$$\int_0^R \left(\frac{1}{1+x}-\mathrm{e}^{-x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x}+\int_R^0 \left(\frac{1}{1+\mathrm{i}y}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y}\right)\frac{\mathrm{d}y}{y}=\varepsilon,$$

ε tendant vers zéro quand R tend vers $+\infty$. La première intégrale est réelle et a pour limite la constante d'*Euler*, C; de là les deux égalités

$$C=\int_0^\infty \left(\frac{1}{1+x}-\mathrm{e}^{x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x}=\int_0^\infty \left(\frac{1}{1+x^2}-\cos x\right)\frac{\mathrm{d}x}{x},$$

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{1+x^2}-\sin x\right)\frac{\mathrm{d}x}{x}=0.$$

La première est l'égalité à démontrer; la seconde donne

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\mathrm{arctg}x\Big|_0^\infty=\frac{\pi}{2}\ ^{1)}$$

égalité déjà établie.[2)]

*

*   *

La solution présentée appartient à la partie de l'ouvrage [2] rédigée par *Painlevé* (pp. 439-524).

À la fin de cette section, quelques mots sur les auteurs de [2], deux illustres mathématiciens français. *François-Félix Tissérand* (1845-1896) a été professeur à la Faculté des Sciences de Paris (étant le successeur de *Victor Puiseux* et le prédécesseur du grand *Henri Poincaré* à la Chaire de Mécanique Céleste), membre de l'Institut[3)], directeur de l'Observatoire Astronomique. Par ses travaux, *Tissérand* a continué la ligne des recherches d'astronomie mais aussi d'analyse mathématique de *Puiseux*, celui qui en 1879 avait décerné

[1)] Dans l'écriture de l'avant-dernier terme de cette formule nous nous sommes écarté un peu de l'écriture originale de *Painlevé* $(\mathrm{arctg}x)_0^\infty$, en utilisant la notation moderne. (N.A.)

[2)] Ici *Painlevé* fait référence à l'ordre des matieres de [2]. (N.A.)

[3)] Il s'agit de l'Institut de France, fondé en 1795, situé Quai de Conti, à Paris et qui contient les cinq Académies de France: l'Académie française, l'Academie des Inscriptions et Belles-Lettres, l'Académie des Sciences, l'Académie des Beaux-Arts et l'Académie des Sciences morales et politiques. (N.A.)

le titre de docteur ès mathématiques à notre illustre professeur *David Emmanuel* (1854-1941). *Puiseux* avait succédé *Pierre Ossian Bonnet* à la Chaire mentionnée antérieurement et en 1857 a succédé au grand Cauchy à la Chaire d'Astronomie mathématique, où il a été suivi en 1866 par *Tissérand.*

Paul Painlevé (1863-1933) a été un illustre mathématicien français; ancien élève de l'École Normale Supérieure (E.N.S.) il a suivi aussi les cours de *Schwarz* et de *Klein* à Göttingen, avant de passer l'agrégation en 1886 et d'obtenir son doctorat en 1887. Il a été professeur à l'Université de Lille, à la Sorbonne, à l'E.N.S., au Collège de France et à l'Ecole Polytechnique. Il a obtenu des résultats notables dans la théorie des équations differentielles (notamment concernant quelques unes qui avaient résisté à *Poincaré* et *Picard*!). En 1909 il a crée le premier cours universitaire de mécanique des fluides appliquée à l'aéronautique et a soutenu le dévéloppement de l'aviation. Membre de l'Institut, et même président de l'Académie des Sciences, homme politique, il repose au Panthéon de Paris.

*

* *

La structuration et la mise à point finale de cet article a été faite en collaboration avec M. *Andrei Vernescu.*

Bibliographie

[1] W. E. Beyer, *C. R. S. Standard Mathematical Tables*, 26-th Edition, CRS Press, Inc. Boca Raton, Florida, 1981.

[2] F. Tissérand & P. Painlevé, *Recueil complémentaire d' Exercices sur le Calcul infinitésimal*, Gauthier-Villars, Paris, 1933.

21, Rue du Dr. Staicovici,
Bucharest

O nouă demonstraţie a inegalităţii lui Erdös-Mordell şi extinderea ei

DE NICUŞOR MINCULETE

Abstract

This note gives a new proof and an extension of the Erdös-Mordell inequality.
Key words: Erdös-Mordell inequality.
M.S.C.: 51M04

Introducere.

P. Erdös a propus într-unul din numerele revistei „The American Mathematical Monthly“ din anul 1935 următoarea problemă deschisă:

Dacă M este un punct în interiorul unui triunghi ABC, iar x, y, z sunt distanţele de la punctul M la laturile $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$, atunci

$$MA + MB + MC \geq 2(x + y + z). \tag{1}$$

Aceasta a fost demonstrată în anul 1937 de *L. J. Mordell* şi de *D. F. Barrow.* Pe urmă au apărut o serie de demonstraţii ale altor matematicieni: *Leon Bankoff*

(1958), *André Avez* (1993), *V. Komornik* (1997), *Hojoo Lee* (2001), *Nikolaos Dergiades* (2004) şi *George Tsintsifas* (2006 – 13 demonstraţii) (vezi lucrările [1], [2], [3], [4] şi [6]).

În continuare, prin analizarea unei metode utilizate în [5], voi demonstra inegalitatea lui *Erdös-Mordell* printr-o metodă nouă şi, de asemenea, voi extinde această inegalitate, astfel încât aceasta să fie valabilă pentru orice punct din interiorul triunghiului şi de pe laturile sale.

Demonstraţia inegalităţii

Pentru început, considerăm punctul M în interiorul triunghiului ABC. Vom nota cu x, y, z distanţele de la punctul M la laturile $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ de lungimi a, b, c.
Fie punctele P, Q, proiecţiile punctului M pe laturile $[BC]$, $[CA]$, iar M', un punct în exteriorul triunghiului AbC, astfel încât

$$\sphericalangle MAC \equiv \sphericalangle M'BC \quad \text{şi } \sphericalangle MCA \equiv \sphericalangle M'CB.$$

Se consideră proiecţia punctului M' pe latura $[BC]$ ca fiind S şi $M'S = y'$. Deoarece triunghiul AMCşi $BM'C$ sunt asemenea, avem proporţionalitatea laturilor:

$$\frac{MA}{M'B} = \frac{MC}{M'C} = \frac{b}{a} = \frac{y'}{y},$$

prin urmare

$$M'B = \frac{a}{b}MA,\ M'C = \frac{a}{b}MC,\ y' = \frac{a}{b}y.$$

Se observă uşor din figura 1 că

$$\sphericalangle MCM' \equiv \sphericalangle BCA$$

deci, prin aplicarea teoremei cosinusului în triunghiul $M'CM$, obţinem

$$M'M^2 = M'C^2 + MC^2 - 2M'C \cdot MC \cdot \cos C = \frac{a^2}{b^2}MC^2 + MC^2 - 2\frac{a}{b}MC^2 \cos C =$$

$$= \frac{MC^2}{b^2}\left(a^2 + b^2 - 2ab\cos C\right) = \frac{MC^2 \cdot c^2}{b^2},$$

adică

$$MM' = \frac{c \cdot MC}{b}.$$

Însă

$$MM' \geq x + y',$$

ceea ce înseamnă că

$$\frac{c \cdot MC}{b} \geq x + \frac{a}{b}y,$$

iar, prin împărţire cu $\dfrac{c}{b}$, obţinem

$$MC \geq x \cdot \frac{b}{c} + y \cdot \frac{a}{c}. \tag{2}$$

Analog demonstrăm inegalităţile

$$MA \geq y \cdot \frac{c}{a} + z\frac{b}{a}, \tag{3}$$

$$MB \geq x \cdot \frac{c}{b} + z \cdot \frac{a}{b}. \tag{4}$$

Prin adunarea relaţiilor (2), (3) şi (4) se obţine inegalitatea

$$MA + MB + MC \geq x\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + y\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + z\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right). \tag{5}$$

Deoarece avem inegalitatea algebrică $\dfrac{u}{v} + \dfrac{v}{u} \geq 2$, oricare ar fi $u, v > 0$, inegalitatea (5) devine

$$MA + MB + MC \geq 2(x + y + z),$$

ceea ce demonstrează problema propusă de *Erdös*.

Extinderea inegalităţii

Acum vom extinde această problemă, astfel încât punctul M să poată fi situat şi pe laturile $[BC]$, $[CA]$ şi $[AB]$.

Dacă punctul M coincide cu A, atunci inegalitatea lui *Erdös-Mordell* devine

$$AB + AC \geq 2 \cdot \mathrm{d}(A, BC) = 2h_a,$$

ceea ce este evident, deoarece $AB \geq h_a$ şi $AC \geq h_a$.

La fel de simple sunt şi inegalităţile care se obţin când punctul M coincide cu B sau cu C.

Dacă M este un punct pe (BC), atunci $x = 0$, iar din faptul că patrulaterul $ARMQ$ este inscriptibil rezultă $RQ = MA \cdot \sin A$. Pe de altă parte, aplicând teorema cosinusului în triunghiul MQR, obţinem

$$RQ^2 = y^2 + z^2 + 2yz \cdot \cos A,$$

deci

$$MA^2 \cdot \sin^2 A = y^2 + z^2 + 2yz \cdot \cos A = (y \cdot \sin C + z \cdot \sin B)^2 + (y \cdot \cos C - z \cdot \cos B)^2,$$

deci

$$MA^2 - sin^2 A \geq (y \cdot \sin C + z \cdot \sin B)^2,$$

adică

$$MA \geq z \cdot \frac{\sin B}{\sin A} + y \cdot \frac{\sin C}{\sin A},$$

iar $MB = \dfrac{z}{\sin B}$, $MC = \dfrac{y}{\sin C}$.

Prin urmare

$$MA + MB + MC; \geq y\left(\frac{1}{\sin C} + \frac{\sin C}{\sin A}\right) + z\left(\frac{1}{\sin B} + \frac{sinB}{\sin A}\right) \geq$$

$$\geq 2y\sqrt{\frac{1}{\sin A}} + 2z\sqrt{\frac{1}{\sin A}} \geq 2(y+z),$$

deoarece $\dfrac{1}{\sin A} \geq 1$, în consecinţă $MA + MB + MC \geq 2(x + y + z)$.

Se demonstrează în mod similar cazul în care M aparţine laturilor $[CA]$ şi $[AB]$.

Observaţie. Considerăm punctul M în exteriorul triunghiului ABC, ca în figura 3. Se observă că patrulaterul $BMPR$ este inscriptibil, deoarece $\text{m}(\sphericalangle BRM) = \text{m}(\sphericalangle BPM) = 90°$, deci $\text{m}(\sphericalangle RMP) = \text{m}(\sphericalangle ABC)$, deci $RP = MB \cdot \sin B$; dar, prin aplicarea teoremei cosinusului în triunghiul RMP, obţinem $RP^2 = x^2 + z^2 - 2xz \cdot \cos B$ deci

$$MB^2 \cdot \sin^2 B = x^2 + z^2 - 2xz \cdot \cos B =$$

$$= (x \cdot \sin C - z \cdot \sin A)^2 + (x \cdot \cos C + z \cdot \cos A)^2,$$

deci

$$MB^2 \cdot \sin^2 B \geq (x \cdot \cos C + z \cdot \cos A)^2,$$

adică

$$MB \geq \left| x \cdot \frac{\cos C}{\sin B} + z \cdot \frac{\cos A}{\sin B} \right|. \qquad (6)$$

Analog se arată că

$$MC \geq \left| x \cdot \frac{\cos B}{\sin C} + y \cdot \frac{\cos A}{\sin C} \right|. \qquad (7)$$

Prin urmare, doar inegalitatea (2) rămâne valabilă în situaţia din figura 3.

Dacă triunghiul ABC este ascuţitunghic, atunci, din relaţiile (2), (6) şi (7), obţinem;

$$MA + MB + MC \geq x\left(\frac{\cos B}{\sin C} + \frac{\cos C}{\sin B}\right) + y\left(\frac{\cos A}{\sin C} + \frac{\sin C}{\sin A}\right) + z\left(\frac{\cos A}{\sin B} + \frac{\sin B}{\sin A}\right). \qquad (8)$$

Deoarece avem inegalitatea algebrică $u + v \geq 2\sqrt{uv}$, pentru orice $u, v > 0$, inegalitatea (8) devine;

$$MA + MB + MC \geq 2x\sqrt{\text{ctg}B \cdot \text{ctg}C} + 2\sqrt{\text{ctg}A}(y + z). \qquad (9)$$

Prin poziţionarea punctului M în regiunile similare celei din figura 3 (în raport cu laturile $[CA]$ şi $[AB]$, vom obţine analoagele inegalităţii (9).

Bibliografie

[1] O. Bottema, R. Z. Djordjević, R. R. Janić, D. S. Mitrinović, P. M. Vasić, *Geometric inequalities*, Grüingen, 1969.

[2] M. Chiriţă, *Aplicaţii ale unei inegalităţi a lui P. Erdös*, Gazeta Matematică Seria B, nr. 2/1984.

[3] N. Dergiades, *Signed Distances and the Erdös-Mordell Theorem*, Forum Geometricorum, 4 (2004), pp. 67-68.

[4] H. I. Lee, *Another Proof of the Erdös-Mordell Theorem*, Forum Geometricorum, 1 (2001), pp. 7-8.

[5] N. Minculete, *Egalităţi şi inegalităţi geometrice triunghi*, Editura Eurocarpatica, Sf. Gheorghe, 2003.

[6] D. S. Mitrinović, J. E. Pečarić, V. Volenec, *Recent Advances in Geometric Inequalities*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1989.

Universitatea Creştină Dimitrie Cantemir din Braşov
Str. Bisericii Române (Operetei), nr. 107
e-mail: minculeten@yahoo.com

NOTE METODICE

Demonstrarea unor inegalităţi cu ajutorul generalizării inegalităţii lui Cauchy la matrici

DE LILIANA CRĂCIUN ŞI IOAN TOTOLICI

Abstract

This note gives a generalization of the Cauchy inequality, for numbers from an array.

Key words: Cauchy inequality.
M.S.C.: 26D15.

În prima parte a notei vom prezenta o demonstraţie elementară a inegalităţii lui *Cauchy* şi a generalizării pentru tabele dreptunghiulare a inegalităţii lui *Cauchy*. În partea doua, vom prezenta câteva exemple de aplicare a inegalităţii lui *Cauchy* generalizate pentru demonstrarea unor inegalităţi cunoscute, iar în partea a treia vom aplica această schemă de obţinere a inegalităţilor în rezolvarea câtorva exerciţii.

I. Inegalitatea lui Cauchy generalizată

Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sunt numere reale pozitive, atunci numerele:

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \text{ şi } G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_n}$$

se numesc *media aritmetică* şi respectiv *media geometrică* a celor n numere. Evident că A_n şi G_n sunt invariante faţă de ordinea numerelor $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Teorema 1 (inegalitatea lui Cauchy). *Are loc inegalitatea $A_n \geq G_n$ cu egalitate numai dacă $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.*

Pentru demonstraţie folosim următoarele leme:

Lema 1. *Dacă $x \geq 0$ şi n natural, $n \geq 1$, atunci $x^n \geq nx - n + 1$ cu egalitate pentru $x = 1$.*

Lema 2. *Dacă $0 < a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$, atunci $A_k \leq A_{k+1}$ şi $a_{k+1} \leq \dfrac{A_{k+1}^{k+1}}{A_k^k}$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, cu egalitate pentru $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.*

Demonstraţia Lemei 1. Avem succesiv

$$x^n - nx + n - 1 = x^n - 1 - n\left(x - 1\right) = \left(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1 - n\right)(x - 1) =$$

$$= (x-1)\left[(x^n - 1) + \left(x^{n-1} - 1\right) + \ldots + (x - 1)\right] =$$

$$= (x-1)^2\left[x^{n-2} + 2x^{n-3} + \ldots + (n-2)x + n - 1\right] \geq 0,$$

cu egalitate pentru $x = 1$.

Demonstraţia Lemei 2. Putem scrie

$$A_{k+1} - A_k = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{k+1}}{k+1} - \frac{a_1 + \ldots + a_k}{k} =$$

$$= \frac{1}{k(k+1)}\left[k\left(a_1 + a_2 + \ldots + a_{k+1}\right) - (k+1)\left(a_1 + a_2 + \ldots + a_k\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{k(k+1)}\left[(a_{k+1} - a_1) + (a_{k+1} - a_2) + \ldots + (a_{k+1} - a_k)\right] \geq 0$$

cu egalitate numai dacă $a_1 = a_2 = \ldots = a_{k+1}$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

Cum $\dfrac{A_{k+1}}{A_k} \geq 1$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, folosind Lema 1 găsim

$$\frac{A_{k+1}^{k+1}}{A_k^k} = A_k\left(\frac{A_{k+1}}{A_k}\right)^{k+1} \geq A_k\left[(k+1)\frac{A_{k+1}}{A_k} - k\right] = (k+1)A_{k+1} - kA_k = a_{k+1},$$

$k = 1, 2, \ldots, n-1$, cu egalitate pentru $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Demonstraţia teoremei 1. Dacă unul din numerele $a_1, a_2, \ldots, a_n$ este zero, inegalitatea lui *Cauchy* este evidentă.

Dacă numerele $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sunt pozitive, atunci, pe baza Lemei 2 putem scrie

$$G_n^n = a_1 a_2 \ldots a_n \leq A_1 \frac{A_2^2}{A_1^1} \cdot \frac{A_3^3}{A_2^2} \cdot \ldots \cdot \frac{A_n^n}{A_{n-1}^{n-1}} = A_n^n,$$

de unde $G_n \leq A_n$, cu egalitate când $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Observaţia 1. O altă variantă a acestei demonstraţii pentru teorema 1 se obţine dacă în locul Lemei 2 se consideră:

Lema $2'$. Dacă $0 < a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$, atunci $G_k \leq G_{k+1}$ şi $(k+1)G_{k+1} - kG_k \leq a_{k+1}$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, cu egalitate când $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Să considerăm următorul tabel de numere reale nenegative

$$\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} & G_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} & G_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ \hline A_{m1} & A_{m2} & A_{m3} & \ldots A_{mn} & \frac{A}{G} & \end{array}$$

unde pe linia lui A sunt trecute mediile aritmetice ale numerelor de pe coloana corespunzătoare, iar pe coloana lui G sunt trecute mediile geometrice ale elementelor de pe linia respectivă, m şi n numere naturale nenule,

Teorema 2 (Inegalitatea Cauchy generalizată). *Este valabilă inegalitatea*

$$\sqrt[n]{A_{m1} \cdot A_{m2} \cdot \ldots \cdot A_{mn}} \geq \frac{G_{1n} + G_{2n} + \ldots + G_{mn}}{m}, \tag{1}$$

cu egalitate, fie când elementele unei coloane sunt toate nule, fie când elementele a două linii sunt proporţionale.

Demonstraţie. Să notăm prin G^* şi A^* primul şi respectiv, cel de-al doilea membru al inegalităţii (1). Dacă $A_{m1} = 0$ atunci $a_{11} = a_{21} = \ldots = a_{m1} = 0$, $G_{1n} = G_{2n} = ... = G_{mn} = 0$ şi deci $A_{mn} = 0$. La fel pentru $A_{m2=0}$ sau $\ldots A_{mn} = 0$

Fie, acum, $A_{m1} > 0$, $A_{m2} > 0, \ldots, A_{mn} > 0$; aplicând inegalitatea lui *Cauchy* putem scrie:

$$\begin{array}{l} \dfrac{a_{11}}{A_{m1}} + \dfrac{a_{12}}{A_{m2}} + \ldots + \dfrac{a_{1n}}{A_{mn}} \geq n\dfrac{G_{1n}}{G^*} \\ \dfrac{a_{21}}{A_{m1}} + \dfrac{a_{22}}{A_{m2}} + \ldots + \dfrac{a_{2n}}{A_{mn}} \geq n\dfrac{G_{2n}}{G^*} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{a_{m1}}{A_{m1}} + \dfrac{a_{m2}}{A_{m2}} + \ldots + \dfrac{a_{mn}}{A_{mn}} \geq n\dfrac{G_{1n}}{G^*} \end{array}$$

Adunăm membru cu membru inegalităţile precedente şi obţinem

$$m\frac{A_{m1}}{A_{m1}} + m\frac{A_{m2}}{A_{m2}} + \ldots + m\frac{A_{mn}}{A_{mn}} \geq \frac{nm}{G^*}A^* \Leftrightarrow nm \geq \frac{nm}{G^*}A^* \Leftrightarrow 1 \geq \frac{A^*}{G^*},$$

de unde rezultă (1).

Observaţia 2. Inegalitatea (1) este o generalizare a inegalităţii lui *Cauchy.* Intr-adevăr, scriind inegalitatea (1) pentru tabelul pătratic

$$\begin{array}{ccccc|c} a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} & a_n & G_n \\ a_2 & a_3 & \ldots & a_n & a_1 & G_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ a_n & a_1 & \ldots & a_{n-2} & a_{n-1} & G_n \\ \hline A_n & A_n & \ldots & A_n & A_n & \frac{A}{G} \end{array}$$

găsim inegalitatea lui *Cauchy*. Schema pentru obţinerea de inegalităţi constă în alegerea convenabilă a tabelului dreptunghiular şi aplicarea la acest tabel a inegalităţii *Cauchy* generalizată (1).

II. Exemple de aplicare a schemei

Pentru economie de spaţiu, în unele tabele vom face mediile aritmetice pe linii şi mediile geometrice pe coloane, fapt ce nu afectează valabilitatea inegalităţii (1). Acest fapt va fi marcat prin schimbarea locurilor literelor A^* şi G^*.

1. Inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwarz

Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$, $n \geq 2$. *Atunci*

$$\left(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n\right)^2 \leq \left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2\right).$$

Demonstraţie. Pentru demonstrarea inegalităţii, formăm tabelul dreptunghiular

$$\begin{array}{cccc|c}
a_1^2 & a_2^2 & \ldots & a_n^2 & \frac{1}{n}\sum \lim\limits_{k=1}^{n} a_1^2 \\
b_1^2 & b_2^2 & \ldots & b_n^2 & \frac{1}{n}\sum \lim\limits_{k=1}^{n} b_1^2 \\
\hline
[a_1b_1] & [a_2b_2] & \ldots & [a_nb_n] & \frac{G}{A}
\end{array}$$

Aplicând (1) la acest tabel avem

$$\sqrt{\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_1^2\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} b_1^2\right)} \geq \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} |a_1b_1|,$$

de unde rezultă cunoscuta inegalitate a lui *Cauchy-Buniakowski-Schwrz.*

2. Inegalitatea lui Bernoulli. *Pentru orice* $x > -1$ *şi* $n \in n^*$ *avem*

$$(1+x)^2 \geq 1 + nx.$$

Demonstraţie. Pentru demonstraţie se foloseşte tabelul:

$$\begin{array}{cccccc|c}
 & \frac{1}{n}+x & \frac{1}{n} & \ldots & \frac{1}{n} & & \frac{1}{n}\sqrt[n]{1+nx} \\
 & \frac{1}{n} & \frac{1}{n}+x & \ldots & \frac{1}{n} & & \frac{1}{n}\sqrt[n]{1+nx} \\
n \text{ ori} \left\{ \right. & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & & \vdots \\
 & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \ldots & \frac{1}{n}+x & & \frac{1}{n}\sqrt[n]{1+nx} \\
\hline
 & \frac{1+x}{-} & \frac{1+x}{-} & \ldots & \frac{1+x}{-} & & \frac{A}{G}
\end{array}$$

Aplicând (1) la acest tabel avem

$$\sqrt[n]{\left(\frac{1+x}{n}\right)^n} \geq \frac{n\cdot\frac{1}{n}\sqrt[n]{1+nx}}{n} \Leftrightarrow \left(\frac{1+x}{n}\right)^n \geq \frac{1+nx}{n^n}$$

de unde rezultă inegalitatea $(1+x)^n \geq 1+nx$.

3. Inegalitatea lui Huyghens generalizată. Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n$ şi $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sunt două şiruri finite de numere reale nenegative, atunci are loc inegalitatea

$$(b_1+a_1)(b_2+a_2)\cdot\ldots\cdot(b_n+a_n) \geq \left(\sqrt[n]{b_1 b_2 \ldots b_n} + \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}\right)^2.$$

Demonstraţie. Această inegalitate rezultă din tabelul

$$\begin{array}{cccc|c}
b_1 & b_2 & \ldots & b_n & \sqrt[n]{b_1 b_2 \ldots b_n} \\
a_1 & a_2 & \ldots & a_n & \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \\
\hline
\dfrac{b_1+a_1}{2} & \dfrac{b_2+a_2}{2} & \ldots & \dfrac{b_n+a_n}{2} & \dfrac{A}{G}
\end{array}$$

Aplicând inegalitatea fundamentală (1), rezultă inegalitatea:

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} \frac{b_k+a_k}{2}} \geq \frac{\sqrt[n]{b_1 b_2 \cdot \ldots \cdot b_n} + \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}}{2} =$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \frac{b_k+a_k}{2} \geq \left(\frac{\sqrt[n]{b_1 b_2 \cdot \ldots \cdot b_n} + \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \prod_{k=1}^{n} (b_k+a_k) \geq \left(\sqrt[n]{b_1 b_2 \cdot \ldots \cdot b_n} + \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}\right)^n.$$

Dacă în această inegalitate luăm $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 1$, atunci găsim inegalitatea lui *Huyghens* (v. [2], [3]).

III. În această secţiune a notei prezentăm o serie de inegalităţi demonstrate cu ajutorul schemei descrise mai sus.

1. *Dacă* $a_k > 0$*,* $k = 1, 2, \ldots, n$*, atunci*

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{a_k}\right) \geq n^2.$$

Soluţie. Pentru demonstraţie se foloseşte tabelul

$$\begin{array}{ccccccc|c}
a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k \\
\dfrac{1}{a_1} & \dfrac{1}{a_2} & \dfrac{1}{a_3} & \ldots & \dfrac{1}{a_{n-2}} & \dfrac{1}{a_{n-1}} & \dfrac{1}{a_n} & \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{a_k} \\
\hline
1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 1 & \dfrac{G}{A}
\end{array}$$

Aplicând inegalitatea fundamentală (1) rezultă inegalitatea:

$$\sqrt{\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\cdot\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\right)} \geq \frac{1+1+\ldots+1}{n} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n}\sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\right)} \geq 1 \Leftrightarrow \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\right) \geq n^2.$$

2. *Dacă $a_1, a_2, \ldots a_n$ şi $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sunt numere reale iar $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sunt numere reale strict pozitive, atunci*

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k^2}{\alpha_k}\right) \geq \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k b_k|\right)^2$$

Soluţie. Pentru demonstraţie se foloseşte tabelul

$\alpha_1 a_1^2$	$\alpha_2 a_2^2$	$\alpha_3 a_3^2$	$\ldots$	$\alpha_{n-2} a_{n-2}^2$	$\alpha_{n-1} a_{n-1}$	$\alpha_n a_n^2$	$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k a_k^2$
$\frac{b_1^2}{\alpha_1}$	$\frac{b_2^2}{\alpha_2}$	$\frac{b_3^2}{\alpha_3}$	$\ldots$	$\frac{b_{n-2}^2}{a_{n-2}}$	$\frac{b_{n-1}^2}{a_{n-1}}$	$\frac{b_n^2}{a_n}$	$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k^2}{a_k}$
$\lvert a_1 b_1\rvert$	$\lvert a_2 b_2\rvert$	$\lvert a_3 b_3\rvert$	$\ldots$	$\lvert a_{n-2} b_{n-2}\rvert$	$\lvert a_{n-1} b_{n-1}\rvert$	$\lvert a_n b_n\rvert$	$\frac{G}{A}$

Aplicând inegalitatea fundamentală (1), rezultă inegalitatea

$$\sqrt{\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k a_k^2\right)\cdot\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k^2}{\alpha_k}\right)} \geq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|a_k b_k| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n}\sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k a_k^2\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k^2}{\alpha_k}\right)} \geq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|a_k b_k| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k a_k^2\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k^2}{\alpha_k}\right) \geq \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k b_k|\right)^2$$

3. *Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sunt numere reale, atunci*

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 \leq n\left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)^2.$$

problemă propusă pentru O. I., Cehoslovacia

Demonstraţie. Pentru demonstraţie se foloseşte tabelul

a_1^2	a_2^2	a_3^2	$\ldots$	a_{n-2}^2	a_{n-1}^2	a_n^2	$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k^2$
1	1	1	$\ldots$	1	1	1	1
$\lvert a_1\rvert$	$\lvert a_2\rvert$	$\lvert a_3\rvert$	$\ldots$	$\lvert a_{n-2}\rvert$	$\lvert a_{n-1}\rvert$	$\lvert a_n\rvert$	$\frac{G}{A}$

Aplicând inegalitatea fundamentală (1), rezultă inegalitatea:

$$\sqrt{\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)}\cdot 1\geq\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|a_k|\Leftrightarrow\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k^2\geq\frac{1}{n}\sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|\right)^2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n\sum_{k=1}^{n}a_k^2\geq\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|\right)^2\geq\left(\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\right|\right)^2=\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^2.$$

4. *Dacă* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *sunt numere reale, atunci*

$$(n-1)\sum_{i=1}^{n}x_i^2\geq 2\sum_{1\leq i<j\leq n}x_ix_j.$$

Demonstraţie. Pentru demonstraţie se foloseşte tabelul

$$\begin{array}{ccc|c}
x_1^2\,x_2^2\ldots x_1^2 & x_2^2\,x_2^2\ldots x_2^2 & \ldots x_n^2\ldots\;\; x_n^2 & \dfrac{n-1}{n(n-1)}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i^2 \\
\underbrace{x_2^2\,x_3^2\ldots x_n^2}_{(n-1)\text{ ori}} & \underbrace{x_1^2\,x_3^2\ldots x_n^2}_{(n-1)\text{ ori}} & \underbrace{\ldots x_1^2\ldots x_{n-1}^2}_{(n-1)\text{ ori}} & \dfrac{n-1}{n(n-1)}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i^2 \\
\hline
|x_1x_2||x_1x_3|\ldots|x_1x_n| & |x_2x_1||x_2x_3|\ldots|x_2x_n| & \ldots|x_1x_n|\ldots|x_nx_{n-1}| & \dfrac{G}{A}
\end{array}$$

Aplicând inegalitatea fundamentală (1), rezultă inegalitatea:

$$\sqrt{\left(\frac{n-1}{n(n-1}\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^2}\geq\frac{2}{n(n-1)}\sum_{1\leq i<j\leq n}|x_ix_j|\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i^2\geq\frac{2}{n(n-1)}\sum_{1\leq i<j\leq n}|x_ix_j|\Leftrightarrow(n-1)\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i^2\geq 2\sum_{1\leq i<j\leq n}x_ix_j.$$

Pentru $n=3$ avem inegalitatea:

$$x_1^2+x_2^+x_3^2\geq x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3.$$

5. *Dacă* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *sunt numere reale nenegative cu* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}x_k=s$ *şi* α *un număr real pozitiv, atunci are loc inegalitatea*

$$(s+\alpha x_1)(s+\alpha x_2)\cdot\ldots\cdot(s+\alpha x_n)\geq(n+\alpha)^n x_1x_2\ldots x_n.$$

Demonstraţie. Mai întâi considerăm α raţional de forma $\frac{p}{q}$, p şi q numere naturale. Pentru demonstrarea inegalităţii se foloseşte tabelul:

$$\begin{array}{c|c}
\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & x_n\\ x_2 & x_3 & \dots & x_n & x_1\\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots\\ x_n & x_1 & \dots & x_{n-2} & x_{n-1}\end{array} & \begin{array}{c}\sqrt[n]{x_1x_2\dots x_n}\\ \sqrt[n]{x_1x_2\dots x_n}\\ \vdots\\ \sqrt[n]{x_1x_2\dots x_n}\end{array}\\
p\text{ ori}\left\{\begin{array}{ccccc} \frac{x_1}{q} & \frac{x_2}{q} & \dots & \frac{x_{n-1}}{q} & \frac{x_n}{q}\\ \frac{x_1}{q} & \frac{x_2}{q} & \dots & \frac{x_{n-1}}{q} & \frac{x_n}{q}\\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \\ \frac{x_1}{q} & \frac{x_2}{q} & \dots & \frac{x_{n-1}}{q} & \frac{x_n}{q}\end{array}\right. & \begin{array}{c}\frac{1}{q}\sqrt[n]{x_1x_2\dots x_n}\\ \frac{1}{q}\sqrt[n]{x_1x_2\dots x_n}\\ \vdots\\ \frac{1}{q}\sqrt[n]{x_1x_2\dots x_n}\end{array}\\
\hline
\begin{array}{ccccc}\frac{s+\alpha x_1}{n+p} & \frac{s+\alpha x_2}{n+p} & \dots & \frac{s+\alpha x_{n-1}}{n+p} & \frac{s+\alpha x_n}{n+p}\end{array} & \frac{A}{G}
\end{array}$$

Aplicând inegalitatea fundamentală (1), rezultă inegalitatea:

$$\sqrt[n]{\frac{(s+\alpha x_1)\cdot(s+\alpha x_2)\cdot\ldots\cdot(s+\alpha x_n)}{(n+p)^n}} \geq \frac{(n+\alpha)\cdot\sqrt[n]{x_1x_2\cdot\ldots\cdot x_n}}{n+p}.$$

Pentru a $\alpha\in(0,\infty)$ se consideră α ca limită unui şir de numere raţionale, se scrie inegalitatea pentru acest şir şi se trece la limită.

6. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ o progresie aritmetică finită cu $a_1 > 0$ şi raţia $r > 0$; atunci are loc inegalitatea

$$a_1a.\ldots\cdot a_n < \left(\frac{a_1+a_n}{2}\right)^n, \quad n\geq 2.$$

Dacă $a_1 = 1$ şi $r = 2$ se obţine cunoscuta inegalitate $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

Soluţie. Pentru demonstraţie se foloseşte tabelul

$$\begin{array}{ccccccc|c}
a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & \sqrt[n]{a_1a_2\dots a_n}\\
\vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_3 & a_1 & a_1 & \sqrt[n]{a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_n}\\
\hline
\frac{a_1+a_n}{2} & \frac{a_1+a_n}{2} & \frac{a_1+a_n}{2} & \dots & \frac{a_1+a_n}{2} & \frac{a_1+a_n}{2} & \frac{a_1+a_n}{2} & \frac{A}{G}
\end{array}$$

Am folosit faptul că într-o progresie aritmetică $a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n$ pentru orice $k\geq 1$. Aplicând inegalitatea fundamentală (1), rezultă inegalitatea:

$$\sqrt[n]{\left(\frac{a_1+a_n}{2}\right)^n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_n} \Leftrightarrow \left(\frac{a_1+a_n}{2}\right)^n \geq a_1a.\ldots\cdot a_n.$$

Deoarece raţia progresiei este $r > 0$, rezultă că inegalitatea de mai sus este strictă.

Observaţie. Dacă $a_1 = 1$ şi $r = 1$ inegalitatea de mai sus devine

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^n > n!\,.$$

7. *Are loc inegalitatea* $\binom{2n}{n} \geq \dfrac{2^{2n}}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

Soluţie. Avem

$$\binom{2n}{n} \geq \frac{2^{2n}}{n+1} \Leftrightarrow \frac{(2n)!}{(n!)(n!)} \geq \frac{2^{2n}}{n+1} \Leftrightarrow \frac{(2n)!}{(2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n))\cdot(2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n))} \geq$$

$$\geq \frac{1}{n+1} \Leftrightarrow \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n)} \geq \frac{1}{n+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (n+1)(1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)) \geq 2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n). \qquad (*)$$

Pentru demonstraţia inegalităţii $(*)$ se foloseşte tabelul:

$$\begin{array}{ccccccc|c}
2 & 4 & 6 & \ldots & 2n-4 & 2n-2 & 2n & \sqrt[n]{2\cdot 4\cdot 6\cdot (2n)} \\
2n & 2 & 4 & \ldots & 2n-6 & 2n-4 & 2n-2 & \sqrt[n]{2\cdot 4\cdot 6\cdot (2n)} \\
\hline
n+1 & 3 & 5 & \ldots & 2n-5 & 2n-3 & 2n-1 & \dfrac{A}{G}
\end{array}$$

Aplicând inegalitatea fundamentală (1), rezultă inegalitatea:

$$\sqrt[n]{(n+1)(3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1))} \geq \sqrt[n]{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (n+1)(1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)) \geq 2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n)$$

şi $(*)$ este demonstrată.

8. *Dacă* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *sunt numere reale pozitive, atunci*

$$\sum_{1\leq i<j\leq n} \frac{1}{a_i+a_j} \geq \frac{n^2(n-1)}{4(a_1+a_2+\ldots+a_n)}, \quad n \geq 2. \qquad (*)$$

Soluţie. Pentru demonstraţia inegalităţii $(*)$ se foloseşte tabelul

$$\begin{array}{cccc|c}
\overbrace{a_1+a_2+\ldots+a_1+a_n}^{n-1} & \overbrace{a_2+a_3+\ldots+a_2+a_n}^{n-2} & \ldots & \overbrace{a_{n-1}+a_n}^{1} & \dfrac{2}{n(n-1)}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(n-1)a_k \\
 & & & & \dfrac{2}{n(n-1)}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(n-1)a_k \\
1\ldots 1 & 2\ldots 2 & \ldots & 1 & \dfrac{G}{A}
\end{array}$$

Aplicând inegalitatea fundamentală (1) rezultă inegalitatea:

$$\sqrt{\left(\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\frac{2}{n(n-1)}\sum_{1\le i<j\le n}\frac{1}{a_i+a_j}\right)}\ge 1$$

şi deci

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)\sum_{1\le i<j\le n}\frac{1}{a_i+a_j}\ge\frac{n^2(n-1)}{4}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\sum_{1\le i<j\le n}\frac{1}{a_i+a_j}\ge\frac{n^2(n-1)}{4\,(a_1+a_2+\ldots+a_n)},\ n\ge 2.$$

Bibliografie

[1] D. Acu, *Asupra unei scheme de obţinere a unor inegalităţi*, Astra Matematică, 1, 1990.

[2] Gh.Eckstein, *Metoda apropierii de extrem a lui Sturm*, R.M.E.T, 1, 1984.

[3] M.I. Ganga, *Rezolvarea unor inegalităţi prin metoda lui Sturm*, G. M. 12, 1981.

Liceul teoretic „Nichita Stănescu“
Ploieşti

Vindem cărţi de specialitate la kilogram!

DE DAN PLĂEŞU

În ultimii 15-16 ani un fenomen îngrijorător îşi face simţită tot mai acut prezenţa în învăţământul românesc: proliferarea necontrolată a producţiei de carte de specialitate. Mii de culegeri de probleme şi manuale au invadat rafturile librăriilor, tonetele stradale, ghiozdanele elevilor şi buzunarele părinţilor. Nefiresc de mulţi profesori de matematică (şi nu numai) au produs cel puţin o carte, dacă nu zeci de cărţi, unele în tiraje minuscule şi ediţii tip „princeps-opera omnia“, altele în tiraje şi număr de ediţii de proporţii biblice. Dacă cenzura şi, mai ales, autocenzura nu îşi vor face simţită prezenţa, atunci fenomenul mai sus amintit se va croniciza şi vom putea parafraza cu amară satisfacţie versurile unei melodii, altădată des fredonată: „Că nu e profesor să nu fi scris o carte, măcar o dată, doar o dată-n viaţa lui“.

Toate ar fi bune şi frumoase, cu impact pozitiv în cultura matematică românească, dacă producţiile colegilor noştri, înainte de a vedea lumina tiparului, ar străbate un filtru, în primul rând personal, care să vizeze originalitatea, oportunitatea, respectul faţă de dreptul de autor, redactarea şi, nu în ultimul rând, rigoarea ştiinţifică. Din păcate, un astfel de filtru al onestităţii nu se fabrică la noi în ţară, numărul cererilor pe piaţa liberă fiind ruşinos de mic. S-a ajuns în situaţia în care dictonul *Pauca, sed matura* (Puţine, dar coapte!) respectat cu sfinţenie de acel „monstru sacru“ al matematicii din toate timpurile, *Carl Friedrich Gauss*, să fie înlocuit cu de tot pragmaticul îndemn al lui *Ion Heliade Rădulescu* în a sa revistă „integral literară“, „Curierul de ambe sexe“ (l837-1848): „E vremea de scris, şi scriţi cât veţi putea şi cum veţi putea!“

Întru sprijinirea celor scrise în rândurile anterioare şi cu asumarea tendenţioasă a posturii de cârcotaş, prezentăm în cele ce urmează trei probleme de matematică, apărute în cărţi destinate elevilor studioşi, probleme ale căror soluţii sunt incorecte, una având carenţe şi în ceea ce priveşte enunţul.

Din lucrarea [1] avem în vedere următoarele probleme:

Enunţ (pag. 39):

Fie $a, b, c \in \mathbb{R}^*$, astfel încât $\dfrac{a+b}{c} = \dfrac{b+c}{a} = \dfrac{c+a}{b}$. Să se calculeze

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}.$$

Soluţie (pag. 229):

$$\frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = \frac{2(a+b+c)}{a+b+c} = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b=2c \\ b+c=2a \\ c+a=2b \end{cases} \Rightarrow \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} = 8.$$

Soluţie corectă :

$$\frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = k \Rightarrow \begin{cases} a+b=kc \\ b+c=ka \\ c+a=kb \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(a+b+c) = k(a+b+c) \Rightarrow (k-2)(a+b+c) = 0.$$

Dacă $a+b+c \neq 0 \Rightarrow k=2$ şi atunci

$$\begin{cases} a+b=2c \\ b+c=2a \\ c+a=2b \end{cases} \Rightarrow \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} = 8.$$

Dacă $a+b+c=0$, atunci

$$\begin{cases} a+b=-c \\ b+c=-a \\ c+a=-b \end{cases} \Rightarrow \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} = -1.$$

Enunţ (pag. 51) :

Fie $a, b, c \in \mathbb{Q}^*$ aşa încât $\dfrac{3a-b-c}{b} = \dfrac{3b-c-a}{c} = \dfrac{3c-a-b}{a}$. Să se demonstreze că $a=b=c$.

Soluţie (pag. 235):

Fiecare raport al şirului este egal cu

$$\frac{3(a+b+c)-2(a+b+c)}{a+b+c} = 1 \Rightarrow \begin{cases} 3a-c=2b \\ 3b-a=2c \\ 3c-b=2a \end{cases} \Rightarrow a=b=c.$$

Soluţie corectă:

Demonstrăm mai întâi că $a+b+c \neq 0$. Dacă, prin reducere la absurd, am presupune că $a+b+c=0$, atunci am avea

$$\frac{3a-b-c}{b}=\frac{3b-c-a}{c}=\frac{3c-a-b}{a} \Rightarrow \frac{4a-(a+b+c)}{b}=\frac{4b-(a+b+c)}{c}=$$

$$\frac{4c-(a+b+c)}{a} \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{a} \Rightarrow \begin{cases} a^2=bc \\ b^2=ca \\ c^2=ab \end{cases} \Rightarrow a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0 \Rightarrow a=b=c,$$

Cum $a+b+c=0$, avem $a=b=c=0$, ceea ce contrazice enunţul !

Prin urmare, $a+b+c \neq 0$. Putem scrie:

$$\frac{3a-b-c}{b}=\frac{3b-c-a}{c}=\frac{3c-a-b}{a}=k \Rightarrow \begin{cases} 3a-b-c=kb \\ 3b-c-a=kc \\ 3c-a-b=ka \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a+b+c=k(a+b+c) \Rightarrow (k-1)(a+b+c)=0 \Rightarrow k=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a-2b-c=0 \\ -a+3b-2c=0 \\ -2a-b+3c=0 \end{cases} \Rightarrow a=b=c \neq 0.$$

Poposind pe meleaguri moldave, surprindem în culegerea de probleme [3] următorul:

Enunţ incorect (pag. 173):

Dacă p este un polinom cu coeficienţi reali să se arate că dacă ecuaţia $p(x)=0$ are toate rădăcinile reale, avem:

$$p(x)p''(x)-p'(x)<0,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Soluţie (pag. 342):

$\dfrac{p'(x)}{p(x)}=\dfrac{1}{x-x_1}+\dfrac{1}{x-x_2}+\ldots+\dfrac{1}{x-x_n}$; derivând această egalitate obţinem:

$$\frac{p''(x)\cdot p(x)-(p'(x))^2}{(p(x))^2}=-\frac{1}{(x-x_1)^2}-\frac{1}{(x-x_2)^2}-\ldots-\frac{1}{(x-x_n)^2}<0.$$

Enunţ corect:

Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ şi polinomul $p \in \mathbb{R}[x]$, de gradul n, având toate rădăcinile reale şi simple. Să se demonstreze că:

$$p''(x)\cdot p(x)-[p'(x)]^2<0,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Soluţie. Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ rădăcinile polinomului p'; atunci:

$$p(x)=a(x-x_1)(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_n),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\frac{p'(x)}{p(x)} = \frac{1}{x-x_1} + \frac{1}{x-x_2} + \ldots + \frac{1}{x-x_n}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

Derivând egalitatea precedentă, obţinem

$$\frac{p''(x_i)\cdot p(x_i) - [p'(x_i)]^2}{[p(x)]^2} = \left[\frac{1}{(x-x_1)^2)} + \frac{1}{(x-x_2)^2} + \ldots + \frac{1}{(x-x_n)^2}\right] < 0,$$

$\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

Rezultă

$p''(x_i)\cdot p(x_i) - [p'(x_i)]^2 < 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. (1)

În continuare, în baza enunţului, putem scrie:

x_i, $i = \overline{1,n}$ – rădăcini reale simple $\Rightarrow$

$$\begin{cases} p(x_i) = 0, \ \forall\, i = \overline{1,n} \\ p'(x_i) \neq 0, \forall\, i = \overline{1,n} \end{cases} \Rightarrow p''(x_i)\cdot p(x_i) - [p'(x_i)]^2 = -[p'(x_i]^2 < 0, \ \forall\, i = \overline{1,n}. \quad (2)$$

Din relaţiile (1) şi (2) rezultă inegalitatea din enunţ.

Încheiem aceste rânduri cu precizarea că un exemplu de culegere de probleme ce poate fi luată drept model este [2], ai cărei autori, trei la număr, cultivă cu naturaleţe respectul de sine, asortat cu probitatea ştiinţifică. Indexul bibliografic ce însoţeşte lucrarea presupune modestie, adevăr şi bun simţ editorial.

Sperăm că lectura acestuia va orienta cititorul în următoarele sale demersuri livreşti.

Bibliografie

[1] T. Andreescu, B. Enescu, A. Jorza, O. Pop (plus alţi 17 coautori), *Olimpiadele de matematică (clasele V -X)*, Editura GIL, Zalău, 2002.

[2] I. Iliescu, B. Ionescu, D. Radu, *Probleme de matematică pentru admiterea în învăţământul superior*, E.D.P., Bucureşti, 1976.

[3] Colectiv format din 14 profesori ieşeni, *Teste de evaluare pe unităţi de învăţare. Liceu*, Editura GIL, Zalău, 2003.

Profesor,
Str. Gării nr. 10, bl. L21, et. IV, ap. 9,
Iaşi

PROBLEME PROPUSE

264. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi V spaţiul vectorial al polinoamelor de grad cel mult $n-1$ cu coeficienţi complecşi. Vom nota cu id aplicaţia identică a lui V şi pentru orice $a \in \mathbb{C}$ vom desemna prin $u_a : V \to V$ aplicaţia definită de egalitatea

$$u_a(p(x)) = p(x+a).$$

a) Să se arate că mulţimea $G = \{u_a\}_{a\in\mathbb{C}}$ este un subgrup al grupului $\mathrm{GL}(V)$ (grupul automorfismelor lui V) izomorf cu grupul aditiv al numerelor complexe.

Folosind acest rezultat, să se precizeze un subgrup al grupului $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ (grupul matricelor inversabile cu coeficienţi în $\mathbb{C}$) izomorf cu grupul aditiv $\mathbb{C}$. Să se determine inversa unei matrici din acest subgrup.

b) Pentru $a \in \mathbb{C} - \{0\}$, se consideră în V polinoamele:

$$p_0(x) = 1,\ \ p_1(x) = \frac{x}{1! \cdot a}, \ldots,\ \ p_n(x) = \frac{x(x-a)\cdot \ldots \cdot (x-(n-2)a)}{(n-1)! \cdot a^{n-1}}.$$

Să se arate că familia $\{p_0, p_1 \ldots, p_{n-1}\}$ constituie o bază în V şi să se scrie matricea endomorfismului $u_a - \mathrm{id}$ în raport cu această bază.

c) Pentru $k \in \mathbb{N}$, să se determine $\ker(u - \mathrm{id})^k$ şi $\mathrm{im}(u - \mathrm{id})^k$.

d) Fie $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Să se arate că următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(i) $(\alpha u_a + \beta u_b)^n = o$;

(ii) $\ker(\alpha u_a + \beta u_b) \neq \{0\}$;

(iii) $\alpha + \beta = 0$.

Dan Radu

265. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere pozitive care converge la 0 astfel încât

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \infty.$$

Atunci există un subşir $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ al lui $(x_n)_{n\geq 1}$ astfel ca:

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_{n_k} = \infty \qquad \text{şi} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} x_{n_k}^2 < \infty.$$

George Stoica

266. Fie a, b, c numere reale pozitive astfel încât $a \geq b \geq c$ şi $b^2 \geq ac$. Să se arate că funcţia $\varphi : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dată prin:

$$\varphi(x) = \left(\frac{a^x + b^x + c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}},$$

pentru orice $x > 0$, este logaritmic concavă pe intervalul $(0, +\infty)$.

Marian Tetiva

267. Să se arate că

$$\mathrm{tg}\frac{n\pi}{2n+1} - 2\mathrm{tg}\frac{(n-1)\pi}{2n+1} > \frac{\pi}{2},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Gheorghe Szöllösy

268. Fie cubul $[ABCDA'B'C'D']$ de muchie a şi $X \in (AB$, $Y \in (AD$, $Z \in (AA'$ astfel încât $AX = \alpha$, $AY = \beta$, $AZ = \gamma$, unde $\alpha, \beta, \gamma > a$ şi

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} > \frac{1}{a}, \quad \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} > \frac{1}{a}, \quad \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{a}.$$

Planul (XYZ) împarte cubul în două corpuri $[C_1]$ şi $[C_2]$ şi intersectează muchiile $(A'B')$, (BB'), (BC), (CD), (DD') şi $(D'A')$ în punctele M, N, P, Q, R, S.

Să se demonstreze că următoarele afirmaţii sunt echivalente:

1) Dreptele MQ, NR şi PS sunt concurente.

2) Sferele situate în interiorul corpurilor $[C_1]$ şi $[C_2]$, tangente planului (XYZ) şi feţelor triedrelor tridreptunghice cu vârfurile în A, respectiv C', au raze egale.

3) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{2}{a}$.

Daniel Văcăreţu

SOLUŢIILE PROBLEMELOR PROPUSE

243. *Să se determine soluţiile, numere întregi, ale ecuaţiei*

$$x^2+y^2+z^2+w^2=x^2y^2z^2.$$

Dan Radu

Soluţia autorului. Vom face mai întâi observaţia că, datorită structurii ecuaţiei, este suficient să căutăm souţiile în $\mathbb{Z}_+$. Pe de altă parte se vede că $x=y=z=w=0$ este soluţie a ecuaţiei. Vom arăta că aceasta este singura soluţie.

Dacă $xyz=0$, atunci rezultă, în mod necesar, $w=0$.

Dacă $xyz\neq 0$, atunci vom arăta că şi $w\neq 0$.

Într-adevăr, vom avea

$$x^2\left(y^2z^2-3\right)+y^2\left(x^2z^2-3\right)+z^2\left(x^2y^2-3\right)=3w^2 \tag{1}$$

şi, presupunând – prin absurd – că $w=0$ ar urma că, de exemplu, $y^2z^2-3<0$, de unde, obligatoriu, $y=z=1$. Atunci, înlocuind în (1), deducem că

$$-2x^2+x^2-3+x^2-3=0,$$

ceea ce constituie o contradicţie.

Fie (x,y,z,w) o soluţie a ecuaţiei şi δ cel mai mare divizor comun al numerelor x, y, z şi w. Atunci există $a,b,c,d\in\mathbb{N}$ atfel încât $x=a\delta$, $y=b\delta$, $z=c\delta$, $w=d\delta$, unde a, b, c şi d sunt prime între ele, iar ecuaţia din enunţ este echivalentă cu ecuaţia:

$$a^2+b^2+c^2+d^2=\delta^4a^2b^2c^2. \tag{2}$$

Pentru ecuaţia (2) nu există decât următoarele patru posibilităţi:

I. Trei dintre numerele a, b, c şi d sunt pare, iar unul impar; atunci:

$$a^2+b^2+c^2+d^2\equiv 1\,(\text{mod }4),\quad \delta^4a^2b^2c^2\equiv 0\,(\text{mod }4).$$

II. Două dintre numerele a, b, c şi d sunt pare, iar celelalte două impare; atunci:

$$a^2+b^2+c^2+d^2\equiv 2\,(\text{mod }4),\quad \delta^4a^2b^2c^2\equiv 0\,(\text{mod }4).$$

III. Unul dintre numerele a, b, c şi d este par, iar celelalte trei sunt impare; atunci:

$$a^2+b^2+c^2+d^2\equiv 3\,(\text{mod }4).$$

Dacă unul dintre numerele a, b sau c este par, atunci $\delta^2a^2b^2c^2\equiv 0(\text{mod }4)$. Dacă d este par, atunci $\delta^2a^2b^2c^2$ este congruent cu 0 sau 1 modulo 4, după cum d este par sau impar.

IV. Toate numerele a, b, c şi d sunt impare. Fie $a=2k+1$, atunci:

$$a^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=4k(k+1)\equiv 1\ \ (\text{mod }8)$$

şi deci

$$a^2+b^2+c^2+d^2\equiv 4\,(\text{mod }8)\equiv 0\,(\text{mod }4).$$

Dacă δ este impar, atunci $\delta^4a^2b^2c^2\equiv 1(\text{mod }4)$.

Dacă δ este par, atunci

$$\delta^4a^2b^2c^2\equiv 0\,(\text{mod }16)\equiv 1\,(\text{mod }8).$$

Prin urmare, nici una dintre cele patru variante de mai sus nu este posibilă. Cum, de asemenea, nu este posibil nici ca toate numerele a, b, c şi d să fie prime, urmează că singura soluţie a ecuaţiei iniţiale este $x = y = z = w$.

Soluţie dată de *Marian Tetiva*, profesor la Colegiul Naţional „Gheorghe Roşca-Codreanu" din Bârlad.

Ecuaţia nu are decât soluţia banală $x = y = z = w = 0$.

Se ştie că pătratele numerelor întregi pare, respectiv impare, dau la împărţirea cu 4 restul 0, respectiv 1. Prin urmare dacă printre numerele x, y, z, w sunt k numere impare ($0 \leq k \leq 4$), atunci avem $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 \equiv k \pmod 4$. În particular, se vede că nu este posibil cazul $k = 4$ (adică să fie toate numerele impare), deoarece membrul stâng ar fi par (chiar multiplu de 4), iar cel drept impar. Atunci cel puţin unul din cele patru numere este par şi acela nu poate fi w (dacă x, y, z sunt impare), deoarece în această situaţie membrul stâng ar da restul 3 la împărţirea cu 4, iar membrul drept ar da restul 1. Dar dacă unul dintre x, y, z este par, atunci membrul drept este 0 modulo 4, deci trebuie să fie la fel şi membrul stâng: ceea ce, după cum am arătat, se poate realiza doar dacă x, y, z, w sunt toate pare.

Fie atunci $x = 2x_1$, $y = 2y_1$, $z = 2z_1$, $w = 2w_1$; x_1, y_1, z_1, w_1 sunt numere întregi care verifică

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + w_1^2 = 16x_1^2y_1^2z_1^2.$$

Rezultă că $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + w_1^2 \equiv 0 \pmod 8$ şi cum modulo 8 pătratul unui număr este congruent cu 0 sau 4, respectiv 1 (după cum numărul este par, respectiv impar) rezultă ca mai sus că x_1, y_1, z_1, w_1 trebuie să fie toate pare. Dacă $x_1 = 2x_2$, $y_1 = 2y_2$, $z_1 = 2z_2$, $w_1 = 2w_2$ (deci $x = 2^2x_2$, $y = 2^2y_2$, $z = 2^2z_2$, $w = 2^2w_2$), obţinem

$$x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 + w_2^2 = 16^2x_2^2y_2^2z_2^2.$$

Acum raţionamentul se poate repeta pentru a obţine că x_2, y_2, z_2, w_2 sunt şi ele pare (deci x, y, z, w se divid cu 2^3) şi aşa mai departe. Prin urmare rezultă că x, y, z, w se divid toate cu orice putere a lui 2, ceea ce, evident, se poate întâmpla doar dacă $x = y = z = w = 0$ şi asta am vrut să demonstrăm.

Nota redacţiei. O soluţie corectă a problemei a mai dat şi domnul *Marius Olteanu* – S. C. Hidroconstrucţia S.A. Bucureşti, sucursala „Olt-Superior" din Râmnicu-Vâlcea.

244. *Fie $a, b, c > 0$ şi $p > -2$. Să se arate că*

$$\frac{2a^2 + (1+2p)bc}{b^2 + pbc + c^2} + \frac{2b^2 + (1+2p)ca}{c^2 + pca + a^2} + \frac{2c^2 + (1+2p)ab}{a^2 + pab + b^2} \geq \frac{3(3+2p)}{2+p}.$$

Vasile Cârtoaje

Soluţia autorului. *Cazul $p \geq -1$.*

Scriem inegalitatea sub forma:

$$\sum \frac{2a^2 - b^2 - c^2}{b^2 + pbc + c^2} \geq \sum \left[\frac{3+2p}{2+p} - \frac{b^2 + c^2 + (1+2p)bc}{b^2 + pbc + c^2}\right],$$

ceea ce este echivalent cu

$$\frac{2a^2 - b^2 - c^2}{b^2 + pbc + c^2} \geq \frac{1+p}{2+p} \sum \frac{(b-c)^2}{b^2 + pbc + c^2}.$$

Deoarece

$$\sum \frac{2a^2 - b^2 - c^2}{b^2 + pbc + c^2} = \frac{(a^2 - b^2) - (c^2 - a^2)}{b^2 + pbc + c^2} + \frac{(b^2 - c^2) - (a^2 - b^2)}{c^2 + pca + a^2} + \frac{(c^2 - a^2) - (b^2 - c^2)}{a^2 + pab + b^2} =$$

$$= \sum (b^2 - c^2)\left(\frac{1}{c^2 + pca + a^2} - \frac{1}{a^2 + pab + b^2}\right) = \sum \frac{(b-c)^2(b+c)(pa+b+c)}{(c^2 + pca + a^2)(a^2 + pab + b^2)},$$

inegalitatea capătă forma:

$$A(b-c)^2 + B(a-c)^2 + C(a-b)^2 \geq 0,$$

unde

$$A = (2+p)(b+c)(pa+b+c)(b^2 + pbc + c^2) - (1+p)(c^2 + pca + a^2)(a^2 + pab + b^2),$$

$$B = (2+p)(c+a)(a+pb+c)(c^2+pca+a^2) - (1+p)(a^2+pab+b^2)(b^2+pbc+c^2),$$
$$C = (2+p)(a+b)(a+b+pc)(a^2+pab+b^2) - (1+p)(b^2+pbc+c^2)(c^2+pca+a^2).$$

Deoarece inegalitatea este simetrică în raport cu a, b şi c, considerăm $a \geq b \geq c$ şi arătăm că $B \geq 0$, $C \geq 0$ şi $A+B \geq 0$. Într-adevăr, în aceste condiţii, avem

$$A(b-c)^2+B(a-c)^2+C(a-b)^2 \geq A(b-c)^2+B(a-c)^2 \geq A(b-c)^2+B(b-c)^2 = (A+B)(b-c)^2 \geq 0.$$

Inegalitatea $B \geq 0$ rezultă prin înmulţirea inegalităţilor

$$(2+p)(c+a)(a+pb+c) \geq (1+p)(a^2+pab+b^2)$$

şi

$$c^2+pca+a^2 \geq b^2+pbc+c^2.$$

Prima inegalitate, scrisă sub forma

$$(2+p)c^2+(2+p)(2a+pb)c+(a-b)[a+(1+p)b] \geq 0,$$

este adevărată deoarece $2a+pb = 2(a-b)+(2+p)b > 0$ şi $a+(1+p)b = a-b+(2+p)b > 0$.

A doua inegalitate este adevărată deoarece

$$c^2+pca+a^2-(b^2+pbc+c^2) = (a-b)(a+b+pc) = (a-b)[(a-c)+(b-c)+(2+p)c] > 0.$$

Inegalitatea $C \geq 0$ rezultă prin înmulţirea inegalităţilor

$$2+p > 1+p,$$
$$(a+b)(a+b+pc) \geq c^2+pca+a^2,$$
$$a^2+pab+b^2 \geq b^2+pbc+c^2.$$

Într-adevăr, avem

$$(a+b)(a+b+pc)-c^2-pca-a^2 = b^2-c^2+b[2(a-c)+(2+p)c] \geq 0$$

şi

$$a^2+pab+b^2-(b^2+pbc+c^2) = (a-c)[a-b+(1+p)b+c] \geq 0.$$

Inegalitatea $A+B \geq 0$ se demonstrează ordonând expresia $A+B$ după puterile lui c, astfel

$$A+b = c_4c^4+c_3c^3+c_2c^2+c_1c+c_0,$$

unde

$$c_4 = 2(2+p),$$
$$c_3 = 2(1+p)(2+p)(a+b),$$
$$c_2 = 2(1+p)^2(a^2+b^2+pab),$$
$$c_1 = (4+3p)(a^3+b^3)+p(1+p)ab(a+b) \geq (2+p)^2ab(a+b)$$

şi

$$c_0 = (a-b)^2[a^2+b^2+(2+p)ab].$$

Deoarece $c_4 > 0$, $c_3 \geq 0$, $c_2 \geq 0$, $c_1 > 0$ şi $c_0 \geq 0$, avem evident $A+B \geq 0$.

II. *Cazul* $-2 < p < -1$.

Scriem inegalitatea sub forma

$$\sum \left[\frac{2a^2+(1+2p)bc}{b^2+pbc+c^2} - \frac{1+2p}{2+p}\right] \geq \frac{6}{2+p},$$

echivalentă cu

$$\sum \frac{f(a,b,c)}{b^2+pbc+c^2} \geq 6,$$

unde

$$f(a,b,c) = (4+2p)a^2-(1+2p)(b-c)^2 \geq 0.$$

Vom arăta că

$$\sum \frac{f(a,b,c)}{b^2+pbc+c^2} \geq \frac{\left[\sum f(a,b,c)\right]^2}{\sum f(a,b,c)\left(b^2+pbc+c^2\right)} \geq 6.$$

Inegalitatea din stânga rezultă direct din inegalitatea *Cauchy-Schwarz*. Pentru demonstrarea inegalităţii din dreapta ţinem seama că

$$\frac{1}{2}f(a,b,c)=(1-p)\sum a^2+(1+2p)\sum bc,$$

$$\frac{1}{2}\left[\sum f(a,b,c)\right]^2=$$

$$=2(1-p)^2\sum a^2+6(1+2p^2)\sum b^2c^2+4\left(1+p-2p^2\right)\sum bc\left(b^2+c^2\right)+4(2+p)(1+2p)abc\sum a,$$

$$3\sum f(a,b,c)\left(b^2+pbc+c^2\right)=$$

$$=-6(1+2p)\sum a^4+6(3+p+2p^2)\sum b^2c^2+3(2-p)(1+2p)\sum bc\left(b^2+c^2\right)+6p(2+p)abc\sum a.$$

Pe baza acestor relaţii, inegalitatea cerută devine succesiv astfel:

$$2(2+p)\left(\sum a^4+abc\sum a\right)-(2+p)(1+2p)\sum bc\left(b^2+c^2\right)-6(2+p)\sum b^2c^2\geq 0,$$

$$2(2+p)\left[\sum a^4+abc\sum a-\sum bc\left(b^2+c^2\right)\right]+3\left[\sum bc\left(b^2+c^2\right)-2\sum b^2c^2\right]\geq 0,$$

$$2(2+p)\sum a^2(a-b)(a-c)+3\sum bc(b-c)^2\geq 0.$$

Ultima formă rezultă imediat din inegalitatea lui *Schur*:

$$\sum a^2(a-b)(a-c)\geq 0.$$

Cu aceasta inegalitatea dată este demonstrată. Avem egalitate pentru $a=b=c$, precum şi în cazurile $a=0$ şi $b=c$, $b=0$ şi $a=c$, $c=0$ şi $a=b$.

Pentru $p=2$, $p=1$, $p=0$, $p=\frac{-1}{4}$, $p=\frac{-1}{2}$, $p=-1$ şi $p=\frac{-3}{2}$, obţinem respectiv următoarele inegalităţi:

$$\frac{2a^2+5bc}{(b+c)^2}+\frac{2b^2+5ac}{(c+a)^2}+\frac{2c^2+5ab}{(a+b)^2}\geq\frac{21}{4},$$

$$\frac{2a^2+3bc}{b^2+bc+c^2}+\frac{2b^2+3ac}{c^2+ca+a^2}+\frac{2c^2+3ab}{a^2+ab+b^2}\geq 5,$$

$$\frac{2a^2+bc}{b^2+c^2}+\frac{2b^2+ca}{c^2+a^2}+\frac{2c^2+ab}{a^2+b^2}\geq\frac{9}{2},$$

$$\frac{1}{4b^2-bc+4c^2}+\frac{1}{4c^2-ca+4a^2}+\frac{1}{4a^2-ab+4b^2}\geq\frac{9}{7(a^2+b^2+c^2)},$$

$$\frac{a^2}{2b^2-bc+2c^2}+\frac{b^2}{2c^2-ca+4a^2}+\frac{c^2}{2a^2-ab+2b^2}\geq 1,$$

$$\frac{2a^2-bc}{b^2-bc+c^2}+\frac{2b^2-ca}{c^2-ca+a^2}+\frac{2c^2-ab}{a^2-ab+b^2}\geq 3,$$

$$\frac{a^2-bc}{2b^2-3bc+2c^2}+\frac{b^2-ca}{2c^2-3ca+2a^2}+\frac{c^2-ab}{2a^2-3ab+2b^2}\geq 0.$$

Nota redacţiei. Domnul inginer *Marius Olteanu* de la S. C. Hidroconstrucţia S.A. Bucureşti, sucursala „Olt-Superior" din Râmnicu-Vâlcea face observaţia că inegalitatea a fost inserată în volumul V. Cârtoaje, *Algebraic Inequalities, old and new methods*, Editura GIL, Zalău, 2006. Facem menţiunea că problema se află în portofoliul nostru editorial cu mult înainte de apariţia cărţii.

245. *Prove that for any positive real numbers x, y, z, the inequality*

$$x^2y^2z^2\left(\frac{1}{x^6+y^3z^3}+\frac{1}{y^6+x^3z^3}+\frac{1}{z^6+x^3y^3}\right)\leq\frac{3}{2}$$

holds.

Marian Tetiva

Author's solution. We shall prove, for the beginning, that the inequality

$$\frac{a}{a^3+1}+\frac{b}{b^3+1}+\frac{c}{c^3+1}\leq\frac{3}{2}$$

is valid for any positive a, b, c with $abc=1$, for which we need these two helping results.

Lemma 1. *For* $\alpha\in\left[\frac{1}{\sqrt[3]{2}},1\right)$ *and any positive* x, y *such that* $xy=\alpha^2$, *the inequality*

$$\frac{x}{x^3+1}+\frac{y}{y^3+1}\leq\frac{2\alpha}{\alpha^3+1}$$

takes place.

Proof. By replacing y with $\dfrac{\alpha^2}{x}$ we get the equivalent form

$$\frac{x}{x^3+1}+\frac{\alpha^2x^2}{x^3+\alpha^6}\leq\frac{2\alpha}{\alpha^3+1}$$

of the inequality that we have to prove; after clearing the denominators and some more simple calculations this becomes (also equivalently)

$$2\alpha x^6-\left(\alpha^5+\alpha^2\right)x^5-\left(\alpha^3+1\right)x^4+2\left(\alpha^7+\alpha\right)-\left(\alpha^5+\alpha^2\right)x^2-\left(\alpha^9+\alpha^6\right)x+2\alpha^7\geq 0.$$

As expected, the sixth degree polynomial from the left-hand side is divisible by $(x-\alpha)^2$; so, we can rewrite this as

$$(x-\alpha)^2\left(2\alpha x^4+\left(3\alpha^2-\alpha^5\right)x^3-\left(2\alpha^6-3\alpha^3+1\right)x^2+\left(3\alpha^4-\alpha^7\right)x+2\alpha^5\right)\geq 0.$$

Now, the hypothesis $\alpha\in\left[\frac{1}{\sqrt[3]{2}},1\right]$ implies $\alpha^3\in\left[\frac{1}{2},1\right]$, thus

$$2\alpha^6-3\alpha^3+1=\left(2\alpha^3-1\right)\left(\alpha^3-1\right)\leq 0$$

and, also,

$$3\alpha^2-\alpha^5=2\alpha^2+\alpha^2\left(1-\alpha^3\right)0 \text{ and } 3\alpha^4-\alpha^7=2\alpha^4+\alpha^4(1-\alpha^3)>0;$$

therefore

$$2\alpha x^4+\left(3\alpha^2-\alpha^5\right)x^3-\left(2\alpha^6-3\alpha^3+1\right)x^2+\left(3\alpha^4-\alpha^7\right)x+2\alpha^5$$

is positive, as a sum of non-negative terms (some of them being even strictly positive) and the first lemma is proved.

Lemma 2. *The inequality*

$$\frac{2t^2}{t^3+1}+\frac{t^2}{t^6+1}\leq\frac{3}{2}$$

is true for any positive t.

Proof. After clearing the denominators and some further calculations the inequality proves itself to be equivalent with

$$3t^9-4t^8+3t^6-2t^5+3t^3-6t^2+3\geq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(t-1)^2(3t^7+2t^6+t^5+3t^4+3t^3+3t^2+6t+3)\geq 0,$$

which is evident for $t>0$.

Now let us solve our problem. Because we have $abc=1$ (and $a,b,c>0$), one of the three numbers has to be greater than (or equal to) 1. Suppose (without loss of generality, due to the symmetry) that this is c and consider two cases.

i) First, as sume that $c\in\left[1,\sqrt[3]{4}\right]$; then

$$\frac{1}{\sqrt{c}}\in\left[\frac{1}{\sqrt[3]{2}},1\right]$$

and $ab = \dfrac{1}{c} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{c}}\right)^2$. According to the first lemma, we have

$$\frac{a}{a^3+1}+\frac{b}{b^3+1} \le \frac{2\dfrac{1}{\sqrt{c}}}{\left(\dfrac{1}{\sqrt{c}}\right)^3+1} = \frac{2c}{c\sqrt{c}+1}$$

and this yields

$$\frac{a}{a^3+1}+\frac{b}{b^3+1}+\frac{c}{c^3+1} \le \frac{2c}{c\sqrt{c}+1}+\frac{c}{c^3+1}.$$

But second lemma (for $t=\sqrt{c}$) tells us that

$$\frac{2c}{c\sqrt{c}+1}+\frac{c}{c^3+1} \le \frac{3}{2},$$

so we get the desired inequality:

$$\frac{a}{a^3+1}+\frac{b}{b^3+1}+\frac{c}{c^3+1} \le \frac{2c}{c\sqrt{c}+1}+\frac{c}{c^3+1} \le \frac{3}{2}.$$

ii) In the second case we suppose that the number from a, b, c which is greater than 1 (asumed to be c) is also greater than $\sqrt[3]{4}$. One can observe that the function

$$f:(0,\infty)\to(0,\infty), \quad f(t)=\frac{t}{t^3+1}, \quad \forall\, t>0$$

has the derivative

$$f'(t)=\frac{1-2t^3}{(t^3+1)^2}, \quad \forall\, t>0;$$

therefore the function increases from 0 to $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ and decreases from $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ to ∞, having an absolute maximum at the point $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$:

$$f(t) \le f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = \frac{1}{3}\sqrt[3]{4}, \quad \forall\, t>0.$$

In particular, $f(a)$ aud $f(b)$ are less than (or equal to) $\dfrac{1}{3}\sqrt[3]{4}$. As concerns $f(c)$, we have

$$c \ge \sqrt[3]{4} \Rightarrow f(c) \le f\left(\sqrt[3]{4}\right) = \frac{1}{5}\sqrt[3]{4},$$

because of the monotony of the function f. Then

$$\frac{a}{a^3+1}+\frac{b}{b^3+1}+\frac{c}{c^3+1} = f(a)+f(b)+f(c) \le \left(2\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)\sqrt[3]{4} = \frac{13}{15}\sqrt[3]{4} \le \frac{13}{15}\cdot\frac{8}{5} = \frac{104}{75} < \frac{3}{2}$$

(the inequality $\sqrt[3]{4} < 1,6$ is equivalent to $4 < 1,6^3 = 4,096$, thus it is true) aud the proof ends.

Now, to get the enounce inequality, it is sufficient to take

$$a=\frac{x^2}{yz}, \quad b=\frac{y^2}{xz}, \quad c=\frac{z^2}{xy}$$

in

$$\frac{a}{a^3+1}+\frac{b}{b^3+1}+\frac{c}{c^3+1} \le \frac{3}{2}, \quad a,b,c>0, \quad abc=1;$$

we are now campletely done.

Observation. We can give to our inequality the alternative form

$$\frac{xy^2}{x^3+y^3}+\frac{yz^2}{y^3+z^3}+\frac{zx^2}{z^3+x^3} \le \frac{3}{2}, \quad \forall\, x,y,z>0$$

(it suffices to replace a, b, c from the enounce with $\dfrac{x}{y}$, $\dfrac{y}{z}$, $\dfrac{z}{x}$ respectively).

Soluţie dată de *Marius Olteanu*, inginer la S. C. Hidroconstrucţia S.A. Bucureşti, sucursala „Olt-Superior“ din Râmnicu-Vâlcea.

Inegalitatea se scrie echivalent astfel

$$\frac{1}{\frac{x^4}{y^2z^2}+\frac{yz}{x^2}}+\frac{1}{\frac{y^4}{x^2z^2}+\frac{xz}{y^2}}+\frac{1}{\frac{z^4}{x^2y^2}+\frac{xy}{z^2}}\leq\frac{3}{2}. \tag{1}$$

Notând $\frac{x}{y}=a$, $\frac{y}{z}=b$, $\frac{z}{x}=c$, avem $abc=1$, $a>0$, $b>0$, $c>0$, iar (1) devine

$$\frac{1}{\frac{a^2}{c^2}+\frac{c}{a}}+\frac{1}{\frac{b^2}{a^2}+\frac{a}{b}}+\frac{1}{\frac{c^2}{b^2}+\frac{b}{c}}\leq\frac{3}{2}. \tag{2}$$

Notând $\frac{a}{b}=A$, $\frac{b}{c}=B$, $\frac{c}{a}=C$, avem $ABC=1$, $A>0$, $B>0$, $C>0$, iar (2) devine

$$\frac{1}{A+\frac{1}{A^2}}+\frac{1}{B+\frac{1}{B^2}}+\frac{1}{C+\frac{1}{C^2}}\leq\frac{3}{2},$$

i.e.

$$\frac{A^2}{A^3+1}+\frac{B^2}{B^3+1}+\frac{C^2}{C^3+1}\leq\frac{3}{2}.$$

Cum $ABC=1$, avem $C=\frac{1}{AB}$, deci (2) este echivalentă cu

$$\frac{A^2}{A^3+1}+\frac{B^2}{B^3+1}+\frac{AB}{A^3B^3+1}\leq\frac{3}{2}. \tag{3}$$

Din cauza simetriei putem conchide $A\geq B\geq C$; cum $ABC=1$, rezultă că $AB\geq 1$ şi $C\leq 1$. Mai departe „fixăm“ pe B şi considerăm $A=B\cdot x$, unde $x\geq 1$ (deoarece $A\geq B$).

În plus, tot din condiţia $A\geq B\geq C$ şi $ABC=1$, rezultă că $A\geq 1$. Cum $AB\geq 1$, iar $A\geq 1$, ţinând seama de relaţia $A=B\cdot x$, obţinem că $B\cdot x\geq 1$ şi $(B\cdot x)\cdot B\geq 1$, i. e. $x\geq\frac{1}{B}$ şi $x\geq\frac{1}{B^2}$, de unde $x^2\geq\frac{1}{B^3}$, ceea ce este echivalent cu $x^2B^3\geq 1$. Astfel (3) devine

$$\frac{B^2x^2}{B^3x^3+1}+\frac{B^2}{B^3+1}+\frac{B^2x}{B^6x^3+1}\leq\frac{3}{2}. \tag{4}$$

Fie $f:[1,\infty)\to(0,\infty)$ definită astfel

$$f(x)=\frac{B^2x^2}{B^3x^3+1}+\frac{B^2}{B^3+1}+\frac{B^2x}{B^6x^3+1}, \tag{5}$$

unde $z\geq 1$, $x\geq\frac{1}{B}$, $x\geq\frac{1}{B^2}$, $x^2B^2\geq 1$.

Avem

$$f'(x)=B^2\left\{\left\{-x^7\cdot B^9-(x-1)\cdot\left[x^2\left(2x^3B^6-1\right)+\left(x^4B^6-1\right)+x\left(x^3B^6-1\right)\right]-\right.\right.$$

$$\left.\left.-4x\left(x^2B^2-1\right)-1\right\}\cdot x^3B^6+\left(1-x^4B^3\right)+2x^3B^3\left(1-x^4B^6\right)\right\}\cdot\frac{1}{\left(1+x^3B^3\right)^2\left(1+x^3B^6\right)^2}.$$

Din relaţiile (5) şi (3) obţinem $x^3\cdot B^6-1\geq 0$, $x^4\cdot B^6-1\geq 0$, $x^2\cdot B^2-1\geq 0$ şi $2x^3\cdot B^6-1>0$. Ţinând seama de aceste ultime inegalităţi şi de faptul că $x\geq 1$, se observă că $f'(x)<0$, pentru orice $x\geq 1$, deci f este strict descrescătoare pe $[1,\infty)$.

Prin urmare $f(x)\leq f(1)=B^2\left(\frac{2}{B^3+1}+\frac{1}{B^6+1}\right)$, $B>0$.

În continuare vom arăta că

$$B^2\cdot\left(\frac{2}{B^3+1}+\frac{1}{B^6+1}\right)\leq\frac{3}{2}. \tag{6}$$

Într-adevăr, aducând la acelaşi numitor şi efectuând câteva calcule, inegalitatea (6) este echivalentă cu a arăta că

$$4B^8+6B^2+2B^5\le 3B^9+3B^6+3B^3+3,\ \forall B>0,$$

i. e. cu

$$3B^9-4B^8+3B^6-2B^5+3B^3-6B^2+3\ge 0,\ \forall B>0,$$

adică cu inegalitatea

$$(B-1)^2\left[B^7+B^6(B+1)+B^5(B^2+B+1)+3B(B^2+1)(B+1)+3(B+1)\right]\ge 0,\ \forall B>0.$$

Ultima inegalitate, este evident, adevărată.

Aşadar, având în vedere (6), avem $f(x)\le\dfrac{3}{2}$. Revenind la notaţia $A=Bx$, obţinem chiar inegalitatea (3), q. e. d.

Soluţie dată de *Ilie Bulacu*, matematician la Erhardt+Leimer PTS, Bucureşti.

Vom demonstra o inegalitate mai generală decât cea din enunţ, anume:

Fie x, y, z, λ numere reale strict pozitive . Atunci are loc următoarea inegalitate

$$x^{\frac{2\lambda}{3}}y^{\frac{2\lambda}{3}}z^{\frac{2\lambda}{3}}\left(\frac{1}{x^{2\lambda}+y^{\lambda}z^{\lambda}}+\frac{1}{y^{2\lambda}+z^{\lambda}x^{\lambda}}+\frac{1}{z^{2\lambda}+x^{\lambda}y^{\lambda}}+\right)\le\frac{3}{2}.$$

Egalitate avem dacă şi numai dacă $x=y=z$.

Vom introduce două notaţii pentru două tipuri de sume care apar în calcul: suma ciclică şi suma simetrică. Pentru $P(x,y,z)$ o funcţie de trei variabile reale strict pozitive, definim

$$\sum_{ciclic}P(x,y,z)=P(x,y,z)+P(y,z,x)+P(z,x,y),$$

$$\sum_{sim}P(x,y,z)=P(x,y,z)+P(x,z,y)+P(y,z,x)+P(y,x,z)+P(z,x,y)+P(z,y,z).$$

Ţinând cont de aceste notaţii, inegalitatea din enunţ se transformă succesiv astfel

$$x^{\frac{2\lambda}{3}}y^{\frac{2\lambda}{3}}z^{\frac{2\lambda}{3}}\sum_{ciclic}\frac{1}{x^{2\lambda}+y^{\lambda}z^{\lambda}}\le\frac{3}{2}\Leftrightarrow$$

$$x^{\frac{2\lambda}{3}}y^{\frac{2\lambda}{3}}z^{\frac{2\lambda}{3}}\frac{\sum\limits_{ciclic}\left(x^{2\lambda}+y^{\lambda}z^{\lambda}\right)\left(y^{2\lambda}+z^{\lambda}x^{\lambda}\right)}{\left(x^{2\lambda}+y^{\lambda}z^{\lambda}\right)\left(y^{2\lambda}+z^{\lambda}x^{\lambda}\right)\left(z^{2\lambda}+x^{\lambda}y^{\lambda}\right)}\le\frac{3}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^{\frac{2\lambda}{3}}y^{\frac{2\lambda}{3}}z^{\frac{2\lambda}{3}}\left(\frac{\sum\limits_{ciclic}x^{2\lambda}y^{2\lambda}+\sum\limits_{sum}x^{3\lambda}y^{\lambda}+\sum\limits_{ciclic}x^{2\lambda}y^{\lambda}z^{\lambda}}{\sum\limits_{ciclic}x^{2\lambda}y^{2\lambda}+\sum\limits_{ciclic}x^{4\lambda}y^{\lambda}z^{\lambda}+2x^{2\lambda}y^{2\lambda}z^{2\lambda}}\right)\le\frac{3}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\sum_{ciclic}x^{3\lambda}y^{3\lambda}+3\sum_{ciclic}x^{4\lambda}y^{\lambda}z^{\lambda}+6x^{2\lambda}y^{2\lambda}z^{2\lambda}\ge$$

$$\ge 2\sum_{ciclic}x^{\frac{8\lambda}{3}}y^{\frac{8\lambda}{3}}z^{\frac{2\lambda}{3}}+2\sum_{sim}x^{\frac{11\lambda}{3}}y^{\frac{5\lambda}{3}}z^{\frac{2\lambda}{3}}+2\sum_{ciclic}x^{\frac{8\lambda}{3}}y^{\frac{5\lambda}{3}}z^{\frac{5\lambda}{3}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{3}{2}\sum_{sim}x^{3\lambda}y^{3\lambda}+\frac{3}{2}\sum_{sim}x^{4\lambda}y^{\lambda}z^{\lambda}+\sum_{sim}x^{2\lambda}y^{2\lambda}z^{2\lambda}\ge$$

$$\ge\sum_{sim}x^{\frac{8\lambda}{3}}y^{\frac{8\lambda}{3}}z^{\frac{2\lambda}{3}}+2\sum_{sim}x^{\frac{11\lambda}{3}}y^{\frac{5\lambda}{3}}z^{\frac{2\lambda}{3}}+\sum_{sim}x^{\frac{8\lambda}{3}}y^{\frac{5\lambda}{3}}z^{\frac{5\lambda}{3}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\sum_{sim}x^{3\lambda}y^{3\lambda}+3\sum_{sim}x^{4\lambda}y^{\lambda}z^{\lambda}+2\sum_{sim}x^{2\lambda}y^{2\lambda}z^{2\lambda}\ge$$

$$\ge 2\sum_{sim}x^{\frac{8\lambda}{3}}y^{\frac{8\lambda}{3}}z^{\frac{2\lambda}{3}}+4\sum_{sim}x^{\frac{11\lambda}{3}}y^{\frac{5\lambda}{3}}z^{\frac{2\lambda}{3}}+2\sum_{sim}x^{\frac{8\lambda}{3}}y^{\frac{5\lambda}{3}}z^{\frac{5\lambda}{3}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sum_{sim}x^{3\lambda}y^{3\lambda}+\sum_{sim}x^{3\lambda}y^{3\lambda}+3\sum_{sim}x^{4\lambda}y^{\lambda}z^{\lambda}+2\sum_{sim}x^{2\lambda}y^{2\lambda}z^{2\lambda}\ge$$

$$\geq 2\sum_{sim} x^{\frac{8\lambda}{3}}y^{\frac{8\lambda}{3}}z^{\frac{2\lambda}{3}}+\sum_{sim} x^{\frac{11\lambda}{3}}y^{\frac{5\lambda}{3}}z^{\frac{2\lambda}{3}}+3\sum_{sim} x^{\frac{11\lambda}{3}}y^{\frac{5\lambda}{3}}z^{\frac{2\lambda}{3}}+2\sum_{sim} x^{\frac{8\lambda}{3}}y^{\frac{5\lambda}{3}}z^{\frac{5\lambda}{3}}.$$

Trecând toţi termenii într-un singur membru, obţinem inegalitatea

$$2\left(\sum_{sim} x^{3\lambda}y^{3\lambda}-\sum_{sim} x^{\frac{8\lambda}{3}}y^{\frac{8\lambda}{3}}z^{\frac{2\lambda}{3}}\right)+\left(\sum_{sim} x^{3\lambda}y^{3\lambda}-\sum_{sim} x^{\frac{5\lambda}{3}}y^{\frac{2\lambda}{3}}z^{\frac{11\lambda}{3}}\right)+$$

$$+3\left(\sum_{sim} x^{4\lambda}y^{\lambda}z^{\lambda}-\sum_{sim} x^{\frac{5\lambda}{3}}y^{\frac{2\lambda}{3}}z^{\frac{11\lambda}{3}}\right)+2\left(\sum_{sim} x^{2\lambda}y^{2\lambda}z^{2\lambda}-\sum_{sim} x^{\frac{5\lambda}{3}}y^{\frac{5\lambda}{3}}z^{\frac{8\lambda}{3}}\right)\geq 0.$$

În continuare aplicăm inegalitatea lui *Muirhead*, care are următorul enunţ:
Fie a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 numere reale pozitive astfel încât

$$a_1\geq a_2\geq a_3,\ b_1\geq b_2\geq b_3,\ a_1\geq b_1,\ a_1+a_2\geq b_1+b_2,\ a_1+a_2+a_3=b_1+b_2+b_3.$$

Dacă x, y, z sunt numere reale pozitive, atunci

$$\sum_{sim} x^{a_1}y^{a_2}z^{a_3}\geq \sum_{sim} x^{b_1}y^{b_2}z^{b_3}.$$

Egalitate avem dacă şi numai dacă $x=y=z$ sau $x=y$, $z=0$ sau $y=z$, $x=0$ sau $z=x$, $y=0$.

În cazul nostru luăm succesiv

$$a_1=3\lambda,\ a_2=3\lambda,\ a_3=0,\ b_1=\frac{8\lambda}{3},\ b_2=\frac{8\lambda}{3},\ b_3=\frac{2\lambda}{3}$$
$$a_1=3\lambda,\ a_2=3\lambda,\ a_3=0,\ b_1=\frac{5\lambda}{3},\ b_2=\frac{2\lambda}{3},\ b_3=\frac{11\lambda}{3}$$
$$a_1=4\lambda,\ a_2=4\lambda,\ a_3=\lambda,\ b_1=\frac{5\lambda}{3},\ b_2=\frac{2\lambda}{3},\ b_3=\frac{11\lambda}{3}$$
$$a_1=2\lambda,\ a_2=2\lambda,\ a_3=2\lambda,\ b_1=\frac{5\lambda}{3},\ b_2=\frac{5\lambda}{3},\ b_3=\frac{8\lambda}{3}$$

şi rezultă, conform inegalităţii lui *Muirhead*, că fiecare termen al inegalităţii de mai sus este pozitiv.
În plus, egalitate avem dacă şi numai dacă $x=y=z$, deoarece x, y, z sunt numere reale strict pozitive.

Observaţie. Înlocuind x cu $\frac{1}{x}$, y cu $\frac{1}{y}$ şi z cu $\frac{1}{z}$, obţinem următoarea inegalitate echivalentă

$$\frac{x^{\frac{4\lambda}{3}}y^{\frac{\lambda}{3}}z^{\frac{\lambda}{3}}}{x^{2\lambda}+y^{\lambda}z^{\lambda}}+\frac{x^{\frac{\lambda}{3}}y^{\frac{4\lambda}{3}}z^{\frac{\lambda}{3}}}{y^{2\lambda}+z^{\lambda}x^{\lambda}}+\frac{x^{\frac{\lambda}{3}}y^{\frac{\lambda}{3}}z^{\frac{4\lambda}{3}}}{z^{2\lambda}+x^{\lambda}y^{\lambda}}\leq\frac{3}{2}.$$

Egalitate avem avem dacă şi numai dacă $x=y=z$.
Observaţie. În particular, pentru $\lambda=3$, obţinem inegalitatea din enunţ.
Generalizare. *Fie $x_1,x_2,\ldots,x_n,\lambda$ numere reale strict pozitive şi n număr natural astfel încât $n\geq 3$. Are loc următoarea inegalitate*

$$x_1^{\frac{(n-1)\lambda}{n}}x_2^{\frac{(n-1)\lambda}{n}}\cdot\ldots\cdot x_n^{\frac{(n-1)\lambda}{n}}\left(\frac{1}{x_1^{(n-1)\lambda}+x_2^{\lambda}x_3^{\lambda}\ldots x_n^{\lambda}}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{x_2^{(n-1)\lambda}+x_1^{\lambda}x_3^{\lambda}\ldots x_n^{\lambda}}+\ldots+\frac{1}{x_n^{(n-1)\lambda}+x_1^{\lambda}x_2^{\lambda}\ldots x_{n-1}^{\lambda}}\right)\leq\frac{n}{2}.$$

Egalitate avem avem dacă şi numai dacă $x_1=x_2=\ldots=x+n$.

246. *Fie a, b, c numere reale strict pozitive şi $n\geq 4$ un număr natural. Să se demonstreze că*

$$\left(\frac{na}{b+c}+1\right)\left(\frac{nb}{c+a}+1\right)\left(\frac{nc}{a+b}+1\right)>(n+1)^2.$$

Dan Coma

Soluţia autorului. Având în vedere simetria în a, b, c a inegalităţii putem considera $a \le b \le c$. De asemenea, notăm $S_1 = a+b+c$, $S_2 = ab+bc+ca$, $S_3 = abc$. În aceste condiţii inegalitatea din enunţ devine

$$[S_1+(n-1)a]\,[S_1+(n-1)b]\,[S_1+(n-1)c] > (n+1)^2(S_1-a)(S_1-b)(S_1-c)$$

sau, după efectuarea calculelor,

$$nS_1^3+(n-1)^2S_1S_2+(n-1)^3S_3 > (n+1)^2S_1S_2-(n+1)^2S_3,$$

de unde

$$S_1^3-4S_1S_2+(n^2-2n+5)S_3 > 0.$$

Înlocuind S_1, S_2, S_3 şi efectuând calculele obţinem succesiv

$$\begin{aligned}S_1^3-4S_1S_2+(n^2-2n+5)S_3 &= (a+b+c)^3-4(a+b+c)(ab+bc+ca)+(n^2-2n+5)abc=\\ &=(a+b+c)\left[(a+b+c)^2-4(ab+bc+ca)\right]+(n^2-2n+5)abc=\\ &=(a+b+c)\left[a^2+b^2+c^2-2ab-2bc-2ca)\right]+(n^2-2n+5)abc=\\ &=(a+b+c)(a+b-c)^2-4ab(a+b+c)+(n^2-2n+5)abc=\\ &=(a+b+c)(a+b-c)^2-4ab(a+b)-4abc+(n^2-2n+1)abc=\\ &=(a+b+c)(a+b+c)^2-4ab(a+b)+(n^2-2n+5)abc=\\ &=(a+b+c)(a+b+c)^2-4ab(a+b)+(n-1)^2abc=\\ &=(a+b+c)(a+b+c)^2+ab\left[(n-1)^2c-4a-4b\right]>0,\end{aligned}$$

deoarece $a+b+c>0$, $(a+b+c)^2>0$, $ab>0$, iar pentru $n \ge 4$ avem şi $(n-1)^2c-4a-4b>0$.

Observaţii. 1) Pentru $n=4$ se obţine inegalitatea din volumul L. Panaitopol, V. Băndilă, M. Lascu, *Inegalităţi*, Editura GIL Zalău, 1996, unde are altă soluţie.

2) Pentru $n<4$ sensul inegalităţii se schimbă.

Soluţie dată de *Ilie Bulacu*, matematician la Erhardt+Leimer, România PTS, Bucureşti. Vom enunţa şi vom demonstra o inegalitate mai generală şi mai tare decât cea din enunţ:

Fie a, b, c anumere reale pozitive, asstfel încât cel puţin două sunt strict pozitive şi λ un număr real strict pozitiv.

Să se demonstreze că

$$\left(\frac{\lambda a}{b+c}+1\right)\left(\frac{\lambda b}{c+a}+1\right)\left(\frac{\lambda c}{a+b}+1\right) \ge (\lambda+1)^2,\ \forall\,\lambda \ge 1+\sqrt{5}.$$

Pentru $\lambda = 1+\sqrt{5}$ egalitatea are loc dacă şi numai dacă $a=b=c$ sau $a=0$, $b=c$ sau $b=0$, $c=a$ sau $c=0$, $a=b$, iar pentru $\lambda > 1+\sqrt{5}$ egalitatea are loc dacă şi numai dacă $a=0$, $b=c$ sau $b=0$, $c=a$ sau $c=0$, $a=b$.

Într-adevăr, inegalitatea de mai sus se scrie succesiv

$$\begin{gathered}(\lambda a+b+c)(\lambda b+c+a)(\lambda c+a+b) \ge (\lambda+1)^2(b+c)(c+a)(a+b),\ \forall\,\lambda \ge 1+\sqrt{5} \Leftrightarrow\\ \Leftrightarrow \left[\lambda a^2+\lambda b^2+\left(\lambda^2+1\right)ab+(\lambda+1)bc+(\lambda+1)ca+c^2\right](\lambda c+a+b) \ge\\ \ge (\lambda+1)^2\left(ab+bc+ca+c^2\right)(a+b),\ \forall\,\lambda \ge 1+\sqrt{5} \Leftrightarrow\\ \Leftrightarrow \lambda\left(a^3+b^3+c^3\right)+\left(\lambda^2+\lambda+1\right)\left(a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ac^2\right)+\\ +\left(\lambda^3+3\lambda+2\right)abc \ge (\lambda+1)^2\left(a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ac^2\right)+2(\lambda+1)^2abc,\\ \forall\,\lambda \ge 1+\sqrt{5} \Leftrightarrow\\ \lambda\left(a^3+b^3+c^3\right)+\lambda\left(\lambda^2-2\lambda-1\right)abc \ge \lambda\left(a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ac^2\right),\\ \forall\,\lambda \ge 1+\sqrt{5} \Leftrightarrow\\ \left(a^3+b^3+c^3\right)+\left(\lambda^2-2\lambda-1\right)abc \ge ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a),\ \forall\,\lambda \ge 1+\sqrt{5}.\end{gathered}$$

Ultima inegalitate rezultă imediat din inegalitatea lui *Schur* de gradul 3

$$a^3+b^3+c^3+3abc \ge ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a),\ a,b,c \ge 0,$$

ţinând seama de faptul că $\lambda^2-2\lambda-1 \ge 3$, $\forall\,\lambda \ge 1+\sqrt{5}$, adică $\lambda^2-2\lambda-4 \ge 0$, pentru $\lambda \ge 1+\sqrt{5}$.

Cazul de egalitate se deduce imediat în funcţie de λ din inegalitatea de mai sus.

Observaţie. În continuare vom stabili o inegalitate asemănătoare şi pentru $\lambda \leq 1+\sqrt{5}$. Astfel avem:

Fie a, b, c anumere reale pozitive, astfel încât cel puţin două sunt strict pozitive şi λ un număr real strict pozitiv. Să se demonstreze că

$$\left(\frac{\lambda a}{b+c}+1\right)\left(\frac{\lambda b}{c+a}+1\right)\left(\frac{\lambda c}{a+b}+1\right) \geq \left(\frac{\lambda}{2}+1\right)^3, \ \forall\, \lambda \leq 1+\sqrt{5}.$$

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $a=b=c$.

Într-adevăr, inegalitatea de mai sus se scrie succesiv:

$$(\lambda a+b+c)(\lambda b+c+a)(\lambda c+a+b) \geq \left(\frac{\lambda}{2}+1\right)^3 (b+c)(c+a)(a+b), \ \forall\, \lambda \leq 1+\sqrt{5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\lambda a^2+\lambda b^2+\left(\lambda^2+1\right)ab+(\lambda+1)bc+(\lambda+1)ca+c^2\right](\lambda c+a+b) \geq$$

$$\geq \left(\frac{\lambda}{2}+1\right)^3 \left(ab+bc+ca+c^2\right)(a+b), \ \forall\, \lambda \leq 1+\sqrt{5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda\left(a^3+b^3+c^3\right)+\left(\lambda^2+\lambda+1\right)\left(a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ac^2\right)+$$

$$+\left(\lambda^3+3\lambda+2\right)abc \geq \left(\frac{\lambda}{2}+1\right)^3\left(a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ac^2\right)+2\left(\frac{\lambda}{2}+1\right)^3 abc,$$

$$\forall\, \lambda \leq 1+\sqrt{5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda\left(a^3+b^3+c^3\right)+\frac{3\lambda^2(\lambda-2)}{4}abc \geq$$

$$\geq \frac{\lambda\left(\lambda^2-2\lambda+4\right)}{8}\left(a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ac^2\right), \ \forall\, \lambda \leq 1+\sqrt{5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8\left(a^3+b^3+c^3\right)+6\lambda(\lambda-2)abc \geq \left(\lambda^2-2\lambda+4\right)\cdot[ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)],$$

$\forall\, \lambda \leq 1+\sqrt{5}$.

Distingem 3 cazuri:

I. $0<\lambda<2$. Pornim de la inegalitatea cunoscută

$$2\left(a^3+b^3+c^3\right) \geq ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a), \quad a,b,c \geq 0.$$

Egalitate avem dacă şi numai dacă $a=b=c$.

Înmulţim această inegalitate cu $\lambda^2-2\lambda+4>0$ şi obţinem

$$2\left(\lambda^2-2\lambda+4\right)\left(a^3+b^3+c^3\right) \geq \left(\lambda^2-2\lambda+4\right)\cdot[ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)], \tag{1}$$

pentru $a,b,c \geq 0$.

Prin urmare, rămâne să arătăm că avem inegalitatea

$$8\left(a^3+b^3+c^3\right)+6\lambda(\lambda-2)abc \geq 2\left(\lambda^2-2\lambda+4\right)\left(a^3+b^3+c^3\right), \ a,b,c \geq 0, \tag{2}$$

care se scrie succesiv astfel

$$3\lambda(\lambda-2)abc \geq \lambda(\lambda-2)\left(a^3+b^3+c^3\right), \ a,b,c \geq 0 \Leftrightarrow a^3+b^3+c^3 \geq 3abc, \ a,b,c \geq 0,$$

ultima inegalitate fiind, de asemenea, cunoscută.

Egalitate avem dacă şi numai dacă $a=b=c$.

Din inegalităţile (1) şi (2) rezultă inegalitatea care trebuia demonstrată

$$8\left(a^3+b^3+c^3\right)+6\lambda(\lambda-2)abc \geq \left(\lambda^2-2\lambda+4\right)\cdot[ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)].$$

Egalitate avem dacă şi numai dacă $a=b=c$.

II. $\lambda=2$. În acest caz obţiem inegalitatea cunoscută

$$2\left(a^3+b^3+c^3\right) \geq ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a), \quad a,b,c \geq 0.$$

Egalitate avem dacă şi numai dacă $a=b=c$.

III. $2<\lambda \leq 1+\sqrt{5}$. Pornim de la inegalitatea lui *Schur* de gradul 3

$$a^3+b^3+c^3+3abc \geq ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a), \quad a,b,c \geq 0.$$

Egalitate avem dacă şi numai dacă $a = b = c$.

Înmulţim această inegalitate cu factorul $2\lambda(\lambda - 2) > 0$ şi obţinem inegalitatea

$$2\lambda(\lambda-2)\left(a^3+b^3+c^3\right)+6\lambda(\lambda-2)abc \geq 2\lambda(\lambda-2)\cdot[ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)], \qquad (3)$$

$a, b, c \geq 0$.

De asemenea, folosim inegalitatea cunoscută:

$$2\left(a^3+b^3+c^3\right) \geq ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a), \quad a,b,c \geq 0.$$

Egalitate avem dacă şi numai dacă $a = b = c$.

Înmulţim această inegalitate cu factorul $-\lambda^2 + 2\lambda + 4 = -(\lambda^2 - 2\lambda - 4) \geq 0$ şi obţinem

$$\begin{gathered} 2\left(-\lambda^2+2\lambda+4\right)\left(a^3+b^3+c^3\right) \geq \\ \geq \left(-\lambda^2+2\lambda+4\right)\cdot[ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)], \quad a,b,c \geq 0. \end{gathered} \qquad (4)$$

Adunând inegalităţile (3) şi (4), rezulta inegalitatea care trebuie demonstrată, anume

$$8\left(a^3+b^3+c^3\right)+6\lambda(\lambda-2)abc \geq \left(\lambda^2-2\lambda+4\right)\cdot[ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)].$$

Egalitate avem dacă şi numai dacă $a = b = c$.

Soluţia 2 (acelaşi autor). Putem presupune că $a + b + c = 1$. Într-adevăr, avem succesiv

$$\prod\left(\frac{\lambda a}{b+c}+1\right) = \prod\left(\frac{\lambda\dfrac{a}{a+b+c}}{\dfrac{b}{a+b+c}+\dfrac{c}{a+b+c}}+1\right) = \prod\left(\frac{\lambda x}{y+z}+1\right),$$

unde $x = \dfrac{a}{a+b+c}$, $y = \dfrac{b}{a+b+c}$, $z = \dfrac{c}{a+b+c}$ şi, evident, $x + y + z = 1$.

În continuare, aplicăm teorem compensării aritmetice (AC-Theorem [1]):

Teoremă. *Fie $s > 0$ şi $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ o funcţie simetrică continuă pe mulţimea compactă*

$$S = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_1 + x_2 + \ldots + x_n = s,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0\} \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Dacă

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq \min\left\{F\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{x_1+x_2}{2}, x_3, \ldots, x_n\right), F\left(0, x_1+x_2, x_3, \ldots . x_n\right)\right\},$$

$\forall\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in S$,

unde $x_1 > x_2 > 0$, atunci

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq \min_{1\leq k\leq n} F\Big(\underbrace{\frac{s}{k}, \ldots, \frac{s}{k}}_{k \text{ ori}}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-k \text{ ori}}\Big),\ \forall\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in S.$$

Observaţie. Pentru a demonstra inegalitatea din ipoteză, este suficient să arătăm că implicaţia

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) < F\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{x_1+x_2}{2}, x_3, \ldots, x_n\right),\ \forall\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in S$$

unde $x_1 > x_2 > 0 \Rightarrow$

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq F\left(0, x_1+x_2, x_3, \ldots, x_n\right),\ \forall\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in S$$

unde $x_1 > x_2 > 0$, este adevărată.

În cazul nostru luăm $x = 1$ şi $n = 3$ şi fie $F(a, b, c)$ funcţia simetrică

$$F(a,b,c) = \left(\frac{\lambda a}{b+c}+1\right)\left(\frac{\lambda b}{c+a}+1\right)\left(\frac{\lambda c}{a+b}+1\right),$$

unde a, b, c sunt numere reale pozitive, astfel încât cel puţin două sunt strict pozitive, iar λ este un număr real strict pozitiv.

Această funcţie este continuă pe mulţimea compactă

$$S = \{(a,b,c) : \ a+b+c=1, \ a \geq 0, \ b \geq 0, \ c \geq 0\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Conform teoremei compensării aritmetice, dacă

$$F(a,b,c) \geq \min\left\{F\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c\right), F(0, a+b, c)\right\}, \ \forall\, (a,b,c) \in S,$$

unde $a > b > 0$, atunci

$$F(a,b,c) \geq \min_{2\leq k\leq 3} F\Big(\underbrace{\frac{1}{k}, \ldots, \frac{1}{k}}_{k \text{ ori}}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{3-k \text{ ori}}\Big), \ \forall\, (a,b,c) \in S.$$

Prin urmare $F(a,b,c) \geq \min\left\{F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right), F\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)\right\}$ adică

$$\left(\frac{\lambda a}{b+c}+1\right)\left(\frac{\lambda b}{c+a}+1\right)\left(\frac{\lambda c}{a+b}+1\right) \geq \min\left\{(\lambda+1)^2, \left(\frac{\lambda}{2}+1\right)^3\right\}.$$

Conform observaţiei de mai sus, trebuie să demonstrăm implicaţia:

$$F(a,b,c) < F\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c\right), \ \forall\, (a,b,c) \in S, \ a > b > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(a,b,c) \geq F(0, a+b, c), \ \forall\, (a,b,c) \in S, \ a > b > 0.$$

Într-adevăr, inegalitatea $F(a,b,c) \leq F\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c\right)$ se scrie succesiv

$$\left(\frac{\lambda a}{b+c}+1\right)\left(\frac{\lambda b}{c+a}+1\right) \leq \left(\frac{\lambda\frac{a+b}{2}}{\frac{a+b}{2}+c}+1\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{[1+(\lambda-1)a]\cdot[1+(\lambda-1)b]}{(1-a)(1-b)} < \left[\frac{1+(\lambda-1)\frac{a+b}{2}}{1-\frac{a+b}{2}}\right]^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [1+(\lambda-1)a]\cdot[1+(\lambda-1)b]\cdot\left(1-\frac{a+b}{2}\right)^2 < (1-a)(1-b)\cdot\left[1+(\lambda-1)\frac{a+b}{2}\right]^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[1+(\lambda-1)(a+b)+(\lambda-1)^2ab\right]\cdot\left(1-\frac{a+b}{2}\right)^2 < [1-(a+b)+ab]\cdot\left[1+(\lambda-1)\frac{a+b}{2}\right]^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda\left[(\lambda-1)(a+b)-\lambda+2\right]\left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-ab\right] < 0 \Leftrightarrow (\lambda-1)(a+b)-\lambda+2 < 0.$$

Analog, inegalitatea $F(a,b,c) \geq F(0,a+b,c)$ se scrie succesiv

$$\left(\frac{\lambda a}{b+c}+1\right)\left(\frac{\lambda b}{c+a}+1\right) \geq \frac{\lambda(a+b)}{c}+1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{[1+(\lambda-1)a]\cdot[1+(\lambda-1)b]}{(1-a)(1-b)} \geq \frac{1+(\lambda-1)(a+b)}{1-(a+b)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [1+(\lambda-1)a]\cdot[1+(\lambda-1)b]\cdot[1-(a+b)] \geq (1-a)(1-b)\cdot[1+(\lambda-1)(a+b)] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [1+(\lambda-1)(a+b)+(\lambda-1)^2ab]\cdot[1-(a+b)] \geq [1-(a+b)+ab]\cdot[1+(\lambda-1)(a+b)] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda[-(\lambda-1)(a+b)+\lambda-2]ab \geq 0 \Leftrightarrow -(\lambda-1)(a+b)+\lambda-2 \geq 0.$$

Prin urmare, implicaţia de mai sus este demonstrată.

În final, deoarece

$$(\lambda+1)^2 \leq \left(\frac{\lambda}{2}+1\right)^3, \ \forall\, \lambda \geq 1+\sqrt{5} \ \text{ şi } \ (\lambda+1)^2 \geq \left(\frac{\lambda}{2}+1\right)^3, \ \forall\, \lambda \leq 1+\sqrt{5},$$

rezultă inegalitățile

$$\left(\frac{\lambda a}{b+c}+1\right)\left(\frac{\lambda b}{c+a}+1\right)\left(\frac{\lambda c}{a+b}+1\right)\geq(\lambda+1)^2,\ \forall\,\lambda\geq 1+\sqrt{5}$$

şi

$$\left(\frac{\lambda a}{b+c}+1\right)\left(\frac{\lambda b}{c+a}+1\right)\left(\frac{\lambda c}{a+b}+1\right)\geq\left(\frac{\lambda}{2}+1\right)^3,\ \forall\,\lambda\leq 1+\sqrt{5}.$$

Cazurile de egalitate sunt date de teorema compensării aritmetice şi sunt cele precizate în cadrul soluţiei 1.

Observaţie. Soluţia 2 conduce imediat la următoarea generalizare a problemei de mai sus (a se vedea şi [1]). Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ numere real pozitive, astfel încât cel puţin $n-1$ sunt strict pozitive şi λ un număr real strict pzitiv. Să se demonstreze că

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\lambda x_i}{\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n} x_j}+1\right)\geq\min_{2\leq k\leq n}\left(\frac{\lambda}{k-1}+1\right)^k.$$

Observaţie. În particular, pentru a, b, c numere reale strict pozitive şi $\lambda\geq 4$ un număr natural, obţinem inegalitatea din enunţ.

Bibliografie

[1] V. Cîrtoaje, *Algebraic Inequalities. Old and New Methods*, GIL Publishing House, Zalău, 2006.

Nota redacţiei. O soluţie asemănătoare cu cea iniţială a dat domnul inginer *Marius Olteanu* de la S. C. Hidroconstrucţia S.A. Bucureşti, sucursala „Olt-Superior" din Râmnicu-Vâlcea.

247. *Fie numerele reale strict pozitive a, b, c cu proprietatea că există o permutare a lor x, y, z astfel încât $z\leq y\leq x\leq 8z$ şi $8y\leq 27z$. Să se arate că*

$$\max\left\{\left|\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right|^3,\left|\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{c}\right|^3,\left|\sqrt[3]{c}-\sqrt[3]{a}\right|^3\right\}\leq\frac{a+b+c}{3}-\sqrt[3]{abc}.$$

Ovidiu Pop

Soluţia autorului. Deoarece inegalitatea este simetrică în a, b, c, presupunem că $c\leq b\leq a\leq 8c$ şi $8b\leq 27c$. Rezultă că $a\geq b\geq c$ şi cum $a-c\geq a-b$, $a-c\geq b-c$, obţinem că

$$\max\left\{\left|\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right|^3,\left|\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{c}\right|^3,\left|\sqrt[3]{c}-\sqrt[3]{a}\right|^3\right\}=\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{c}\right)^3.$$

Pe de altă parte

$$1\leq\sqrt[3]{\frac{a}{c}}\leq 2 \tag{1}$$

şi

$$1\leq\sqrt[3]{\frac{b}{c}}\leq\frac{3}{2}. \tag{2}$$

Inegalitatea din enunţ este echivalentă cu

$$\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{c}\right)^3\leq\frac{a+b+c}{3}-\sqrt[3]{abc}, \tag{3}$$

sau, echivalent cu

$$3a-9\sqrt[3]{a^2c}+9\sqrt[3]{ac^2}+3\sqrt[3]{abc}-4c-b\leq 0.$$

Împărţind cu c, notând $\sqrt[3]{\dfrac{a}{c}}=x$, $\sqrt[3]{\dfrac{b}{c}}=y$ şi ţinând seama de (1) (2), inegalitatea (3) este echivalentă cu

$$2x^3-9x^2+9x+3xy-y^3-4\leq 0,\ \forall\,x\in[1,2],\ \forall\,y\in\left[1,\frac{3}{2}\right]. \tag{4}$$

Pentru $y \in \left[1, \frac{3}{2}\right]$, considerăm funcţia $f_y : [1, 2] \to \mathbb{R}$,

$$f_y(x) = 2x^3 - 9x^2 + 9x + 3xy - y^3 - 4.$$

Avem că

$$f'_y(x) = 6x^2 - 18x + 9 + 3y,$$
$$\Delta_y = 36(3 - 2y)$$

şi cum

$$1 \le y \le \frac{3}{2},$$

rezultă că

$$0 \le 3 - 2y \le 1, \tag{5}$$

deci

$$\Delta_y \ge 0.$$

Ţinând seama de (5), rădăcinile lui f'_y, x_1, x_2 verifică

$$1 \le x_1 = \frac{3 - \sqrt{3 - 2y}}{2} \le \frac{3}{2}, \tag{6}$$

$$\frac{3}{2} \le x_2 = \frac{3 + \sqrt{3 - 2y}}{2} \le 2, \tag{7}$$

şi

$$2x_1^2 - 6x_1 + 3 + y = 0. \tag{8}$$

Avem că $f_y(1) = -y^3 + 3y - 2 = -(y-1)^2(y+2)$, deci

$$f_y(1) \le 0, \ \forall\, y \in \left[1, \frac{3}{2}\right]. \tag{9}$$

Fie funcţia $g : \left[1, \frac{3}{2}\right] \to \mathbb{R}$, $g(y) = f_y(2) = -y^3 + 6y - 6$.

Avem că

$$g'(y) = -3y^2 + 6$$

şi tabelul

$$\begin{array}{c|ccc} y & 1 & \sqrt{2} & \frac{3}{2} \\ \hline g' & + & 0 & - \\ \hline g & \nearrow & -6 + 4\sqrt{2} < 0 & \searrow \end{array},$$

de unde rezultă că

$$f_y(2) < 0, \ \ \forall\, y \in \left[1, \frac{3}{2}\right]. \tag{10}$$

Ţinând seama că

$$f_y(x) = \left(2x^2 - 6x + 3 + y\right)\left(x - \frac{3}{2}\right) - 3x + 2xy - y^3 + \frac{3}{2}y + \frac{1}{2},$$

ca şi de (8), avem

$$f_y(x_1) = (2y - 3)x_1 - y^3 + \frac{3}{2}y + \frac{1}{2} = (2y - 3)\frac{3 - \sqrt{3 - 2y}}{2} - y^3 + \frac{3}{2}y + \frac{1}{2},$$

de unde

$$f_y(x_1) = \frac{(3 - 2y)\sqrt{3 - 2y} - 2y^3 + 9y - 8}{2}. \tag{11}$$

Arătăm că

$$f_y(x_1) \le 0, \ \ \forall\, y \in \left[1, \frac{3}{2}\right].$$

Ţinând seama de (11), inegalitatea (12) este echivalentă cu

$$(3 - 2y)\sqrt{3 - 2y} \le 2y^3 - 9y + 8, \ \ \forall\, y \in \left[1, \frac{3}{2}\right]. \tag{13}$$

Fie funcţia $h : \left[1, \frac{3}{2}\right] \to \mathbb{R}$,
$$h(y) = 2y^3 - 9y + 8.$$
Avem că
$$h'(y) = 6y^2 - 9$$
şi tabelul
$$\begin{array}{c|ccccc} y & 1 & & \frac{\sqrt{6}}{2} & & \frac{3}{2} \\ \hline h' & - & & 0 & & + \\ \hline h & \searrow & & 8-3\sqrt{6}>0 & & \nearrow \end{array},$$
deci
$$h(y) > 0,$$
pentru orice $y \in \left[1, \frac{3}{2}\right]$; adică
$$2y^3 - 9y + 8 > 0,$$
pentru orice $y \in \left[1, \frac{3}{2}\right]$.

Deoarece în (13) ambii membri ai inegalităţii sunt pozitivi, ridicând la pătrat avem că $(3-2y)^3 \le \left(2y^2 - 9y + 8\right)^2$, echivalent cu $27-54y+36y^2-8y^3 \le 4y^6+81y^2+64-36y^4+32y^3-144y$, echivalent cu
$$0 \le 4y^6 - 36y^4 + 40y^3 + 45y^2 - 90y + 37,\ \forall\, y \in \left[1, \frac{3}{2}\right]. \tag{14}$$
Inegalitatea (14) este echivalentă cu
$$0 \le (y-1)^2 \left[\left(2y^2 + 2y - \frac{43}{7}\right)^2 + \frac{12}{7}(y-1)(3-2y) + \frac{216}{49}\right],\ \forall\, y \in \left[1, \frac{3}{2}\right],$$
care este o inegalitate adevărată.

Din (13)-(15), rezultă că inegalitatea (12) are loc.

Ţinând seama de definiţia funcţiei f_y, de f_y', de (6) şi (7), avem tabelul de variaţie
$$\begin{array}{c|ccccccccc} x & 1 & & x_1 & & \frac{3}{2} & & x_2 & & 2 \\ \hline f_y' & & + & 0 & & - & & 0 & + & \\ \hline f_y & f_y(1) & \nearrow & f_y(x_1) & & \searrow & & f_y(x_2) & \nearrow & f_y(2) \end{array}.$$
Ţinând seama de (9), (10) şi (12), din tabelul de mai sus rezultă că $f_y(x) \le 0$, pentru orice $x \in [1, 2]$ şi pentru orice $y \in \left[1, \frac{3}{2}\right]$, deci inegalitatea (4) are loc, adică inegalitatea din enunţ este valabilă.

Ţinând seama de (9), respectiv (12) şi (15), egalitatea are loc dacă şi numai dacă $x = y = 1$, adică $a = b = c$.

Observaţie. Această inegalitate, în condiţiile restrictive din enunţ, dă o margine inferioară a expresiei $\frac{a+b+c}{3} - \sqrt[3]{abc}$. Marginea superioară este dată de inegalitatea lui *Titu Andreescu* (vezi şi articolul *Generalizarea inegalităţii lui Titu Andreescu*, de Marian Dincă, G. M. A, 3 (2005), pp. 274-276.

Nota redacţiei. O soluţie la fel de calculatorie ca şi cea a autorului a dat domnul inginer *Marius Olteanu* de la S. C. Hidroconstrucţia S.A. Bucureşti, sucursala „Olt-Superior“ din Râmnicu-Vâlcea.

ISTORIA MATEMATICII

Despre şirul lui Fibonacci

de Neculai Stanciu

Abstract

The purpose of the article is to describe the contributions to Mathematics made by the thirteenth century Italian, *Fibonacci*. Unfortunately, not much is known about *Fibonacci*'s personal life. Representative problems solved by *Fibonacci* are set as challenges to the reader.

After a brief historical account of *Leonardo Pisano Fibonacci*, some basic results concerning the *Fibonacci* numbers are developed and proved, and entertaining examples are described. Connections are made between the *Fibonacci* numbers and the Golden Ratio, biological nature, and other combinatorics examples.

Considering both the originality and power of his methods, and the importance of his results, we are abundantly justified in ranking *Leonardo* of Pisa as the greatest genius in the field of number theory who appeared between the time of *Diophantus* and *Fermat*.

Key words: History of Mathematics, *Fibonacci*'s Rabbits, *Fibonacci* numbers and nature, Divine proportion, Golden Section in Art (Architecture, music and human body), The *Fibonacci* sequence, *Fibonacci* identities, matrix methods.

M.S.C.: 01-XX, 01AXX, 01A05, 11B39, 11B37, 11B50.

1. Istorie

1.1. Cine a fost Fibonacci?

Fibonacci (1175-1240) a fost unul dintre cei mai mari matematicieni ai evului mediu. S-a născut în Italia, în oraşul Pisa, faimos pentru turnul său înclinat, care parcă stă să cadă.

Tatăl său, *Bonacci Pisano*, a fost ofiţer vamal în oraşul Bougie din Africa de Nord, astfel că *Fibonacci* a crescut în mijlocul civilizaţiei nord-africane. A cunoscut astfel mulţi negustori arabi şi indieni (deoarece a făcut multe călătorii pe coastele Mediteranei) de unde a deprins ştiinţa lor, aritmetica, precum şi scrierea cifrelor arabe.

1.2. Cărţile lui Fibonacci

În 1202 revine în Italia unde publică un tratat de aritmetică şi algebră intitulat „Incipit Liber Abaci" (compositus a *Leonardo* filius *Bonacci Pisano*). În acest tratat introduce pentru prima dată în Europa sistemul de numeraţie arab, cifre pe care le folosim şi în zilele noastre: 0, 1, 2, 3, ..., 9.

În 1220 publică „Practica Geometriae", un compendiu de rezultate din geometrie şi trigonometrie, apoi în 1225 „Liber Quadratorum" în care studia calculul radicalilor cubici. Cărţile lui *Fibonacci* au cunoscut o largă răspândire aşa încât timp de peste două secole au fost considerate sursele cele mai competente în domeniul numerelor.

Pentru a înţelege mai bine situaţia din acele vremuri trebuie să aruncăm o privire pe matematica în Europa şi în Orient.

Matematica arabă

Imperiul arab, odată cu apariţia Islamului (sec VII), se extinde foarte repede cuprinzând Orientul Apropiat, o parte din Asia Mică şi Centrală, ajungând până la Valea Indului, nordul Africii şi Peninsula Iberică. Se ridică importante centre culturale ca: Bagdad, Samarkand, Buhara, Horezm, Damasc, Cordoba, Granada, Sevilla, Toledo, după ce în prealabil fuseseră distruse Ispahanul, Persepolis şi Alexandria.

Matematica arabă este matematica creată sub dominaţia arabă, nu neaparat aparţinând arabilor, deoarece puţini dintre matematicienii arabi erau de origine arabă, dar au asimilat foarte repede cultura Orientului precum şi cea elenă pe care le transmit în diverse părţi ale imperiului. Primul mare matematician arab a fost *Al-Horezmi* (780 - 850). Din opera sa se detaşează

„Algebra“ structurată pe 4 capitole (Soluţiile ecuaţiilor, Calculul dobânzilor, Geometria, Algebra testamentară). *Al-Horezmi* a fost primul matematician care a stabilit reguli pentru adunare, scădere, multiplicare şi divizare cu noile numere arabe. De la el provine cuvântul algoritm (încercaţi să spuneţi numele *Al-Horezmi* repede de câteva ori!). Într-un alt tratat, „Stiinţa transpunerii şi a reducerii“, specifică procesul manipulării ecuaţiilor algebrice, „al-jabr“, ajuns la noi ca algebră.

Abu Kamil (900), născut în Egipt, este continuator a lui *Al-Horezmi*. În „Cartea rarităţilor din aritmetică“ se ocupă cu rezolvarea în numere întregi a sistemelor liniare nedeterminate.

Abu Wafa (940 - 997) s-a ocupat cu geometria practică. În lucrarea sa „Cartea perfectă“ expune bazele trigonometriei, inclusiv teorema sinusurilor. De asemenea rezolvă probleme de trigonometrie sferică, utilizând cu predilecţie funcţia cotangentă.

Al-Hazem (1000) prin „Cartea opticii“ este un precursor al acestei ştiinţe. Tot el formulează axioma lui *Pasch* şi încearcă demonstrarea postulatului V al lui *Euclid*.

Omar Al-Khayyam (1048 - 1123), este primul matematician care expune o teorie generală a ecuaţiilor de gradul III. Recent a fost descoperit un memoriu al său asupra operei lui *Euclid*. *Omar Al-Khayyam*, conducătorul Observatorului astronomic din Ispahan, s-a ocupat şi cu *patrulaterul Saccheri* (care, de drept ar trebui numit *patrulaterul lui Omar*), apoi a dat prima formulare a *axiomei lui Arhimede*. Era vestit şi ca poet.

Al-Biruni (973 - 1048), persan de origine, este cel care în 1030 introduce cercul trigonometric. Tot el calculează lungimea meridianului terestru la 41.550 km.

Nassir ed Din al Tusi (1201 - 1274), conducătorul Observatorului astronomic din Maraga, s-a ocupat cu teoria paralelelor. În „Tratatul despre patrulaterul complet“ a făcut o expunere integrală a rezolvării triunghiurilor (plane şi sferice).

Al-Kashi (1400), iranian de origine, în „Cheia aritmeticii“ se ocupă cu formula binomului şi cu extragerea de rădăcini. S-a ocupat intens şi de calcule aproximative, iar în „Tratatul despre circumferinţă“ din 1424, dă valoarea numărului π cu 16 zecimale exacte.

De aici, matematica şi în general cultura arabă decad.

Matematica evului mediu

Cruciadele (campanii pentru recucerirea locurilor sfinte), prilejuiesc stabilirea de legături cu cultura arabă musulmană (mai ales în Spania şi Sicilia) precum şi cu Bizanţul.

După ce Spania este recucerită de mauri, Toledo devine centru cultural de prestigiu. În acest moment încep traducerile din arabă. Printre primii traducători este englezul *Adelard de Bath* (1100) care, deghizat ca student mahomedan la Cordoba, traduce din limba arabă „Elementele“ lui *Euclid* şi „Algebra“ lui *Al-Horezmi*, iar din limba greacă, opera lui *Ptolemeu*. Din aceeaşi perioadă se remarcă şi alţi traducători ca: *Ioannes din Sevilla* şi *Gerardo din Cremona* (1114 - 1187) care au tradus circa 80 de lucrări clasice din limba arabă. Ambii au lucrat la Toledo.

Secolele XII - XV reprezintă perioada de asimilare a matematicii antice şi a celei orientale.

Leonardo da Pisa este pe drept considerat primul mare matematician original al Europei. În numeroasele sale călătorii (Egipt, Siria, Grecia, Sicilia) ia contact cu cultura elenă şi cea arabă.

Liber Abaci – o carte remarcabilă

Povestea numerelor apare în Italia în 1202, o dată cu apariţia cărţii „Liber Abaci“, scrisă de *Leonardo Pisano*, pe atunci în vârstă de 27 de ani. Cartea are 15 capitole şi sunt scrise în întregime de mână, tiparul apărând 300 de ani mai târziu. *Leonardo* a fost inspirat să scrie cartea după o vizită la Burgia, un oraş prosper algerian, unde tatăl său era consul de Pisa. În acest timp, *Fibonacci* a învăţat secretele sistemului de numere indo-arab, pe care arabii l-au introdus în Vest în timpul cruciadelor.

Cartea a atras numeroşi adepţi în rândul matematicienilor din Italia, precum şi din restul Europei. Liber Abaci a dezvăluit oamenilor o cu totul altă lume, unde numerele au înlocuit literele. *Fibonacci* începe cartea cu noţiuni despre identificarea numerelor, de la unităţi la cifra zecilor, a sutelor, a miilor etc.

În ultimile capitole găsim calcule cu numere întregi şi fracţii, regulile proporţiilor, extrageri de rădăcini pătrate şi de ordin superior, apoi se prezintă soluţiile ecuaţiilor liniare şi pătratice. Liber Abaci era plină cu exemple practice: calcule de contabilitate financiară, calculul profitului, schimbul de bani, conversia greutăţilor, calculul împrumutului cu dobândă (interzis în acel timp în diverse locuri ale lumii).

Deşi era cunoscut în anul 1000 şi deşi „Liber Abaci“ a explicat avantajele, sistemul de numărare indo-arab nu a prins la scară mare până aproape în 1500 e.n. Motivele au fost, în mare parte, două. Primul ţine de inerţia umană şi rezistenţa la schimbare a omului, pentru că învăţarea unui sistem radical nou cere timp şi de faptul că biserica catolică din acea perioadă considera cifrele arabe de origine păgână. Al doilea motiv este de natură practică, deoarece era mult mai uşor să se comită fraude. Era tentantă schimbarea lui 0 în 6 sau 9, iar 1 putea fi uşor înlocuit cu 4, 6, 7, sau 9 (de atunci europenii scriu 7 cu codiţă!).

Deşi noile numere au apărut în Italia, Florenţa a emis un edict în 1229 prin care interzicea bancherilor folosirea simbolurilor „infidele“. Ca rezultat, mulţi dintre cei care voiau să înveţe noul sistem se deghizau în musulmani.

Originea sistemului de numere

Putem aprecia succesul lui *Fibonacci* cu „Liber Abaci“ doar dacă privim cum a evoluat societatea, din punctul de vedere al numerelor, până la el. Măsurarea şi numărarea au apărut cu câteva zeci de mii de ani înaintea lui Hristos. Oamenii au înfiinţat primele aşezări pe malurile Tigrului şi Eufratului, Nilului, Gangelui, Indului şi Amazonului. Fluviile erau folosite pentru comerţ şi transport, iar aventurierii au descoperit mările şi oceanele unde se vărsau apele. Călătoriile pe distanţe lungi cereau măsurarea timpului şi calcule precise. Preoţii erau de obicei astronomi, iar din astronomie a venit matematica.

În 450 î.e.n., grecii au inventat un sistem numeric alfabetic, care folosea cele 24 de litere ale alfabetului grecesc şi alte trei litere, care mai târziu au dispărut. Fiecare număr de la 1 la 9 avea propria literă, la fel şi multiplii de 10. Alfa, însemna 1, iar „ro“ reprezenta 100. Astfel, 112 se scria „ro-deca-beta“. Acest sistem se putea folosi cu greutate pentru calcule. Abacul era cel mai vechi aparat de numărat din istorie.

Un occidental, matematician din Alexandria, *Diofantus*, prin 250 d.Ch. a sugerat un sistem de numere comparative cu sistemul de litere. Remarcabilele sale invenţii au fost ignorate vreme de 1500 de ani. Până la urmă, lucrarea sa a fost recunoscută cum se cuvine şi a jucat un rol important în algebra secolului al XVII-lea. Ecuaţiile algebrice, de forma $ax + by = c$, se numesc *ecuaţii diofantice*.

Piesa centrală a sistemului indo-arab a fost inventarea lui zero, *sunya* la induşi, *cifr* în arabă, *tsfira* în ruseşte – ceea ce înseamnă „număr“. Termenul provine de la *cipher*, ceea ce înseamnă „gol“ şi se referă la coloana goală de la abac.

1.3. Şirul lui Fibonacci. Numele Fibonacci

Fibonacci a rămas în memoria noastră prin şirul: 0, 1, 1, 2, 3, ...introdus în anul 1202, atunci matematicianul fiind sub numele de *Leonardo Pisano* (*Leonard din Pisa*).

Mai târziu, matematicianul însuşi şi-a spus *Leonardus Filius Bonacii Pisanus* (*Leonard* fiul lui *Bonaccio Pisanul*). În secolul al XIV-lea şirul prezentat mai sus a fost denumit şirul lui *Fibonacci* prin contracţia cuvintelor *filius Bonacii*. Acest şir apare pentru prima dată în cartea menţionată mai sus „Liber Abaci“ („Cartea despre abac“), fiind utilizat în rezolvarea unei probleme de matematică.

1.4. Iscusinţa lui Fibonacci. Problema iepurilor. Originea şirului Fibonacci

Potrivit obiceiului din acea epocă, *Fibonacci* a participat la concursuri matematice (adevărate dispute publice) pentru cea mai bună şi mai rapidă soluţie a unor probleme grele (ceva în genul Olimpiadelor Naţionale). Iscusinţa de care dădea dovadă în rezolvarea problemelor cu numere uimise pe toată lumea, astfel că reputaţia lui *Leonardo* a ajuns până la împăratul Germaniei, *Frederik al II-lea*. La un concurs prezidat de acest împărat una din probleme date spre rezolvare a fost: „să se găsească un pătrat perfect, care să rămână pătrat perfect dacă este mărit sau micşorat cu 5“. După un timp scurt de gândire *Fibonacci* a găsit numărul $\dfrac{1681}{144} = \left(\dfrac{41}{12}\right)^2$. Într-adevăr: $\dfrac{1681}{144} - 5 = \dfrac{961}{144} = \left(\dfrac{31}{12}\right)^2$ şi $\dfrac{1681}{144} + 5 = \dfrac{2401}{144} = \left(\dfrac{49}{12}\right)^2$. Nu se ştie raţionamentul lui *Fibonacci*, dar toate încercările, chiar şi cele mai ingenioase, de a rezolva această problemă cu ajutorul algebrei, duc în cel mai bun caz la o ecuaţie cu 2 necunoscute.

La un alt concurs prezidat de împărat problema propusă concurenţilor suna astfel: „Plecând de la o singură pereche de iepuri şi ştiind că fiecare pereche de iepuri produce în fiecare lună o nouă pereche de iepuri, care devine productivă la vârsta de o lună, calculaţi câte perechi de iepuri vor fi după n luni (se consideră că iepurii nu mor în decursul respectivei perioade de n luni)“.

Soluţie. Din datele problemei rezultă că numărul perechilor de iepuri din fiecare lună este un termen al şirului lui *Fibonacci*. Într-adevăr, să presupunem că la 1 ianuarie exista o singură pereche fertilă de iepuri. Notăm cu 1 perechea respectivă. Ea corespunde numărului f_2 din şirul lui Fibonacci:

$$f_2 = f_0 + f_1 = 0 + 1 = 1.$$

La 1 februarie, mai există o pereche pe care o notăm 1.1. Deci în acest moment sunt două perechi, ceea ce corespunde termenului:

$$f_3 = f_1 + f_2 = 1 + 1 = 2.$$

La 1 martie sunt 3 perechi, două care existau în februarie şi una nouă care provine de la perechea numărul 1 (se ţine seama că o pereche devine fertilă după două luni). Notăm cu 1.2 această nouă pereche. Numărul perechilor din această lună corespunde termenului:

$$f_4 = f_2 + f_3 = 1 + 2 = 3.$$

La 1 aprilie există 5 perechi şi anume: trei perechi existente în luna martie, o pereche nouă care provine de la perechea 1 şi o pereche nouă care provine de la perechea 1.1 care la 1 martie a devenit fertilă (pereche pe care o notăm cu 1.1.1). Numărul perechilor din această lună corespunde termenului:

$$f_5 = f_3 + f_4 = 2 + 3 = 5.$$

Termenii din această relaţie se interpretează astfel:

f_4 = numărul perechilor existente în luna precedentă;

f_3 = numărul perechilor noi(provin de la perechile existente în luna antepredecentă).

Procedând în continuare în acest fel, vom deduce că la data de 1 decembrie numărul perechilor este dat termenul:

$$f_{13} = f_{11} + f_{12} = 89 + 144 = 233,$$

iar la 1 ianuarie anul următor există:

$$f_{14} = f_{12} + f_{13} = 144 + 233 = 377$$

perechi de iepuri.

Concluzia este următoarea :

Dacă notăm cu f_n numărul de perechi de iepuri după n luni, numărul de perechi de iepuri după $n + 1$ luni, notat cu f_{n+1}, va fi f_n (iepurii nu mor niciodată !), la care se adaugă iepurii nou-născuţi. Dar iepuraşii se nasc doar din perechi de iepuri care au cel puţin o lună, deci vor fi f_{n-1} perechi de iepuri nou-născuţi.

Obţinem astfel o relaţie de recurenţă:

$$f_0 = 0,\ f_1 = 1,\ f_{n+1} = f_n + f_{n-1},$$

care generează termenii şirului lui Fibonacci.

Observaţie. Acest şir exprimă într-un mod naiv creşterea populaţiei de iepuri. Se presupune că iepurii au câte doi pui o dată la fiecare lună după ce împlinesc vârsta de două luni. De asemenea, puii nu mor niciodată şi sunt unul de sex masculin şi unul de sex feminin.

2. Fibonacci, numărul de aur, natura şi arta.

2.1. Fibonacci şi „numărul de aur“

Raportul de aur este un număr iraţional(1,618033...), putând fi definit în diferite moduri, dar cel mai important concept matematic asociat cu regula de aur este şirul lui *Fibonacci*. Împărţind orice număr la predecesorul său, se obţine aproximativ numărul de aur. Primii care l-au folosit au fost egiptenii, majoritatea piramidelor fiind construite ţinând cont de numărul de aur. Grecii au fost însă cei care l-au denumit astfel, folosindu-l atât în arhitectură cât şi pictură şi sculptură. De altfel numărul de aur se notează cu litera grecească „fi“(φ), de la sculptorul grec *Phidias*. El a construit Parthenonul pornind de la acest raport.

Să începem cu o problemă estetică. Să considerăm un segment de dreaptă. Care este cea mai „plăcută“ împărţire a unui segment în două părţi? Grecii antici au găsit un răspuns pe care ei îl considerau corect (teoreticienii îl numesc „simetrie dinamică“). Dacă părţii stângi a segmentului îi atribuim lungimea $u = 1$, atunci partea dreaptă va avea o lungime $v = 0,618\ldots$ Despre un segment partiţionat astfel spunem că este împărţit în secţiunea, sau proporţia sau diviziunea de aur (divină). Ideea este că lungimea u reprezintă aceeaşi parte din tot segmentul $(u+v)$ cât reprezintă lungimea v din partea u. Cu alte cuvinte:

$$\frac{u+v}{u} = \frac{u}{v}.$$

Dacă notăm $\varphi = \dfrac{u}{v}$, observăm că:

$$1 + \frac{1}{\varphi} = 1 + \frac{u}{v} = \frac{u+v}{u} = \frac{u}{v} = \varphi$$

şi este rădăcina pozitivă a ecuaţiei $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$, adică

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,6180339887\ldots$$

Dacă presupunem $u = 1$, atunci:

$$v = \frac{u}{\varphi} = \frac{1}{\varphi} = \varphi - 1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = 0,6180339887\ldots$$

Afirmăm acum că φ este strâns legat de şirul lui *Fibonacci*. Aceasta este o idee remarcabilă a matematicii. Mai observăm că :

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi} = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\varphi}} = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\varphi}}} = \ldots = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}}$$

este o fracţie infinită.

Dacă privim fracţiile parţiale

$$1 = \frac{1}{1}, \quad 1 + \frac{1}{1} = \frac{2}{1}, \quad 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}} = \frac{3}{2}, \quad 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}} = \frac{5}{3},$$

$$1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}} = \frac{8}{5}, \quad 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}}} = \frac{13}{8}$$

obsevăm că toate rezultatele sunt rapoarte de numere *Fibonacci*, fapt ce sugerează teorema care spune că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \varphi.$$

În cuvinte putem spune că, pe măsură ce n se apropie de infinit, raportul termenilor al $n+1$- lea şi al n- lea din şirul lui *Fibonacci* se apropie de φ.

La fel de simplu cum φ este o fracţie infinită, tot aşa poate fi şi un radical infinit:

$$\varphi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots.}}}}}$$

Altă aplicaţie a numărului φ apare la pentagonul regulat deoarece

$$2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \varphi \quad \text{şi} \quad 2\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{3-\varphi}.$$

De asemenea există o legătură între dreptunghiurile de aur şi şirul lui *Fibonacci* deoarece lungimea şi lăţimea celui de-al n- lea dreptunghi pot fi scrise ca expresii liniare, unde coeficienţii sunt întotdeauna numere *Fibonacci*. Aceste dreptunghiuri pot fi înscrise într-o spirală logaritmică. Spiralele logaritmice se întâlnesc destul de des în natură (carcasa unui melc, colţii unui elefant sau conurile de pin). Asemenea spirale sunt echiunghiulare, în sensul că orice dreaptă ce trece prin punctul $(x_0, y_0) = \left(\frac{1+3\varphi}{5}, \frac{3-\varphi}{5}\right)$ taie spirala sub un unghi constant.

2.2. Fibonacci şi plantele

Plantele nu au cum să cunoască numerele lui *Fibonacci*, dar se dezvoltă în cel mai eficient mod.

a. multe plante au aranjamentul frunzelor dispus într-o secvenţă *Fibonacci* în jurul tulpinei;

b. anumite conuri de pin respectă o dispunere dată de numerele lui *Fibonacci*;
c. floarea soarelui are seminţele dispuse după o secvenţă *Fibonacci*;

d. inelele de pe trunchiurile palmierilor respectă numerele lui *Fibonacci*;
e. numărul petalelor florilor este, de cele mai multe ori, un număr al secvenţei *Fibonacci*:
e.1. cala are 1 petală;
e.2. euphorbia are 2 petale;
e.3. irisul şi crinul au 3 petale;
e.4. viorelele, lalelele, trandafirul sălbatic şi majoritatea florilor au 5 petale;
e.5. margaretele pot avea 21 de petale sau 34 de petale şi exemplele sunt nenumărate;
e.6. florile cu un număr de petale care nu sunt în secvenţa *Fibonacci* sunt rare şi considerate speciale.

Concluzia este realizarea unui optim, a unei eficienţe maxime. Dacă se urmează secvenţa lui *Fibonacci*, frunzele unor plante pot fi dispuse astfel încât să ocupe un cât mai mic spaţiu şi să obţină cât mai mult soare.

Ideea dispunerii frunzelor în acest sens pleacă de la considerarea unghiului de aur de 222,5 grade; unghi care împărţit la întregul 360 de grade va da ca rezultat numărul iraţional 0,61803398..., cunoscut ca raţia şirului lui *Fibonacci*.

2.3. Cochilia melcului, furnica şi Fibonacci

Designul cochiliei melcului urmează o spirală foarte reuşită, o spirală greu de realizat cu pixul. Studiată în amănunt s-a ajuns la concluzia că această spirală urmăreşte dimensiunile date de secvenţa lui Fibonacci:

- pe axa pozitivă: 1, 2, 5, 13, ş.a.m.d
- pe axa negativă: 0, 1, 3, 8, ş.a.m.d.

Se observă că aceste 2 subşiruri combinate dau numerele lui *Fibonacci*.

Şi în acest caz raţiunea şi motivaţia pentru această dispunere este simplă: în acest fel cochilia îi crează melcului, în interior un maxim de spaţiu şi de siguranţă.

Furnica are corpul împărţit în trei segmente, după diviziunea de aur.

2.4. Fibonacci şi corpul uman

Faţa umană este caracterizată, din punct de vedere estetic prin câteva dimensiuni principale: distanţa între ochi, dintre gură şi ochi şi distanţa dintre nas şi ochi, dimensiunea gurii. În ştiinţa esteticii se apreciază că faţa este cu atât considerată mai plăcută ochiului cu cât aceste dimensiuni respectă secvenţa lui *Fibonacci* mai bine.

De exemplu raportul dintre distanţa de la linia surâsului (unde se unesc buzele) până la vârful nasului şi de la vârful nasului până la baza sa este aproximativ raportul de aur. Mâna umană are 5 degete (număr din şirul *Fibonacci*), fiecare deget având 3 falange separate prin 2 încheieturi (numere din şirul *Fibonacci*). Dimensiunile falangelor sunt: 2 cm, 3 cm, 5 cm. În continuarea lor este un os al palmei care are 8 cm.

2.5. Fibonacci, numărul de aur şi arta

Dacă privim lucrările unor mari artişti, fie ei pictori, arhitecţi, sculptori sau fotografi, se observă că multe dintre ele au la bază regula de aur. Conform acesteia, „pentru ca un întreg împărţit în părţi inegale să pară frumos, trebuie să existe între partea mică şi cea mare acelaşi raport ca între partea mare şi întreg“ (*Marcus Pollio Vitruvius*, arhitect roman).

Rudolf Arnheim (psiholog, s-a ocupat de psihologia artei) dă o explicaţie acestui lucru astfel: „Acest raport este considerat ca deosebit de satisfăcător datorită modului în care îmbină unitatea cu varietatea dinamică. Întregul şi părţile sunt perfect proporţionate, astfel că întregul predomină fără să fie ameninţat de o scindare, iar părţile îşi păstrează în acelaşi timp o anumită autonomie.“ (în „Arta şi percepţia vizuală“).

În pictură a fost folosit mai ales în Renaştere, probabil cea mai discutată utilizare a acestuia fiind în tabloul lui *Leonardo da Vinci*, „Mona Lisa“. Capul, ca şi restul corpului e compus utilizând raportul divin, cum îi spunea *da Vinci*. În prima jumătate a secolului trecut pictorul *Piet Mondrian* utilizează în picturile sale „dreptunghiul de aur“, având raportul laturilor aproximativ 1,618.... De fapt, lucrările sale sunt alcătuite numai din asemenea dreptunghiuri. Acest dreptunghi este considerat cea mai armonioasă formă geometrică. Cu toate acestea, rareori este folosit pentru cadraje. Dacă se împarte fiecare latură a cadrului fotografic în 8 părţi egale (număr din şirul *Fibonacci*) şi se unesc punctele de pe laturile opuse corespunzătoare diviziunilor 3 şi 5 (numere din şirul *Fibonacci*) se obţin aşa numitele linii forte ale cadrului. Punctele aflate la intersecţia liniilor se numesc puncte forte. Practic se pot împărţi laturile în trei părţi egale, rezultatul este aproximativ acelaşi. Se presupune că subiectul amplasat pe aceste linii sau în aceste puncte determină o împărţire armonioasă a imaginii astfel încât ea nu este nici simetrică, nici plictisitoare, nici prea dezechilibrată. De exemplu, două fotografii de *Robert Doisneau*, „L'accordéoniste“, 1951 şi „The cellist“, 1957 şi fotografia „Poplar Trees“ a lui *Minor White* în care toate liniile converg spre un punct forte. *Ansel Adams* se împotrivea regulilor, canoanelor. El spunea „aşa zisele reguli de fotocompoziţie sunt invalide, irelevante şi imateriale; nu există reguli de compoziţie în fotografie, există doar fotografii bune. Cei mai mulţi fotografi încalcă regulile fotocompoziţiei“. Cu toate acestea şi în imaginile lui se observă diviziunea de aur (vezi fotografia „Aspens“, 1958). Aceasta înseamnă că, deşi nu era de acord cu regulile, le cunoştea foarte bine. Dacă fotografia are valoare cu subiectul în centru, atunci încălcaţi regula diviziunii de aur! Subiectul trebuie să fie în armonie cu celelalte elemente din cadru. Dacă astfel se verifică şi diviziunea de aur, este perfect! Toate acestea arată importanţa acestui număr, astfel că toţi marii fotografi au ţinut şi ţin cont de el în conceperea unei fotografii.

Până şi în muzică apare acest raport: se presupune că *Bach* sau *Beethoven* au ţinut cont de el în compoziţiile lor.

Atunci când scrieţi, duceţi instinctiv linia din mijloc a literii E (la fel şi cu A, F, B, R, ...) aproximativ la $\frac{2}{3}$ de bază (aproximativ raportul de aur).

Concluzie. Numerele lui *Fibonacci* sunt considerate a fi, de fapt, sistemul de numărare al naturii, un mod de măsurare al Divinităţii, o legătură între matematică şi artă.

3. Unele rezultate referitoare la şirul lui Fibonacci

Consultând bibliografia enumerată am selectat următoarele rezultate:

Numerele lui *Fibonacci* f_n sunt date de următoarea recurenţă:

$$f_0 = 0, \quad f_1 = 1, \quad f_{n+1} = f_{n-1} + f_n, \quad n \geq 1.$$

Teorema 1. *Dacă* $x^2 = x + 1$, *atunci avem*:

$$x^n = f_n x + f_{n-1}, \; \forall \, n \geqslant 2.$$

Demonstraţie. Vom demonstra prin inducţie după n. Pentru $n = 2$ relaţia este trivială. Presupunem că pentru orice $n > 2$ avem $x^{n-1} = f_{n-1}x + f_{n-2}$. Atunci

$$x^n = x^{n-1} \cdot x = (f_{n-1}x + +f_{n-2})x = f_{n-1}(x+1) + f_{n-2}x = (f_{n-1} + f_{n-2})x + f_{n-1} = f_n x + f_{n-1}.$$

Teorema 2 (Formula lui Binet). *Termenul al n - lea din şirul lui Fibonacci este dat de*:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right), \; n \geqslant 0.$$

Demonstraţie. Rădăcinile ecuaţiei $x^2 = x + 1$ sunt $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ şi $1 - \varphi = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. Din Teorema 1, avem $\varphi^n = \varphi f_n + f_{n-1}$ şi $(1-\varphi)^n = (1-\varphi)f_n + f_{n-1}$.

În continuare $\varphi^n - (1-\varphi)^n = \sqrt{5}f_n$, de unde rezultă formula lui *Binet*.

Teorema 3. $f_1 + f_2 + ... + f_n = f_{n+2} - 1$.

Demonstraţie. Avem relaţiile:

$$f_1 = f_3 - f_2, f_2 = f_4 - f_3, f_3 = f_5 - f_4, ..., f_n = f_{n+2} - f_{n+1},$$

care prin adunare dau

$$f_1 + f_2 + f_3 + ...f_n = f_{n+2} - f_2 = f_{n+2} - 1.$$

Teorema 4. $f_1 + f_3 + f_5 + ... + f_{2n-1} = f_{2n}$.

Demonstraţie. Observăm că:

$$f_1 = f_2 - f_0, f_3 = f_4 - f_2, f_5 = f_6 - f_4, ..., f_{2n-1} = f_{2n} - f_{2n-2}.$$

Adunăm relaţiile şi obţinem identitatea dorită.

Teorema 5. $f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + ... + f_n^2 = f_n f_{n+1}$.

Demonstraţie. Avem

$$f_{n-1}f_n = (f_{n+1} - f_n)(f_n + f_{n-1}) = f_{n+1}f_n - f_n^2 + f_{n+1}f_{n-1} - f_n f_{n-1}.$$

Atunci, obţinem relaţiile $f_{n+1}f_n - f_n f_{n-1} = f_n^2$, care prin adunare pentru $n = 1, 2, 3, \ldots$, dau relaţia finală.

Teorema 6 (Identitatea lui Cassini). $f_{n-1}f_{n+1} - f_n^2 = (-1)^n, n \geqslant 1$.

Demonstraţie. Observăm că

$$f_{n-1}f_n - f_n^2 = (f_n - f_{n-2})(f_n + f_{n-1}) - f_n^2 =$$
$$= -f_{n-2}f_n - f_{n-1}(f_{n-2} - f_n) = -(f_{n-2}f_n - f_{n-1}^2).$$

Dacă notăm $u_n = f_{n-1}f_{n+1} - f_n^2$, obţinem $u_n = -u_{n-1}$ şi mai departe $u_n = (-1)^{n-1}u_1$.

Din cele de mai sus avem $f_{n-1}f_{n+1} - f_n^2 = (-1)^{n-1}(f_0 f_2 - f_1^2) = (-1)^n$.

Teorema 7 (Cesàro). $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k f_k = f_{3n}$.

Demonstraţie. Utilizăm formula lui *Binet*,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k f_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k \frac{\varphi^k - (1-\varphi)^k}{\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sum_{k}^{n} \binom{n}{k} 2^k \varphi^k - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k (1-\varphi)^k\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left((1+2\varphi)^n - (1+2(1-\varphi)^n\right).$$

Cum $\varphi^2 = \varphi + 1$, obţinem $1 + 2\varphi = \varphi^3$ şi similar $1 + 2(1-\varphi) = (1-\varphi)^3$. Atunci, rezultă

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k f_k = \frac{1}{\sqrt{5}}\left((\varphi)^{3n} + (1-\varphi)^{3n}\right) = \varphi_{3n}.$$

Teorema 8 (Vorobyov). *Dacă* $s \geqslant 1$, $t \geqslant 0$ *sunt întregi atunci*:

$$f_{s+t} = f_{s-1}f_t + f_s f_{t+1}.$$

Demonstraţie. Fixăm pe t şi demonstrăm prin inducţie după s. Pentru $s = 1$ se obţine $f_{t+1} = f_0 f_t + f_1 f_{t+1}$, care este adevărată (trivial). Presupunem că $s > 1$ şi că $f_{s-k+t} = f_{s-k-1}f_t + f_{s-k}f_{t+1}$ pentru orice k care satisfac $1 \leqslant k \leqslant s-1$. Avem:

$f_{s+t} = f_{s+t-1} + f_{s+t-2}$ (din recurenţa *Fibonacci*)
$= f_{s-1+t} + f_{s-2+t}$ (trivial)
$= f_{s-2}f_t + f_{s-1}f_{t+1} + f_{s-3}f_t + f_{s-2}f_{t+1}$ (din presupunerea făcută)
$= f_t(f_{s-2} + f_{s-3}) + f_{t+1}(f_{s-1} + f_{s-2})$ (prin rearanjarea termenilor)

$= f_t f_{s-1} + f_{t+1} f_s$ (din recurenţa *Fibonacci*).

Observaţia 1. *J.R. Silvester* indică o metodă elegantă care furnizează identităţi pentru termenii şirului (f_n). Mai precis, se consideră matricea

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

şi se constată că avem

$$A^n = \begin{pmatrix} f_{n-1} & f_n \\ f_n & f_{n+1} \end{pmatrix}, \ n = 1, 2, \dots .$$

Plecând de la această observaţie şi utilizând egalităţile $A^{n+m} = A^n \cdot A^m$, $n, m = 1, 2, \dots$ şi $\det(A^n) = [\det(A)]^n$, rezultă relaţia din teorema 6 şi de asemenea relaţia din teorema 8.

Posibilităţile de a obţine identităţi, folosind ideea de mai sus sunt multiple. Astfel, observăm că $A^n = f_n A + f_{n-1} I$ (cu I am notat matricea unitate), iar pentru $n = 2$, obţinem $A^2 = A + I$. De asemenea, avem $A^{n+2} = A^{n+1} + A^n$. Enunţate fiind aceste proprietăţi ale matricei A, se observă că puterile acesteia verifică recurenţe de tip *Fibonacci*. Deoarece $A \cdot I = I \cdot A = A$, putem aplica formula binomului lui *Newton* pentru A şi I, apoi identificând relaţiile obţinute pe componente se obţin diferite identităţi.

Prezentăm mai jos, fără demonstraţie, câteva identităţi obţinute prin metoda expusă mai sus:

(1) $f_{2n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f_k$; (2) $f_{2n+l} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f_{k+l}$; (3) $f_l \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k f_{2n-k+l}$;

(4) $f_{l+n} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k f_{2n-2k+l}$; (5) $f_{3n+l} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k f_{k+l}$

(teorema lui Cesàro generalizată);

(6) $2^n f_{n+l} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k f_{3n-3k+l}$; (7) $f_l = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k f_{3n-2k+l}$;

(8) $f_{nm} = \sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k} f_n^{m-k} f_{n-1}^k f_{m-k}$.

Pentru studenţi, propun demonstrarea următoarelor identităţi:

(9) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{f_{n-1} f_{n+1}} = 1$; (10) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{f_{n+1} f_{n+2}} = 1$; (11) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{f_{2^n}} = 4 - \varphi$;

(12) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{f_{2n+1}} = \frac{\pi}{4}$; (13) $\lim_{n \to \infty} \frac{f_n}{\varphi^n} = \frac{1}{\sqrt{5}}$; (14) $\lim_{n \to \infty} \frac{f_{n+r}}{f_n} = \varphi^r$.

Observaţia 2. Unii autori au obţinut identităţi cu termenii şirului lui *Fibonacci* cu ajutorul determinanţilor. Astfel, dacă considerăm şirul lui *Fibonacci*: 1, 2, 3, 5, ...se observă că

$$f_n = D_{n-1} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots\dots\dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots\dots\dots & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \quad \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\dots\dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots\dots\dots & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

este deci dat de un determinant de ordinul $n - 1$.

Dacă considerăm determinantul de ordinul n,

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots\dots\dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots\dots\dots & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \quad \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\dots\dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots\dots\dots & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

pe care îl dezvoltăm după elementele primei linii, atunci

$$D_n = 2D_{n-1} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots\dots\dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots\dots\dots & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \quad \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\dots\dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots\dots\dots & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Dacă dezvoltăm şi ultimul termen obţinem

$$D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots\dots\dots & & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots\dots\dots & & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots\dots\dots & & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Procedăm ca mai sus şi deducem :

$$D_{n-1} = 2D_{n-2} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots\dots\dots & & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots\dots\dots & & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots\dots\dots & & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Dacă adunăm membru cu membru ultimile două egalităţi obţinem

$$D_n + D_{n-1} = 2D_{n-1} - D_{n-2} + 2D_{n-2} \Leftrightarrow D_n = D_{n-1} + D_{n-2},$$

relaţie de recurenţă analoagă cu cea din şirul lui *Fibonacci* $f_{n+1} = f_{n-1} + f_n$.

Teorema 9. $f_n \,|f_{nk}$ *, pentru orice* $n, k \in \mathbb{N}^*$.

Demonstraţie. Procedăm prin inducţie după $k \in \mathbb{N}^*$, presupunând $n \in \mathbb{N}^*$, oarecare.

Pentru $k = 1$ rezultă $f_n = f_{n\cdot 1}$ şi deci $f_n \mid f_n$ (adevărată). Presupunem $f_n \mid f_{nk}$ şi demonstrăm că $f_n \mid f_{n(k+1)}$.

Întradevăr, ţinând seama de teorema 8. avem:

$$f_{n(k+1)} = f_{nk+n} = f_{nk+1}f_n + f_{nk}f_{n-1},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ şi, deoarece $f_n \,|f_n$ şi $f_n \,|f_{nk}$, rezultă $f_n \,\big|f_{n(k+1)}$.

Teorema 10. $f_{kn-1} \equiv f_{n-1}^k (\mathrm{mod} f_n^2)$, *oricare ar fi* $k, n \in \mathbb{N}^*$.

Demonstraţie. Se arată tot prin inducţie după $k \in \mathbb{N}^*$. Pentru $k = 1$ relaţia este evidentă. Pentru $k = 2$ ţinem seama de teoremele precedente şi avem

$$f_{2n-1} = f_n f_n + f_{n-1}f_{n-1} \equiv f_{n-1}^2 (\mathrm{mod} f_n^2), \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Fie $f_{kn-1} \equiv f_{n-1}^k (\mathrm{mod} f_n^2)$. Avem deci că

$$f_{(k+1)n-1} = f_{kn-1+n} = f_{kn}f_n + f_{kn-1}f_{n-1} \equiv$$

$$\equiv f_{kn-1}f_{n-1} \equiv f_{n-1}^k f_{n-1} \equiv f_{n-1}^{k+1} (\mathrm{mod} f_n^2)$$

şi deci conform principiului inducţiei complete relaţia este demonstrată.

Teorema 11. $f_{kn-1} \equiv (-1)^{k+1} f_{n-2}^k (\mathrm{mod} f_n^2)$, *oricare ar fi* $n \in \mathbb{N}^*$.

Demonstraţie. Relaţia se demonstrează tot prin inducţie completă. Pentru $k = 1$ obţinem $f_{n-2} \equiv f_{n-2} (\mathrm{mod} f_n^2)$ ceea ce este evident.

Presupunem că $f_{kn-2} \equiv (-1)^{k+1} f_{n-2}^k (\mathrm{mod} f_n^2)$ şi să demonstrăm că

$$f_{(k+1)n-2} \equiv (-1)^{k+2} f_{n-2}^{k+1} (\mathrm{mod} f_n^2).$$

Întradevăr, avem:

$$f_{(k+1)n-2} = f_{kn-2+n} = f_{kn-1}f_n + f_{kn-2}f_{n-1} \equiv f_{kn-1}f_n + (-1)^{k+1} f_{n-2}^k (f_n - f_{n-2}) \equiv$$

$$\equiv f_{kn-1}f_n + (-1)^{k+1} f_{n-2}^k f_n + (-1)^{k+2} f_{n-2}^{k+1} \equiv$$

$$\equiv (f_{n-1}^k + (-1)^{k+1} f_{n-2}^k) f_n + (-1)^{k+2} f_{n-2}^{k+1} \equiv (-1)^{k+2} f_{n-2}^{k+1} (\mathrm{mod} f_n^2).$$

Am folosit mai sus că $f_{n-1}^k + (-1)^{k+1} f_{n-2}^k$ se divide cu$f_{n-1} + f_{n-2} = f_n$. Rezultă conform principiului inducţiei complete că teorema este demonstrată.

Teorema 12. $f_n^2 \,\big|f_{nf_n}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Demonstraţie. Notăm $f_n = k$. Avem:

$$f_{nf_n} = f_{nk} = f_{nk-1} + f_{nk-2} \equiv f_{n-1}^k + (-1)^{k+1} f_{n-2}^k (\mathrm{mod} k^2).$$

Totodată avem $f_{n-1} = f_n - f_{n-2}$ şi deci

$$f_{n-1}^k = (f_n - f_{n-2})^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^i f_n^{k-i} f_{n-2}^i \equiv (-1)^k f_{n-2}^k (\bmod k^2).$$

Deci,

$$f_{n-1}^k + (-1)^{k+1} f_{n-2}^k \equiv (-1)^k f_{n-2}^k + (-1)^{k+1} f_{n-2}^k \equiv 0 (\bmod k^2),$$

ceea ce demonstrează teorema.

Teorema 13. $f_n^{m+1} \Big| f_{n f_n^m}$, oricare ar fi $m \in \mathbb{N}$ şi $n \in \mathbb{N}^*$.

Demonstraţie. Pentru $m = 1$ afirmaţia este echivalentă cu teorema 12. Presupunem afirmaţia adevărată pentru m şi o demonstrăm pentru $m + 1$. Vom arăta că $f_n^{m+1} \Big| f_{n f_n^m}$ implică $f_n^{m+2} \Big| f_{n f_n^{m+1}}$. Avem:

$$f_{u f_n} = f_{u f_n - 1} + f_{u f_n - 2} \equiv f_{u-1}^{f_n} + (-1)^{f_n+1} f_{u-2}^{f_n} (\bmod u^2) \equiv$$
$$\equiv (f_u - f_{u-2})^{f_n} + (-1)^{f_n+1} f_{u-2}^{f_n} (\bmod u^2) \equiv$$
$$\equiv (-1)^{f_n} f_{u-2}^{f_n} + (-1)^{f_n+1} f_{u-2}^{f_n} \equiv 0 (\bmod f_n^{m+1}).$$

Am folosit mai sus că din $f_n^m \,|u$ şi $f_n^m \,|u^2 \Rightarrow f_n^{m+1} \,|f_u$.

Teorema 14. *Orice două numere Fibonacci consecutive sunt relative prime.*

Demonstraţie. Fie $d = (f_n, f_{n+1})$. Avem $f_{n+1} - f_n = f_{n-1}$ de unde rezultă $d \,|f_{n-1}$. Atunci $d \,|(f_n - f_{n-1}) = f_{n-2}$. Repetând procedeul se deduce că $d \,|f_1$, deci $d = 1$.

Altfel: din teorema 6., $f_{n-1} f_{n+1} - f_n^2 = (-1)^n$. Rezultă $d \,|(-1)^n$, i.e., $d = 1$.

Teorema 15. $(f_m, f_n) = f_{(m,n)}$.

Demonstraţie. Notăm $a = (m, n), b = (f_m, f_n), c = f_{(m,n)}$. Vom arăta că $c \mid b$ şi $b \mid c$. Deoarece $a \mid m$ şi $a \mid n$, conform teoremei 9. avem: $f_a \,|f_m$ şi$f_a \,|f_n$. Deci $f_a \,|(f_m, f_n)$, i.e., $c \,|b$.

Acum, din teorema *Bachet-Bezout*, există numerele întregi x, y astfel încât $xm+yn = a$. Se observă că x şi y nu pot fi ambele negative, deoarece a ar fi negativ. Cum $a \mid n$ şi $a \mid m$, avem $a \leqslant n$, $a \leqslant m$. De asemenea, x şi y nu pot fi simultan pozitive, deoarece am avea $a = xm + yn \geqslant m + n$, contradicţie. Atunci, x şi y au semne diferite şi, fără a restrânge generalitatea presupunem că $x \leqslant 0$, $y > 0$. Observăm că :

$$f_{yn} = f_{a-xm} = f_{a-1} f_{-xm} + f_a f_{-xm+1}$$

(am utilizat teorema 8.). Cum $n \mid yn$ şi $m \mid (-xm)$, din teorema 9. rezultă că $f_n \mid f_{yn}$ şi $f_m \,|f_{-xm}$. Acestea implică că $(f_m, f_n) \,|f_{yn}$ şi $(f_m, f_n) \,|f_{-xm}$. Din cele de mai sus avem că $(f_m, f_n) \,|f_a f_{-xm+1}$.

Dacă$(f_m, f_n) \,|f_{-xm+1}$, cum $(f_m, f_n) \,|f_{-xm}$ rezultă că (f_m, f_n) ar divide două numere *Fibonacci* consecutive, contradicţie (conform teoremei 14) în cazul în care $(f_m, f_n) > 1$.

Cazul $(f_m, f_n) = 1$ este trivial. Rezultă că $(f_m, f_n) \,|f_a$, ceea ce trebuia demonstrat.

Teorema 16. Dacă $p \neq 5$ este un număr prim impar, atunci $p \,|f_{p-1}$ sau $p \,|f_{p+1}$.

Lema 1. $\begin{pmatrix} p-1 \\ n \end{pmatrix} \equiv (-1)^n \bmod p, 1 \leqslant n \leqslant p - 1.$

Demonstraţie. $(p - 1)(p - 2)...(p - n) \equiv (-1)(-2)...(-n) \equiv (-1)^n n! \bmod p$, rezultă concluzia.

Lema 2. $\begin{pmatrix} p+1 \\ n \end{pmatrix} \equiv 0 \bmod p, 2 \leqslant n \leqslant p - 1.$

Demonstraţie. $(p+1)(p)(p-1)...(p-n-2) \equiv (1)(0)(-1)...(-n) \equiv 0 \bmod p$, rezultă lema.

Demonstraţia teoremei. Din teorema 2. avem:

$$f_n = \frac{1}{2^{n-1}} \left(\begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} n \\ 3 \end{pmatrix} + 5^2 \begin{pmatrix} n \\ 5 \end{pmatrix} + ... + 5^{\frac{n-2}{2}} \begin{pmatrix} n \\ n-1 \end{pmatrix} \right).$$

Din lema 1:

$$2^{p-2} f_{p-1} \equiv p - 1 - (5 + 5^2 + ... + 5^{\frac{p-3}{2}}) \equiv - \frac{5^{\frac{p-1}{2}} - 1}{4} \bmod p.$$

Din lema 2:

$$2^p f_{p+1} \equiv p + 1 + 5^{\frac{p-1}{2}} \equiv (5^{\frac{p-1}{2}} + 1) \bmod p.$$

Din cele două relaţii de mai sus obţinem:

$$2^{2p} f_{p-1} f_{p+1} \equiv -(5^{p-1} - 1) \bmod p.$$

Din mica teoremă a lui *Fermat*, $5^{p-1} \equiv 1 \bmod p$, pentru $p \neq 5$ şi teorema este demonstrată.

Notă. Punctul de plecare al acestui articol l-a constituit răspunsul dat de dl. prof. dr. *Ioan Tomescu* (Membru Corespondent al Academiei), Secretarului General al S.S.M.R din România dl. prof. *Mircea Trifu*, în Gazeta Matematică nr.12/ 2007, la întrebarea:

M.T.: „Mai sunt dispuşi tinerii de astăzi să înveţe matematica?"

I.T.: „Dacă vom şti să prezentăm această ştiinţă ca pe o frumoasă provocare a spiritului mereu născocitor, este posibil ca tinerii să ajungă să înteleagă frumuseţea şi profunzimea unui raţionament matematic. Şi mai trebuie ca profesorii să fie capabili să prezinte elevilor impactul matematicii asupra întregii dezvoltări ştiinţifice contemporane, conexiunile dintre matematică şi informatică şi aplicaţiile acestora, de exemplu, în criptografie, în studiul genomului uman, în comerţul electronic."

Bibliografie

[1] * * * Gazeta Matematică, 1895 - 2007 .

[2] J. Fauvel & J. van Maanen, *History in Mathematics Education*, Boston, 2000.

[3] S. R. Finch, *Mathematical Constants*, Cambridge University, 2003.

[4] R. Knot, *Fibonacci Numbers and the Golden Section*, se poate consulta gratuit pe Internet la adresa
http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/ R.Knot/Fibonacci/fib.html

[5] N. Mihăileanu, *Istoria Matematicii*, vol. 1, Editura Enciclopedică Română, Bucureşti, 1974.

[6] N. Mihăileanu, *Istoria Matematicii*, vol. 2, Editura Stiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1981.

[7] N. N. Vorobyov, *The Fibonacci Numbers*, The University of Chicago, 1966.

[8] D. A. Santos, *Number Theory for Mathematical Contests*, Boston, 2007.

[9] J. R. Silvester, *Fibonacci properties by matrix methods*, The Mathematical Gazette, vol. 63 (1979), nr. 425, pp. 188 - 191.

[10] E. W. Weisstein, *CRC Concise Encyclopedia of Mathematics*, Washington, D.C., 2003.

Grupul Şcolar Tehnic „Sf. Mucenic Sava",
Berca, Buzău

Câteva amintiri despre Societatea de Ştiinţe Matematice din România

DE VASILE ŢUGULEA

Drumul vieţii mele s-a interferat de multe ori cu cel al S.S.M. în cei aproximativ 50 de ani de activitate didactică. De aceea, la solicitarea prof. dr. *Dan Brânzei* am acceptat cu gratitudine să scriu un articol despre S.S.M., mal ales că pe dumnealui îl cunosc încă de când era elev la liceul Negruzzi din Iaşi, coleg de clasă cu nepotul meu *Viorel Barbu*, într-o clasă celebră prin numele mari de matematicieni ce şi-au primit prima formaţie matematică aici, sub îndrumarea profesorului *Colibaba*.

Enunţ un truism când afirm că S.S.M. a avut, vreme de mai bine de un secol, un rol determinant în formarea profesorilor de matematică, în întreţinerea entuziasmului elevilor pentru învăţarea matematicii, în informarea celor interesaţi de matematică cu progresele ştiinţei matematice, progrese care au fost capitale în secolul 20.

Personal, am avut de câştigat de pe urma acţiunilor S.S.M. În 1939, elev fiind în clasa IV-a la Liceul M. Kogălniceanu din Vaslui, profesorul nostru de matematică *Emanoil Gaiu*, ne-a prezentat, într-un fel de cerc de matematică, Gazeta matematică şi Revista de la Timişoara. Şi, chiar dacă au urmat anii grei ai războiului cu toate privaţiunile sale, Gazeta a continuat să apară aproape mai regulat decât în deceniul 1980-1990!

După ce am intrat în învăţământ, în 1950, ca profesor am luat cunoştinţă de acţiunile S.S.M., în special cele legate de organizarea şi participarea cu elevii la olimpiadele de matematică.

Din 1956 am fost ales secretar al Filialei S.S.M. din regiunea Bârlad, preşedinte fiind profesorul *David Haim*, decedat în 1970 în Israel.

În această calitate, am organizat olimpiadele cu diferitele lor etape, dar şi multe activităţi menite să ajute pregătirea profesorilor de matematică:

– cursuri şi consultaţii pentru profesorii debutanţi;

– conferinţe ale cadrelor universitare din Iaşi sau Bucureşti, dintre care amintesc pe prof. *Mendel Haimovici*, prof. *Gh. Ghiorghiev*, prof. *Ilie Popa*, dar şi mai tinerii profesori *Radu Miron*, *Nicolae Luca*, *Vasile Cruceanu*, *Teodor Drăgănel.*

Aceste vizite se transformau în adevărate sărbători ale matematicii pentru noi, profesorii din Bârlad, şi erau de real ajutor, dat fiind faptul că în 1957 se introduseseră noi programe de învăţământ menite să aducă învăţământul românesc în contemporaneitate (se ştie că în perioada 1951-1956 în licee se utilizau programe preluate de la sovietici, programe ce întorceau şcoala românească în urmă cu circa 70 de ani!)

S-a instalat astfel o adevărată tradiţie şi, periodic, la Bârlad veneau de acum şi tinerii matematicieni formaţi la Iaşi sau Bucureşti care vor deveni nume de referinţă pentru matematica românească precum: *Constantin Corduneanu*, *Viorel Barbu*, *Dan Brânzei*, *Vasile Oproiu* şi mulţi alţii.

Pentru mine, memorabile au rămas cursurile de vară organizate de S.S.M. la Predeal, Braşov sau Suceava, unde timp de o lună de zile, audiam matematicieni celebri, dar şi specialişti din alte domenii. Prelegerile lor, ca şi seminariile ce urmau, au fost extrem de importante pentru informarea şi formarea noastră profesională.

Sub conducerea competentă a S.S.M. de către acad. *Grigore Moisil* am avut prilejul să ascult expuneri memorabile ale acad. *Miron Nicolescu*, *Octav Onicescu*, *Gh. Mihoc*, *Mendel Haimovici* şi mulţi, mulţi alţii.

Amintesc doar două din aceste expuneri:

Cred că, în 1963, ambasadorul României la Paris, la un simpozion pe teme de probabilităţi şi statistică arăta că, în scopuri profesionale, participa la simpozioane medicale şi de cele mai multe ori urmărea greu expunerile din cauza aparatului matematic folosit în argumentaţie de expozanţi. A fost un exemplu pe care l-am folosit în lecţiile mele pentru a convinge elevii amatori de cariere umaniste sau medico-farmaceutice că trebuie să înveţe matematica.

Un alt exemplu care m-a impresionat a fost o expunere a acad. *Gh. Vrânceanu* care la un moment dat l-a prezentat pe asistentul său *Costake Teleman* ca fiind un strălucit tânăr savant în domeniul Geometriei Riemaniene şi i-a propus chiar atunci să dezvolte ideile pe care tocmai le enunţase. Mi s-a părut un gest generos şi de respect pentru tinerii savanţi.

Ca să conchid, cursurile de vară organizate de către S.S.M. au fost prilej de reluare şi aprofundare a cunoştinţelor dobândite la Facultate, foarte necesare pentru că începând din 1965, în programele de liceu îşi făcuseră loc lecţiile de teoria probabilităţilor şi statistică, dar şi structurile algebrice.

Ori, pentru mulţi profesori, lucrurile păreau aproape insurmontabile!

De-a lungul acelor ani, S.S.M. are meritul de a fi întreţinut interesul elevilor şi profesorilor pentru Gazeta Matematică şi Fizică şi apoi G.M.

Apariţia lunară a gazetei era aşteptată cu foarte mare interes, şi aceasta pentru că Gazeta Matematică constituia, cel puţin pentru noi profesorii din provincie, mica fereastră prin care puteam privi la ceea ce însemna învăţământul matematic în afara hotarelor ţării.

Încetul cu încetul Gazeta a scăpat de „tirania“ geometriei triunghiului, de nesfârşitele egalităţi sau inegalităţi trigonometrice. Şi-au făcut loc tot mai multe probleme de teoria numerelor, de analiză matematică, de probabilităţi şi, mai ales, de algebră modernă.

Noţiunile de mulţime şi de funcţie au devenit esenţiale în definirea şi dezvoltarea cunoştinţelor matematice ale elevilor.

Îmi place să cred că un rol esenţial l-a avut acad. *Miron Nicolescu*, preşedinte al Academiei Române în acea perioadă.

În ce mă priveşte m-am simţit obligat, în întreaga mea activitate la catedră, dar şi în afara clasei, să transmit cunoştinţele ce le dobândisem, dar şi spiritul magiştrilor ce m-au format:

– la lecţiile de analiză matematică m-a însoţit permanent ţinuta, chipul luminos, eleganţa expunerii marelui profesor *Miron Nicolescu*

– la lecţiile de geometrie analitică, puţine câte erau, prezentam personalitatea bonomului moldovean, prof. *Gh. Vrânceanu* care transpira în efortul pe care îl făcea la catedră pentru a se face cât mai înţeles şi pe care eu în lecţia introductivă îl prezentam ca cel mai mare geometru român al vremii!

Expunerile echilibrate, cu limpezime de cristal ţinute de prof. *Octav Onicescu* m-au însoţit toată viaţa.

I-am rămas profund recunoscător prof. *Dan Barbilian* pentru cursul opţional de Teoria lui Galois atunci când, în 1965, s-au introdus primele cunoştinţe de structuri algebrice şi care pentru mulţi profesori care nu le studiaseră în Facultate au reprezentat dificultăţi insurmontabile.

Şi aş putea spune cuvinte de recunoştinţă despre toţi profesorii pe care i-am avut la Facultate.

Ultimele decenii de activitate le-am desfăşurat la Colegiul Naţional „Gh. Roşca Codreanu" din Bârlad. O spun cu satisfacţie fiindcă aici s-a creat, în timp, o tradiţie în ce priveşte învăţarea matematicii. Actualii profesori *Marian Tetiva*, *Dumitru Mihalache*, *Valeriu Braşoveanu*, *Gabi Ghidoveanu*, sunt o prezenţă activă la Gazeta Matematică prin articole şi probleme propuse, dar mai ales prin antrenarea elevilor în utilizarea revistei în pregătirea lor pentru concursuri.

În încheiere aş dori să fac şi o propunere. Prin 1988 am citit într-o lucrare editată de Academia Română un articol scris de *Nicolae Teodorescu*, în care arăta că pentru secolul 21 el vede o dezvoltare a matematicii în direcţia studierii fractalilor.

După 1990 mi-au parvenit mai multe studii şi articole pe aceasta temă din care amintesc acela scris de *Solomon Marcus*, dar şi o culegere de comunicări ţinute la un simpozion organizat la Universitatea PARIS 7 pe tema „Dimensiunea fractală – Dimensiunea Haussdorf fracţionară".

Printre articole era unul semnat de prof. *Ciprian Foiaş* şi încă doi colaboratori, articol care era citat în multe comunicări ale unor cercetători din diferite domenii de activitate.

După cum se ştie Teoria fractalilor îşi are originea în lucrările lui *Benoit Mandelbrot* „Geometria fractală şi obiecte fractale". Teoria fractalilor îşi propune să rezolve probleme pe care matematica le evită.

La bază au stat însă lucrările lui *Cantor*, *Peano*, *Hilbert*, *Koch* şi alţii, care puneau în evidenţă funcţii continue şi peste nederivabile.

Poate că în Gazeta Matematică şi-ar putea face loc şi prezentarea unor noţiuni din această nouă teorie a fractalilor despre care *B. Mandelbrot* spune că nu este matematică, dar este obligat să-i folosească aparatul şi care speră să-l facă mai celebru decât *Albert Einstein.*

Şi astfel aceste cunoştinţe ar putea constitui obiectul unor opţionale propuse de către profesori în cadrul curricumului la decizia şcolii.

Colegiul Naţional „Gheorghe Roşca-Codreanu"
din Bârlad

MANIFESTĂRI ŞTIINŢIFICE

Al Optulea Seminar Româno-German de Teoria Aproximării şi Aplicaţii, Sibiu, 28 mai - 1 iunie 2008

Ajuns la a opta ediţie, Seminarul Româno-German de Teoria Aproximării şi Aplicaţii (RoGer) continuă o tradiţie deja bine statornicită cu începere din 1994 [1. Cluj-1994, 2. Cluj-1996, 3. Sibiu-1998, 4. Braşov-2000, 5. Sibiu-2002, 6. Băişoara- 2004, 7. Königswinter (Germania)-2007].

Desfăşurarea în 2008, la doar un an după ediţia precedentă, amânată din 2006 în 2007, a fost hotărâtă pentru a repune în funcţiune desfăşurarea în anii pari, aşa cum începuse. Ca şi la ediţia precedentă, am resimţit cu profund regret absenţa a doi dintre iniţiatorii din 1994 a Seminarului, regretaţii conf. dr. *Luciana Lupaş*, decedată în 2006 şi regretatul prof. dr. *Alexandru Lupaş*, decedat în 2007.

Organizat în cele mai bune condiţii de către Universitatea Lucian Blaga şi de către Departamentul de Matematică al acestei Universităţi, seminarul, găzduit în clădirea Rectoratului, s-a desfăşurat în cele mai bune condiţii. Au fost prezentate trei conferinţe plenare, de către profesorii

Heiner Gonska (Germania), unul dintre iniţiatorii din 1994, *Gancho Tachev* (Bulgaria) şi *Ioan Gavrea*.

De asemenea, au fost prezentate 24 de comunicări pe secţiuni, de către profesori sau matematicieni: *I. Nikolova* (Bulgaria), *R. Păltănea*, *M. Acu*, *T. Zapryanova* (Bulgaria), *S. Gal*, *E. C. Popa*, *A. Vernescu*, *I. Popa*, *D. Simian*, *A. Halhoş*, *D. Pop*, *E. Constantinescu*, *A. Branga*, *M. Olaru*, *C. Gheorghiu*, *M. Ivan*, *I. Chiosean*, *V. Miheşan*, *B. Gavrea*, *D. Acu*, *M. Boncuţ*, *F. Sofonea*, *I. Ţincu*, *N. Seceleanu*.

O frumoasă excursie a permis continuarea directă a convorbirilor din timpul seminarului; excursia a cuprins vizitarea Muzeului Satului din Sibiu şi a Muzeului Icoanelor pe sticlă din Sibiel (cel mai mare din lume de acest fel).

Prin toată organizarea şi desfăşurarea sa, Seminarul a constituit o frumoasă ocazie de comunicare între matematicieni şi îi dorim multe succese în continuare.

Andrei Vernescu

Semicentenarul Institutului de Calcul Numeric Tiberiu Popoviciu din Cluj-Napoca, 7-10 mai 2008

În cadrul zilelor academice clujene a avut loc un frumos eveniment aniversar, dedicat uneia din marile realizări instituţionale de acum o jumătate de secol, înfiinţarea Institutului de Calcul Numeric din Cluj, al Academiei, în urma strădaniilor lui *Tiberiu Popoviciu*.

Sub preşedinţia de onoare a acad. *Dimitrie D. Stancu*, manifestarea s-a bucurat de girul unui prestigios Comitet ştiinţific format din Acad. *M. Iosifescu*, vicepreşedinte al Academiei Române, Acad. *I. Cuculescu*, Acad. *D. D. Stancu*, Prof. dr. *P. Blaga*, Prof. dr. *Şt. Cobzaş*, Prof. dr. *Gh. Coman*, Prof. dr. *M. Ivan*, C. S. I. dr. *G. Marinoschi*, Prof. dr. *Şt. Măruşter*, Prof. dr. *M. Megan*, Prof. dr. *T. Precupanu*, Prof. dr. *I. Raşa*. Comitetul de organizare a fost format din cercetători ai institututlui: *I. Păvăloi* (director), *C. Mustăţa*, *E. Cătinaş*, *C. Vamoş*, *M.-C. Anisia*, *M. Crăciun*, *D. Otrocol*, *C. Revnic*, *C.-I. Gheorghiu*.

La festivitatea de deschidere au făcut frumoase evocări: Acad. *C. Mureşan*, preşedintele Filialei Cluj-Napoca a Academiei Române, C. S. I dr. *I. Păvăloiu*, directorul institutului, Acad. *D.D. Stancu*, Prof. dr. *A. Petruşel*, Prof. dr. *Şt. Măruşter*, C. S. I. dr. *Şt. Ţigan*.

În cele trei zile de lucrări au fost susţinute şase conferinţe în plen de către profesorii *S. A. Plata* (Spania), *I. K. Argyros* (S. U. A.), *R. Beuwens* (Belgia), Acad. *I. Cuculescu* (România) *B. Lafuerza-Guillén* (Spania), *T. Precupanu* (România). Au mai fost susţinute numeroase comunicări, de către (în ordinea prezentării) *J. Tanner*, *M. Ivan*, *C. Cartis*, *R. Precup*, *C. Popa*, *S. Gal*, *M. Anisiu*, *Şt. Măruşter*, *V. Berinde*, *C. Popîrlan*, *O. Cira*, *E. Cătinaş*, *S. Bica*, *L. Savu*, *A. Vernescu*, *P. Pop*, *F. Popovici*, *T. Trif*, *N. Pop*, *N. Sucu*, *Şt. Ţigan*, *D. Marian*, *I. Raşa*, *Şt. Cobzaş*, *C. Mustăţa*, *R. Haeltermann*, *I. Păvăloiu*, *M. Mihoc*, *D. Pop*, *S. Tabatabei*, *R. D. Ene*, *C. I. Gheorghiu*, *C. Revnic*, *A. Diaconu*, *A. Craicu*, *M. Crăciun*.

În ziua de 10 mai a avut loc o frumoasă excursie la Castelul Jidvei.

Cu prilejul aniversării Institutului, care într-o jumătate de veac a avut importante realizări şi a înfruntat nu puţine vicisitudini, urăm membrilor săi noi şi frumoase succese.

Andrei Vernescu

DIN VIAŢA SOCIETĂŢII

Concursul Interjudeţean de Matematică Danubius, Ediţia a doua, Corabia, 10 mai 2008

Aflat la a doua ediţie, concursul interjudeţean de matematică Danubius a fost organizat de Inspectoratul Şcolar Judeţean Olt, Filiala Corabia a S.S.M.R., Colegiul Naţional Alexandru Ioan Cuza şi Şcoala cu clasele I-VIII, nr 3, ambele din Corabia.

Concursul s-a bucurat de un curs ascendent al participării, faţă de prima ediţie, de anul trecut. El s-a desfăşurat sub patronajul ştiintific al conf. univ. dr. *Andrei Vernescu*, iar reuşita de anul acesta a fost marcată de strădaniile deosebite ale prof. dr. *Dorin Mărghidanu*, preşedintele Filialei Corabia a S.S.M.R. şi director al Colegiului Naţional Al. I. Cuza, cât şi ale prof. *Nicolae*

Tomescu, directorul şcolii cu clasele I-VIII, nr. 3 din localitate. Aceste strădanii au fost nu numai cele de ordin organizatoric (şi ştim cât de solicitante sunt !), dar şi de ordin ştiinţific, cei doi profesori contribuind din plin la propunerea subiectelor. Valorificându-se concentrarea unui însemnat număr de profesori veniţi pentru corectarea lucrărilor, a fost organizată o masă rotundă pe teme de învăţământ al matematicii, având ca moderator pe prof. dr. *Dorin Marghidanu* şi fiind animată de prof. *Alexandru Popescu-Zorica* şi conf. dr. *Andrei Vernescu.*

O scurtă dar reuşită excursie pe Dunăre, oferind oaspeţilor din alte judeţe posibilitatea de a admira frumoasele privelişti ale locului, a prilejuit şi continuarea convorbirilor pe teme de specialitate, începute la masa rotundă.

În încheiere, urăm Concursului interjudeţean de matematică Danubius, devenit deja tradiţional, frumoase succese şi la ediţiile viitoare !

Dan Coma

REVISTA REVISTELOR

Recreaţii Matematice

Numărul 1 din 2008 al revistei „Recreaţii Matematice“ marchează un eveniment de seamă în istoria culturii româneşti, anume împlinirea a 125 de ani de la prima apariţie a revistei ieşene „Recreaţii ştiinţifice“ (1883-1888). Evenimentul este marcat prin publicarea unui editorial cu titlul „Recreaţii ştiinţifice – 125 de ani de la apariţie“ – semnat de *Temistocle Bârsan* şi *Dan Tiba* – şi care a fost reprodus în precedentul număr al revistei noastre, în cadrul rubricii de Istoria matematicii. De asemenea, tot pentru a marca evenimentul, Asociaţia „Recreaţii Matematice“ a reuşit reeditarea integrală a colecţiei revistei, atât în format tipărit cât şi electronic, făcând – prin aceasta – un adevărat gest de cultură care, sperăm, va crea un precedent şi o emulaţie printre cei interesaţi de revigorarea istoriei şi tradiţiilor noastre culturale.

În altă ordine de idei, nu putem decât reafirma calitatea şi interesul stârnit de articolele şi notele publicate, adevărate bijuterii ştiinţifice sau informative. Vom cita doar câteva din bogatul sumar: „Polinoame Fibonacci, polinoame ciclotomice“ (*L. Stugariu*, *C. Stugariu*), „Submulţimi ale unei mulţimi finite şi matrici binare“ (*A. Reisner*), „O problemă de combinatorică destul de grea“ (*M. Tetiva*), „O clasă de inegalităţi“ (*M. Dicu*, *L. Tuţescu*), „Despre numerele reale algebrice“ (*S. Boga*), „O rafinare a inegalităţii dintre media aritmetică şi cea logaritmică“ (*M. Bencze*), „A study of a new geometric inequality“ (*C. J. Zhao*) etc.

Dan Radu

Revista de Matematică din Timişoara

Ultimul număr apărut (nr. 1/2008) al R. M. T. este un număr omagial, dedicat împlinirii a 125 de ani de la naşterea lui *Traian Lalescu* – fondatorul revistei.

El debutează cu un amplu şi documentat editorial – cu titlul „O culme a cercetării româneşti: Traian Lalescu“, semnat de acad. *Solomon Marcus* – în care autorul, distins om de cultură şi matematician, practică o interesantă etapizare a generaţiilor de matematicieni români, stabilind interesante corelaţii cu diverşi oameni de cultură şi artă congenari cu aceştia. Direcţia fenomenului cultural mi se pare extrem de pertinentă şi informată istoric, plasarea lui *Traian Lalescu* în contextul ştiinţific, social şi istoric fiind extrem de naturală şi firească. Desigur, materialul – cu toate cele datorate profesorului *Solomon Marcus* – întruneşte, la superlativ, toate acele coaliţii care fac dintr-un text al domniei sale o adevărată jubilaţie pentru cititor: claritate, concizie, eleganţa exprimării, informaţie corectă şi bogată.

În fine, vom încheia această succintă prezentare a revistei amintind titlurile celor două note matematice publicate în prezentul număr: „Existenţa limitei unui şir invers“ (*D. Şt. Marinescu* şi *V. Cornea*), „În legătură cu teorema lui Ptolomeu, Simson şi Pompeiu“ (*G. Mihai*).

Dan Radu

Revista de matematică a elevilor şi profesorilor din judeţul Caraş-Severin

Neobositul profesor *Lucian Dragomir* din Oţelu Roşu ne-a expediat nr. 28 (an IV – 2008) al revistei ce apare la Reşiţa.

Iată titlurile câtorva materiale inserate în prezentul număr: „Generalizarea unor probleme date la Olimpiada de Matematică – 2006" (*S. şi M. Monea*), „Probleme de minim şi de maxim" (*I. Şelaru*), „Omotetii" (*P. Neagoe* şi L. Dragomir) etc.

Interesant mi s-a părut şi materialul „Caracteristici cantitative în limba vorbită / scrisă" semnat de *M. Lucu*, în care sunt conţinute o serie de date (cu caracter numeric) privind frecvenţa utilizării anumitor litere într-o limbă, frecvenţa apariţiei fonemelor într-un text de o natură sau alta.

Dan Radu

Creaţii matematice, seria B

Revista suceveană editată de „Societatea ştiinţifică Cygnus" sub direcţia profesorului *Ion Bursuc* a intrat în al doilea an de apariţie. Recent am primit numărul 2/2007 al publicaţiei care începe să-şi contureze un cerc de colaboratori de marcă dintre profesorii cu vechi preocupări în publicistica matematică preuniversitară din ţara noastră.

Iată titlurile câtorva materiale inserate în acest număr „Asupra unor probleme din Gazeta Matematică" (*I. Bursuc*), „Asupra calculului unor integrale" (*D. M. Bătineţu-Giurgiu* şi *I. Bursuc*), „O clasă de ecuaţii funcţionale" (*A. Sandovici*), „Două demonstraţii scurte pentru inegalitatea mediilor" (*D. Mărghidanu*), „O relaţie metrică în triunghi" (*O. Pop* şi *Gh. Szöllösy*) etc.

De asemenea, trebuie subliniat faptul că problemele propuse, fără a fi în număr foarte mare, sunt destul de variate şi cu enunţuri interesante.

Dan Radu

Revista de matematică şi informatică

De la Constanţa am primit numerele 1 şi 2 din 2008 ale „Revistei de matematică şi informatică", ce apare trimestrial în localitate.

Desigur, am avut prilejul în mai multe rânduri să prezentăm revista constănţeană care, fiind în al optulea an de apariţie, şi-a găsit un loc propriu printre publicaţiile locale de profil, definindu-şi un cerc de cititori şi colaboratori destul de larg datorită calităţii problemelor inserate în spaţiul editorial. Mărturie a acestui fapt stau pe de o parte amplele liste de redactori şi colaboratori, iar, pe de altă parte – numeroşii rezolvitori al căror nume este publicat în revistă.

Cele două numere pe care le avem la dispoziţie conţin două foarte interesante note semnate de prof. univ. dr. *Ion Cucurezeanu* – unul dintre coordonatorii revistei intitulate, respectiv „O condiţie ca o expresie să fie cub perfect" şi „Ecuaţii exponenţiale rezolvate prin ecuaţia lui Rolle". De asemenea, vom mai menţiona (din nr. 2/2008) şi nota „Demonstraţii elementare ale unor inegalităţi integrale şi unele aplicaţii ale acestora" datorată profesorului *Tudorel Lupu*.

În fine, o observaţie formală pe care am vrea să o facem este că variaţia – pe alocuri – a corpului de literă cu care este culeasă revista alterează, când şi când, aspectul estetic al acesteia. Ar fi necesară o mai mare atenţie când se face corectura.

Dan Radu

Creative Mathematics and Informatics

Din Baia Mare am primit volumul 17 (2008) al Lucrărilor Seminarului de Creativitate Matematică, editat de Departamentul de Matematică şi Ştiinţa Calculului al Universităţii de Nord din localitate.

Revista reuneşte, ca de obicei, un mare număr de articole cu caracter ştiinţific datorate unor matematicieni români sau străini. Vom prezenta titlurile câtorva dintre acestea, cu menţiunea că selecţia este destul de arbitrară şi subiectivă: „About Simpson-type and Hermite-type inequalities" (*M. Bencze*, *Z. Changjian*), „Anticommutativity in the ring of square matrices of the second order with complex entries" (*C. Mortici*), „The inclusion-exclusion principle and the pingeonhole principle on distributive lattices" (*V. Pop*), „A note on the Nagel and Gergonne points" (*D. Andrica*, *K. L. Nguyen*), „Some repartitions results by inversion" (*D. Brânzei*, *C. Mortici*).

Dan Radu

RECENZII

ROLF NEVANLINNA, VEIKKO PAAJERO, Introduction to Complex Analysis, Second Edition, AMS CHELSEA PUBLISHING, Providence, Rhode Island, 2007

O nouă carte de analiză complexă poate fi revăzută în repertoriul internaţional dedicat domeniului, domeniu în care şi în România există valoroase tratate deja clasice, începând cu faimoasele „Lecţiuni de teoria funcţiunilor" ale lui *David Emmanuel*, (în două volume), iar apoi „Teoria funcţiilor de variabilă complexă" (în două volume) de *Simion Stoilow*, cu volumul al doilea scris în colaborare cu d-na. acad. prof. *Cabiria Andreian-Cazacu*, cărţile lui *A. Angelescu*, *Th. Angheluţă*, *Gh. Călugăreanu*, *O. Mayer*, *N. Ciorănescu*, *C. Iacob* şi altele. În literatura matematică internaţională există, de asemenea, multe cărţi remarcabile de analiză complexă (*L. Ahlfors*, *H. Cartan*, *J. Dieudonné*, *S. Lang*, *W. Rudin*, *E. Titchmarsh*, *M. Lavrentiev* şi *B. Shabat*, *A. Sveshnikov* şi *A. Tikhonov* şi multe altele).

Primul autor, *Rolf Nevanlinna* (l895-1980) a fost unul dintre cei mai mari matematicieni ai lumii din secolul XX; el este cunoscut în special datorită teoriei distribuţiei valorilor funcţiilor meromorfe, care astăzi îi poartă numele şi care ar putea fi privită ca o substanţială continuare, într-un spirit nou, a teoriei lui *Picard*, dar şi prin contribuţii remarcabile în domeniul suprafeţelor riemanienne. Continuator al lui *Myrberg* şi *Lindelöf*, *Nevanlinna* a fost, printre altele, îndrumătorul tezei de doctorat a lui *Lars V. Ahlfors*, primul medaliat Fields, cu prilejul Congresului de la Oslo din 1936, al matematicienilor, şi a fost, pentru mulţi ani, preşedintele Asociaţiei mondiale a matematicienilor (pentru o documentare mai completă, a se vedea, de exemplu, lucrarea *Rolf Nevanlinna. On the Occasion of the Centennial Colloquium in Joensuu*, August 1-5, 1995, Walter de Gruyter, Berlin, New-York, 1995). De asemenea, *Nevanlinna* a sprijinit mult desfăşurarea Seminariilor Româno-Finlandeze de Analiză complexă într-o perioadă dificilă; a fost, personal, de mai multe ori la Bucureşti.

Un tratat pentru care cel puţin unul dintre autori este un ilustru matematician – creator, având realizări de primă mărime în domeniu, nu poate fi decât de mare interes.

Cartea pe care o prezentăm este bazată pe conferinţele ţinute de autori la Universitatea din Helsinki şi la Universitatea din Zürich şi este o reluare a traducerii din 1968 a ediţiei germane, *Einführung in die Funktionentheorie*, publicată la Birkhäuser, Basel, în 1964. Desfăşurată în 17 capitole, pe 350 de pagini şi având 55 de figuri, cartea constituie o excelentă prezentare a problematicii esenţiale a analizei complexe. Conţine următoarele capitole:

1. Conceptul de funcţie analitică
2. Proprietăţile generale ale funcţiilor raţionale
3. Transformări liniare
4. Aplicaţii prin funcţii raţionale de ordinul al doilea
5. Funcţia exponenţială şi inversa sa. Puterea generală
6. Funcţiile trigonometrice
7. Serii infinite cu termeni complecşi
8. Integrarea în domeniul complex. Teorema lui Cauchy
9. Formula integrală a lui Cauchy şi aplicaţii
10. Teorema reziduurilor şi aplicaţiile sale
11. Funcţii armonice
12. Prelungirea analitică
13. Funcţii întregi
14. Funcţii periodice
15. Funcţia Gamma a lui Euler
16. Funcţia zeta a lui Riemann
17. Teoria aplicaţiilor conforme.

Asupra acestei cărti, profesorul *Clifford Earle*, de la Universitatea Cornell scria: „*It really is a gem, both in terms of its table of contents and the level of discussions*", iar profesorul *William Abikoff*, de la Universitatea Connecticut nota „*This book has a soul and has passion*".

Andrei Vernescu

EDUARD DĂNCILĂ, IOAN DĂNCILĂ, Ghidul învăţătorului, Editura IULIAN, Bucureşti, 2008

Lucrarea elaborată de profesorul *Ioan Dăncilă*, în colaborare cu fiul său *Eduard Dăncilă*, reprezintă încununarea efortului depus de autor pe parcursul multor ani în vederea perfecţionării şi modernizării învăţământului matematic în clasele primare, în scopul încadrării acestuia pe coordonatele europene contemporane.

Volumul debutează cu o *captatio benevolentiae* – o scrisoare deschisă – adresată unei învăţătoare, în care autorii încearcă, pe un ton colocvial, să atragă atenţia asupra importanţei actului de învăţământ – în general – şi asupra rolului jucat de matematică în cadrul acesteia – în mod special.

Totodată, autorii mărturisesc că „ghidul de faţă are ca obiectiv crearea, pentru fiecare învăţătoare, a posibilităţii atât de dorite, de a sădi şi a cultiva încrederea în matematică a micului şcolar".

În prefaţa propriu-zisă – intitulată sugestiv „Ce se întâmplă?" – autorii încearcă o analiză a situaţiei predării matematicii în clasele primare, plecând de la ideea că, din ce în ce mai mult, matematica predată în ciclul primar este golită de sens. Sunt idei în general corecte şi unanim acceptate, de care, însă, puţini ţin seama în practica la catedră. Prefaţa se încheie, totuşi, într-o notă optimistă, autorii considerând că învăţătorii sunt cei care trebuie şi pot să le redea elevilor „bucuria de a învăţa".

Structurată pe 15 capitole – ale căror titluri, din lipsă de spaţiu, nu le vom cita – lucrarea se vrea un imbold, pentru învăţători, de a trece puţin dincolo de aspectul formal al lucrurilor, de partea seacă şi expozitorie a matematicii, redându-i acesteia locul firesc în viaţa individului şi a colectivităţii.

Scrisă într-un limbaj plăcut şi vioi, asezonat cu numeroase grafice şi desene, volumul ar trebui să constituie o delectare pentru cititori. Şi aici este bine ascuns secretul autorilor; se doreşte de fapt câştigarea interesului învăţătorilor pentru matematică, pentru ca aceştia, la rândul lor, să intreprindă demersurile necesare pentru a capta atenţia şi interesul micilor elevi.

Oricum, autorii trebuie felicitaţi pentru elaborarea unei lucrări interesante, atractive, ieşită din tiparele destul de anoste ale unui volum uzual de metodică de tipul celor care au inundat, în ultima vreme, piaţa românească de specialitate.

Dan Radu

EDUARD DĂNCILĂ, IOAN DĂNCILĂ, Matematica serveşte!, Editura ERCPRES, Bucureşti, 2007

Alegând drept titlu al volumului un slogan al regretatului profesor *Grigore Moisil*, cei doi autori încearcă să prezinte, în această lucrare, o serie de aplicaţii, în viaţa de toate zilele, a matematicii de gimnaziu.

Volumul se deschide, ca şi cel prezentat anterior, cu o scrisoare, adresată de această dată elevilor, în care autorii încearcă să explice, în cuvinte simple şi bine alese, importanţa şi utilitatea matematicii în viaţa de zi cu zi.

Aplicaţiile prezentate sunt împărţite în 11 categorii (capitole), fiind judicios selectate şi ilustrate prin exemple şi exerciţii. Ceea ce este interesant este faptul că autorii încearcă – şi adesea izbutesc – să străpungă rutina de mult încetăţenită a aşa ziselor „aplicaţii" ale matematicii preluate de zeci şi zeci de ani de un autor de la altul, venind cu idei noi, ancorate în realitatea actuală.

Numeroasele informaţii istorice, comentariile suculente şi pertinente dau o savoare deosebită volumului, stârnind interesul cititorului – fie el mic sau mare – şi incitându-l să-şi formuleze singur alte probleme similare.

Considerăm că volumul este extrem de interesant şi perfect accesibil elevilor de gimnaziu şi recomandăm folosirea lui de către aceştia şi de către profesorii lor.

Dan Radu

POŞTA REDACŢIEI

Ovidiu Pop – C. P. 514, O. P. 5, 440310 Satu Mare. Am primit problema propusă de dumneavoastră. Colegiul Redacţional va decide în ce măsură este publicabilă sau nu.

Mihail Bencze – Str. Hărmanului, nr. 6, 505600 Săcele. Am primit problema propusă de dumneavoastră şi o vom supune atenţiei Colegiului Redacţional.

Bogdan Chiriac – Facultatea de Matematică a Universităţii Al. I. Cuza din Iaşi şi **Vasile Chiriac**, str. N. Bălcescu, nr. 1, sc. B, ap. 106, 600050 Bacău. Articolul dumneavoastră intitulat „Asupra mărginirii şi monotoniei şirurilor" va fi supus atenţiei Colegiului Redacţional care va decide asupra oportunităţii publicării lui.

Mărioara Costăchescu – Liceul cu program sportiv din Roman. Am primit articolul dumneavoastră cu titlul „Semnificaţia creştină a numerelor". Colegiul Redacţional va studia în ce măsură este publicabil sau nu.

Mihai Croitoru – Colegiul tehnic Danubiana din Roman. Articolul dumneavoastră cu titlul „Elipsa, hiperbola şi parabola metrică" va fi supus atenţiei Colegiului Redacţional.

Marian Tetiva – Colegiul Naţional „Gheorghe Roşca-Codreanu" din Bârlad. Nota dumneavoastră intitulată „Legături neaşteptate" va fi publicată într-unul din viitoarele numere ale revistei.

Theodor Stihi, **Mircea Olteanu** – Universitatea Politehnică din Bucureşti. Materialul dumneavoastră cu titlul „Concursul internaţional de matematică pentru studenţi SEEMOUS, Atena, 2008" va fi studiat de Colegiul Redacţional în vederea publicării lui.

Jose Luis Diaz-Barrero, **J. Gibergans-Bágnena** – Applied Mathematics III, Universidad Politechnica de Catalunya, Barcelona, Spain. Articolul dumneavoastră cu titlul „Inequalities derived using telescopic summs" se află în atenţia Colegiului Redacţional, care va hotărî asupra oportunităţii publicării lui.

Dan Radu

ERATĂ

1. În G.M.-A nr. **1**/20087, s-au strecurat următoarele erori:

Dintr-o regretabilă eroare de tehnoredactare, ilustraţiile care trebuiau să apară la pag. 77 şi 78 au apărut la pag. 82 şi 83. Facem cuvenita rectificare cerând, pe această cale, scuze cititorilor.

Redacţia