GAZETA MATEMATICĂ
SERIA A
REVISTĂ DE CULTURĂ MATEMATICĂ

ANUL XXVI(CV) Nr. 2 / 2008

O nouă demonstraţie a inegalităţii lui Surányi

DE MARIAN TETIVA

Abstract

In this note we present a new proof of Surányi's inequality.
Key words: Surányi's inequality, mathematical induction.
M.S.C.: 26D15

Dorim să prezentăm în această notă o variantă de demonstrare a inegalităţii lui *Surányi* ([1], [2], [4]). Deşi mai complicată, ne-am propus să facem această demonstraţie pentru că socotim că are o anume eleganţă şi, în plus, metoda folosită atacă inegalităţile pe care le demonstrează (adică pe acelea omogene, inegalitatea lui *Surányi* fiind de acest tip) în chiar esenţa lor, arătând cum ele derivă din identităţi (căci şi identităţi se obţin pe această cale, identităţi la care altfel cu greu am ajunge). Este vorba de următoarea

Propoziţie. *Pentru orice numere pozitive* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *are loc inegalitatea* (*lui Surányi*)

$$\begin{gathered}(n-1)(a_1^n + a_2^n + \cdots + a_n^n) + na_1a_2\ldots a_n \geq \\ \geq (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(a_1^{n-1} + a_2^{n-1} + \cdots + a_n^{n-1}).\end{gathered}$$

Demonstraţia o facem tot prin inducţie (ca în [2]), dar noi vom presupune inegalitatea demonstrată pentru orice număr $p \in \{1, 2, \ldots, n\}$ de variabile şi o să arătăm că are loc şi pentru $n+1$ variabile (verificarea pentru $n = 1$ nu constituie o problemă, ba chiar inegalitatea se poate demonstra uşor şi pentru $n = 2$, când devine egalitate, sau pentru $n = 3$, inegalitate ce se numeşte a lui *Schur*, cum se arată şi în [2]). Cu alte cuvinte, avem de demonstrat inegalitatea

$$\begin{gathered}n(a_1^{n+1} + a_2^{n+1} + \cdots + a_n^{n+1}) + (n+1)a_1a_2\ldots a_na_{n+1} \geq \\ \geq (a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1})(a_1^n + a_2^n + \cdots + a_n^n + a_{n+1}^n),\end{gathered}$$

pentru $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$ numere nenegative. Metoda pe care o vom utiliza este numită metoda normării în lucrarea [3]; ce înseamnă de fapt aceasta? Datorită simetriei, putem presupune, fără a restrânge generalitatea, că a_{n+1} este cel mai mic dintre numerele $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$; mai mult, putem presupune că el este strict pozitiv, deoarece inegalitatea de mai sus cu $a_{n+1} = 0$ derivă fără probleme din inegalitatea lui *Cebîşev* – convingeţi-vă de asta! Atunci rapoartele

$$\frac{a_1}{a_{n+1}}, \frac{a_2}{a_{n+1}}, \ldots, \frac{a_n}{a_{n+1}}$$

sunt mai mari sau egale cu 1 şi prin urmare pot fi exprimate în forma

$$\frac{a_1}{a_{n+1}} = 1 + x_1, \frac{a_2}{a_{n+1}} = 1 + x_2, \ldots, \frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + x_n,$$

unde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sunt numere nenegative. Inegalitatea de demonstrat se dovedeşte a fi echivalentă (după împărţirea cu a_{n+1}^{n+1} şi desfacerea parantezelor de tip $(1+x_k)^{n+1}$ şi $(1+x_k)^n$) cu

$$n\left(n+1+C_{n+1}^1\sum_{k=1}^n x_k + C_{n+1}^2\sum_{k=1}^n x_k^2 + \cdots + C_{n+1}^n\sum_{k=1}^n x_k^n + \sum_{k=1}^n x_k^{n+1}\right) +$$

$$+(n+1)\left(1+\sum x_1 + \sum x_1x_2 + \cdots + \sum x_1x_2\ldots x_{n-1} + x_1x_2\ldots x_n\right) \geq$$

$$\geq \left(n+1+\sum_{k=1}^n x_k\right)\left(n+1+C_n^1\sum_{k=1}^n x_k + \cdots + C_n^{n-1}\sum_{k=1}^n x_k^{n-1} + \sum_{k=1}^n x_k^n\right)$$

(a doua paranteză din membrul stâng conţine toate sumele simetrice formate cu $x_1, x_2, \ldots, x_n$), inegalitate despre care trebuie să dovedim că este adevărată pentru orice $x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$ (folosind presupunerea de inducţie, conform căreia enunţul propoziţiei este valabil pentru orice număr $k \leq n$ de variabile). Această inegalitate „se sparge“ în inegalităţile corespunzătoare pentru componentele omogene (de acelaşi grad) din fiecare membru. Anume, este uşor de văzut că termenii liberi – de grad 0 – din ambii membri (deci cei care nu conţin pe $x_1, x_2, \ldots, x_n$) sunt egali cu $(n+1)^2$. La fel, se stabileşte fără dificultate că termenii de gradul întâi sunt, în cei doi membri ai inegalităţii,

$$(n+1)^2\sum_{k=1}^n x_k.$$

Pentru $2 \leq p \leq n$, termenii de grad p sunt, în membrul stâng

$$nC_{n+1}^p\sum_{k=1}^n x_k^p + (n+1)\sum x_1x_2\ldots x_p,$$

iar în dreapta

$$(n+1)C_n^p\sum_{k=1}^n x_k^p + C_n^{p-1}\sum_{k=1}^n x_k\sum_{k=1}^n x_k^{p-1};$$

deoarece (un calcul simplu)

$$nC_{n+1}^p - (n+1)C_n^p = (p-1)C_{n+1}^p,$$

inegalitatea de demonstrat pentru componentele de grad p, $2 \leq p \leq n$, este

$$(p-1)C_{n+1}^{p}\sum_{k=1}^{n}x_k^p+(n+1)\sum x_1x_2\dots x_p \geq C_n^{p-1}\sum_{k=1}^{n}x_k\sum_{k=1}^{n}x_k^{p-1}.$$

Ei bine, această inegalitate este adevărată şi se obţine folosind (şi) inegalitatea lui *Surányi* pentru p variabile (aşa cum presupunerea de inducţie ne permite), cum se va vedea în continuare.

Pentru început să observăm că avem

$$C_{n+1}^{p}=\frac{n+1}{p}C_n^{p-1},$$

astfel că inegalitatea de demonstrat se poate scrie şi în forma

$$\frac{n+1}{p}\left((p-1)C_n^{p-1}\sum_{k=1}^{n}x_k^p+p\sum x_1x_2\dots x_p\right) \geq C_n^{p-1}\sum_{k=1}^{n}x_k\sum_{k=1}^{n}x_k^{p-1}. \qquad (1)$$

De asemenea, avem $C_n^{p-1}=C_{n-1}^{p-1}+C_{n-1}^{p-2}$ şi

$$C_{n-1}^{p-1}\sum_{k=1}^{n}x_k^p=\sum\left(x_1^p+x_2^p+\cdots+x_p^p\right),$$

suma din partea dreaptă fiind extinsă asupra tuturor submulţimilor cu p elemente ale mulţimii celor n variabile $x_1, x_2, \dots, x_n$; mai precis, aceasta este suma

$$\sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_p\leq n}(x_{i_1}^p+x_{i_2}^p+\cdots+x_{i_p}^p),$$

pentru care preferăm, pentru comoditate, notaţia mai simplă de mai sus (ceea ce vom face mai departe cu fiecare sumă de acest tip). Rezultă că în membrul stâng al inegalităţii avem de fapt

$$\frac{n+1}{p}(p-1)C_{n-1}^{p-2}\sum_{k=1}^{n}x_k^p+\frac{n+1}{p}\sum\left((p-1)(x_1^p+x_2^p+\cdots+x_p^p)+px_1x_2\dots x_p\right),$$

expresie care se minorează (pe baza inegalităţii lui *Surányi* aplicată fiecărui grup de p dintre cele n variabile) cu

$$\frac{n+1}{p}(p-1)C_{n-1}^{p-2}\sum_{k=1}^{n}x_k^p+\frac{n+1}{p}\sum(x_1+x_2+\cdots+x_p)(x_1^{p-1}+x_2^{p-1}+\cdots+x_p^{p-1})$$

(sumă formată, cum spuneam, din cei C_n^p termeni asemănători cu cel scris, câte unul pentru fiecare grupare de p dintre cele n variabile). Acum, un calcul pe care-l lăsăm cititorului (de fapt, mai curând, un raţionament combinatoric) justifică egalitatea

$$\sum(x_1+x_2+\cdots+x_p)(x_1^{p-1}+x_2^{p-1}+\cdots+x_p^{p-1})=$$

$$= C_{n-2}^{p-1}\sum_{k=1}^{n} x_k^p + C_{n-2}^{p-2}\sum_{k=1}^{n} x_k \sum_{k=1}^{n} x_k^{p-1};$$

mai folosim inegalitatea

$$n\sum_{k=1}^{n} x_k^p \geq \sum_{k=1}^{n} x_k \sum_{k=1}^{n} x_k^{p-1}$$

(care rezultă uşor, chiar pentru orice număr real $p \geq 1$, cu inegalitatea lui *Cebîşev*, v. şi mai sus, v. şi [2]) şi minorăm, în cele din urmă, membrul stâng al inegalităţii (1) cu

$$\frac{n+1}{p}\left(\frac{(p-1)C_{n-1}^{p-2} + C_{n-2}^{p-1}}{n} + C_{n-2}^{p-2}\right)\sum_{k=1}^{n} x_k \sum_{k=1}^{n} x_k^{p-1}.$$

Ce ne-a mai rămas de făcut? Evident, să arătăm că această din urmă expresie este mai mare sau egală cu membrul drept al inegalităţii de demonstrat (1); iar, deoarece fiecare x_k este nenegativ, aceasta revine la inegalitatea corespunzătoare între coeficienţii produselor $\sum_{k=1}^{n} x_k \sum_{k=1}^{n} x_k^{p-1}$, deci ne rămâne de arătat că

$$\frac{n+1}{p}\left(\frac{(p-1)C_{n-1}^{p-2} + C_{n-2}^{p-1}}{n} + C_{n-2}^{p-2}\right) \geq C_n^{p-1}$$

pentru n şi p numere naturale, $n \geq p \geq 2$. (Pentru $p = n$ va apărea aici numărul C_{n-2}^{n-1}, dar aceasta nu reprezintă o problemă: convenţional, dar şi conform calculelor făcute, acesta se înlocuieşte cu 0.)

Din identitatea combinatorică de mai sus (luând pe $x_1, x_2, \ldots, x_n$ egale, toate, cu 1), sau prin calcul direct, obţinem

$$nC_{n-2}^{p-1} + n^2C_{n-2}^{p-2} = p^2C_n^p;$$

de aceea avem

$$n^2\left(\frac{(p-1)C_{n-1}^{p-2} + C_{n-2}^{p-1}}{n} + C_{n-2}^{p-2}\right) = (p-1)nC_{n-1}^{p-2} + p^2C_n^p =$$

$$= ((p-1)^2 + p(n-p+1))C_n^{p-1} = (pn-p+1)C_n^{p-1}.$$

Atunci

$$n^2\frac{n+1}{p}\left(\frac{(p-1)C_{n-1}^{p-2} + C_{n-2}^{p-1}}{n} + C_{n-2}^{p-2}\right) = \frac{(n+1)(pn-p+1)}{p}C_n^{p-1} =$$

$$= \frac{pn^2+n-p+1}{p}C_n^{p-1} = n^2C_n^{p-1} + \frac{n-p+1}{p}C_n^{p-1} = n^2C_n^{p-1} + C_n^p,$$

deci

$$\frac{n+1}{p}\left(\frac{(p-1)C_{n-1}^{p-2} + C_{n-2}^{p-1}}{n} + C_{n-2}^{p-2}\right) = C_n^{p-1} + \frac{C_n^p}{n^2} > C_n^{p-1}$$

şi ne-am atins scopul!

De fapt (probabil cititorul a remarcat deja), diferenţa între membrul stâng şi cel drept al inegalităţii (1), unde am pus $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1$, este

$$(p-1)nC_{n+1}^p + (n+1)C_n^p - n^2C_n^{p-1} = C_n^p,$$

acesta fiind un calcul mult mai simplu; deoarece inegalităţile folosite devin egalităţi pentru $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1$ (de fapt, oricând variabilele sunt egale), înseamnă că nu am modificat, prin transformările făcute, această diferenţă, deci rezultatul calculelor de mai sus era previzibil şi se justifică şi pe această cale (putem spune că am făcut doar o verificare).

În sfârşit, pentru termenii de grad $n+1$, avem de demonstrat inegalitatea

$$n\sum_{k=1}^{n} x_k^{n+1} \geq \sum_{k=1}^{n} x_k \sum_{k=1}^{n} x_k^n,$$

despre care am mai spus că se obţine imediat cu inegalitatea lui *Cebîşev* şi am încheiat ce ne-am propus.

Aceasta a fost demonstraţia; cititorul interesat va putea, fără îndoială, să deducă şi singur alte identităţi şi inegalităţi din care dăm doar un exemplu (oarecum spectaculos, oarecum plicticos).

Exerciţiu. Arătaţi că, pentru orice numere a, b, c, d are loc identitatea

$$\begin{gathered}3(a^4+b^4+c^4+d^4)+4abcd-(a+b+c+d)(a^3+b^3+c^3+d^3)= \\ = d^2(3(a-d)^2+3(b-d)^2+3(c-d)^2- \\ -2(a-d)(b-d)-2(a-d)(c-d)-2(b-d)(c-d))+ \\ +d(5(a-d)^3+5(b-d)^3+5(c-d)^3+4(a-d)(b-d)(c-d)- \\ -3(a-d)(b-d)(a+b-2d)-3(a-d)(c-d)(a+c-2d)- \\ -3(b-d)(c-d)(b+c-2d))+ \\ +(a-b)^2((a-d)^2+(a-d)(b-d)+(b-d)^2)+ \\ +(a-c)^2((a-d)^2+(a-d)(c-d)+(c-d)^2)+ \\ +(b-c)^2((b-d)^2+(b-d)(c-d)+(c-d)^2).\end{gathered}$$

Bibliografie

[1] M. Bencze, *About Surányi's Inequality*, JIPAM, art. 8, vol. 8, no. 4, 2005.

[2] G. Dospinescu, *O teoremă uitată – inegalitatea lui Surányi*, Recreaţii Matematice, nr. 1/2005.

[3] M. O. Drimbe, *Inegalităţi – idei şi metode*, Editura Gil, Zalău, 2003.

[4] P. Erdös, J. Surányi, *Topics in the Theory of Numbers*, Springer, 2003.

Colegiul Naţional Gheorghe Roşca Codreanu,
str. Nicolae Bălcescu nr. 11,
731183, Bârlad

Noi rafinări ale inegalităţii lui Durrande în tetraedru

de Marius Olteanu

Abstract

In this note we present some refinements of Durrande's inequality.
Key words: Durrande's inequality, tetrahedron
M.S.C.: 51M04, 51M16, 51M20.

Dacă R şi r reprezintă raza sferei circumscrisă. respectiv înscrisă tetraedrului $ABCD$, atunci este cunoscută inegalitatea

$$R \geq 3r, \tag{1}$$

care se mai numeşte inegalitatea lui *Durrande*, după unii autori, sau a lui *Euler* în tetraedru, după alţi autori, prin analogie cu inegalitatea *Euler* în triunghi.

Considerăm că problema rafinării inegalităţii (1) reprezintă un domeniu destul de sărac în literatura de specialitate. O abordare a acestui subiect o putem găsi în [6] şi [7] (relaţiile (10), (17), (18), (19), (32)). Demonstraţii ale inegalităţii (1) pot fi găsite în [2], [4], [8], [10]. Pornind de la aceste aspecte, în articolul de faţă se vor prezenta noi rafinări ale inegalităţii (1), completându-se astfel seria rezultatelor stabilite în [6] şi [7].

Vom folosi următoarele notaţii referitoare la un tetraedru oarecare $[ABCD]$: V – volumul său, r_a – raza sferei exînscrise de speţa întâi, care este tangentă la faţa BCD (analog r_b, r_c, r_d); h_a, m_a lungimea înălţimii, respectiv a medianei tetraedrului ce conţin vârful A (analog h_b, h_c, h_d; m_b, m_c, m_d); r_A, R_A raza cercului înscris şi respectiv circumscris feţei BCD (opusă vârfului A) (şi analog r_B, r_C, r_D; R_B, R_C, R_D); S_A – aria feţei BCD (analog S_B, S_C, S_D), S – aria totală a tetraedrului, $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, $l = AD$, $m = BD$, $n = CD$; d_1, d_2, d_3, b_1, b_2, b_3 – lungimile perpendicularelor comune şi respectiv a bimedianelor corespunzătoare celor trei perechi de muchii opuse.

Pentru început, reamintim pe scurt câteva noţiuni teoretice.

Se numeşte *tetraedru circumscriptibil* (sau *Crelle* sau „carcasă") tetraedrul $[ABCD]$ care admite o sferă tangentă la fiecare dintre cele şase medii ale tetraedrului (sferă hexatangentă).

Se numeşte *tetraedru ortocentric*, tetraedrul ale cărui înălţimi sunt concurente într-un acelaşi punct.

Asupra proprietăţilor celor două clase de tetraedre nu mai insistăm aici, din motive lesne de înţeles.

Dacă se notează cu ρ raza sferei hexatangentă a unui tetraedru *Crelle* atunci, conform problemei **288** din [8] sau al rezultatelor din [9] se ştie că

$$R \geq \sqrt{3} \cdot \rho, \tag{2}$$

iar

$$\rho > \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot r. \tag{3}$$

În [12] au fost stabilite foarte recent următoarele rezultate, conform teoremei 3 şi a propoziţiei 6 menţionate în această lucrare:

În orice tetraedru Crelle $[ABCD]$ *au loc inegalităţile*

$$\rho \geq \sqrt{3} \cdot r \tag{4}$$

şi

$$(S_A + S_B + S_C + S_D)^2 \geq \frac{9V^2}{2}\left(\frac{1}{r_A^2} + \frac{1}{r_B^2} + \frac{1}{r_C^2} + \frac{1}{r_D^2}\right). \tag{5}$$

Evident, inegalitatea (4) este mai tare decât inegalitatea (3) şi, ţinând seama de inegalitatea (2), se obţine următoarea rafinare a inegalităţii lui *Euler* într-un tetraedru *Crelle*

$$R \geq \sqrt{r} \cdot \rho \geq 3r, \tag{6}$$

cu egalitate numai dacă tetraedrul este regulat.

Nu mai redăm aici demonstraţia inegalităţii (5) (aceasta putând fi consultată pe Internet). Menţionăm, însă, că demonstraţia este aceeaşi şi în cazul unui tetraedru oarecare şi, ţinând seama că $S = S_A + S_B + S_C + S_D$, iar $3V = r \cdot S$, atunci putem afirma că în orice tetraedru $[ABCD]$ între razele cercurilor înscrise feţelor şi raza sferei înscrisă, există inegalitatea

$$\frac{1}{r_A^2} + \frac{1}{r_B^2} + \frac{1}{r_C^2} + \frac{1}{r_D^2} \leq \frac{2}{r^2}, \tag{7}$$

cu egalitate numai dacă $[ABCD]$ este tetraedru regulat. Folosind inegalitatea medilor şi ţinând seama de relaţia (7), avem următoarea inegalitate

$$r_A^2 + r_B^2 + r_C^2 + r_D^2 \geq 8r^2. \tag{8}$$

Deoarece $R_A \geq r_a$ (şi analoagele), conform inegalităţii lui *Euler* în triunghi, rezultă că

$$R_A^2 + R_B^2 + R_C^2 + R_D^2 \geq 4\left(r_A^2 + r_B^2 + r_C^2 + r_D^2\right) \geq 32r^2. \tag{9}$$

Inegalitatea (9) reprezintă o rafinare a aplicaţiei 5.2, pag. 439, din [3].

Propoziţia 1. *Într-un tetraedru oarecare* $[ABCD]$ *au loc următoarele rafinări ale inegalităţii lui Durrande:*

a) $\dfrac{4\sqrt{2}}{3} \cdot R \geq r_A + r_B + r_C + r_D \geq 4\sqrt{2}r$;

b) $\dfrac{8}{9} \cdot R^2 \geq r_A^2 + r_B^2 + r_C^2 + r_D^2 \geq 8r^2$;

c) $8\sqrt{2}\left(\dfrac{2}{3}R - r\right) \geq R_A + R_B + R_C + R_D \geq 8\sqrt{2}r$;

d) $\dfrac{32}{9}\left(5R^2 - 36r^2\right) \geq R_A^2 + R_B^2 + R_C^2 + R_D^2 \geq 32r^2$.

Demonstraţie. a) Avem

$$r_A + r_B + r_C + r_D \geq \frac{16}{\dfrac{1}{r_A} + \dfrac{1}{r_B} + \dfrac{1}{r_C} + \dfrac{1}{r_D}}. \tag{10}$$

Însă

$$\frac{1}{r_A}+\frac{1}{r_B}+\frac{1}{r_C}+\frac{1}{r_D}\leq 2\sqrt{\frac{1}{r_A^2}+\frac{1}{r_B^2}+\frac{1}{r_C^2}+\frac{1}{r_D^2}} \tag{11}$$

(conform inegalităţii dintre media aritmetică şi media geometrică).

Ţinând seama de inegalităţile (7), (10) şi (11), avem

$$r_A+r_B+r_C+r_D\geq 16\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{r_A^2}+\frac{1}{r_B^2}+\frac{1}{r_C^2}+\frac{1}{r_D^2}}}\geq 8\cdot\frac{r}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2}\cdot r. \tag{12}$$

În continuare, $r_A=\dfrac{S_A}{p_A}$, unde p_A este semiperimetrul triunghiului BCD.

Rezultă

$$r_A^2=\frac{S_A^2}{p_A^2}=S_A\cdot\frac{S_A}{p_A^2}. \tag{13}$$

Dar

$$S_A^2=p_A(p_A-a)(p_A-m)(p_A-n)\leq p_A\left[\frac{3p_A(a+m+n)}{3}\right]^3=\frac{p_A^4}{27},$$

de unde

$$S_A\leq=\frac{p_A^2}{3\sqrt{3}}\Leftrightarrow\frac{S_A}{p_A^2}\leq\frac{1}{3\sqrt{3}}. \tag{14}$$

Din (13) şi (14) avem

$$r_A^2\leq\frac{S_A}{3\sqrt{3}}.$$

Analog obţinem că $r_B^2\leq\dfrac{S_B}{3\sqrt{3}}$, $r_C^2\leq\dfrac{S_C}{3\sqrt{3}}$, $r_D^2\leq\dfrac{S_D}{3\sqrt{3}}$ şi deci urmează că

$$r_A^2+r_B^2+r_C^2+r_D^2\leq\frac{1}{3\sqrt{3}}\left(S_A^2+S_B^2+S_C^2+S_D^2\right)=\frac{S}{3\sqrt{3}}. \tag{15}$$

Însă, conform inegalităţii lui *Weitzenböck*, aplicată triunghiului BCD avem $4\sqrt{3}S_A\leq a^2+m^2+n^2$; această inegalitate împreună cu celelalte trei similare (aplicată fiecăreia dintre cele trei feţe ale tetraedrului rămase) implică

$$4\sqrt{3}\left(S_A^2+S_B^2+S_C^2+S_D^2\right)\leq 2\left(a^2+b^2+c^2+d^2+l^2+m^2+n^2\right), \tag{16}$$

Avem, de asemenea,

$$a^2+b^2+c^2+d^2+l^2+m^2+n^2\leq 16R^2 \tag{17}$$

(conform problemei **79**, pag. 23 din [8]).

Ţinând seama de relaţiile (15), (16) şi (17), avem

$$r_A^2+r_B^2+r_C^2+r_D^2\leq\frac{8}{9}R^2. \tag{18}$$

De asemenea, avem

$$r_A + r_B + r_C + r_D \leq 2\sqrt{r_A^2 + r_B^2 + r_C^2 + r_D^2}. \tag{19}$$

Din (18) şi (19) se obţine

$$r_A + r_B + r_C + r_D \leq \frac{4\sqrt{2}}{3} \cdot R. \tag{20}$$

Cuplând inegalităţile (12), (20) şi (8), (18) obţinem punctul a) şi respectiv b) al propoziţiei 1.

Mai departe, din $R_A \geq 2r_A$ (şi analoagele) şi pct. a) avem

$$R_A + R_B + R_C + R_D \geq 2\left(r_A + r_B + r_C + r_D\right) \geq 8\sqrt{2}r. \tag{21}$$

Conform problemei 3.2.**54**, pag. 36, din [5], putem scrie următoare inegalitate referitoare la elementele triunghiului BCD

$$9(R_A + 2r_A) \leq 4\sqrt{3}p_A,$$

de unde

$$9R_A \leq 4\sqrt{3}p_A - 18r_A. \tag{22}$$

Inegalitatea (22), aplicată celorlalte trei feţe ale tetraedrului, ne conduce la

$$9\left(R_A + R_B + R_C + R_D\right) \leq$$

$$\leq 4\sqrt{3}\left(p_A + p_B + p_C + p_D\right) - 18\left(r_A + r_B + r_C + r_D\right). \tag{23}$$

Însă

$$p_A + p_B + p_C + p_D = a + b + c + l + m + n \leq$$

$$\leq \sqrt{6} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + l^2 + m^2 + n^2} \leq 4\sqrt{6}R \qquad 24)$$

(am ţinut seama de inegalitatea (17)).

Acum, în conformitate cu inegalităţile (23), (24) şi pct. a), obţinem

$$9\left(R_A + R_B + R_C + R_D\right) \leq 4\sqrt{3}\cdot 4\sqrt{6}R - 18\cdot 4\sqrt{2}r = 48\sqrt{2}R - 72\sqrt{2}r = 8\sqrt{2}\left(6R - 9r\right),$$

ceea ce este echivalent cu

$$R_A + R_B + R_C + R_D \leq 8\sqrt{2} \cdot \left(\frac{2}{3}R - r\right). \tag{25}$$

Prin ridicarea inegalităţii (22) la pătrat (şi analoagele), avem

$$81R_A^2 \leq 48p_A + 324r_A^2 - 144\sqrt{3}S_A$$

(şi analoagele).

Rezultă

$$81\left(R_A^2 + R_B^2 + R_C^2 + R_D^2\right) \leq 48\left(p_A^2 + p_B^2 + p_C^2 + p_D^2\right) +$$

$$+324\left(r_A^2 + r_B^2 + r_C^2 + r_D^2\right) - 144\sqrt{3}S. \tag{26}$$

Dar $p_A^2 = \dfrac{(a+m+n)^2}{4} \le \dfrac{3}{4}(a^2+m^2+n^2)$ (şi analoagele) şi deci

$$p_A^2 + p_B^2 + p_C^2 + p_D^2 \le \frac{3}{2}\left(a^2+b^2+c^2+l^2+m^2+n^2\right) \le \frac{3}{2}\cdot 16R^2 = 24\cdot R^2. \quad (27)$$

Totodată, conform aplicaţiei 5.1, pag. 499, din [3], se ştie că

$$S \ge 24\sqrt{3}r^2. \quad (28)$$

Atunci, conform relaţiilor (26), (27), (28) şi a punctului b), obţinem

$$81\left(R_A^2+R_B^2+R_C^2+R_D^2\right) \le 48\cdot 24R^2 + 324\cdot\frac{8}{9}R^2 - 144\sqrt{3}\cdot 24\cdot\sqrt{3}r^2,$$

ceea ce este echivalent cu

$$R_A^2+R_B^2+R_C^2+R_D^2 \le \frac{32}{9}\left(5R^2-36r^2\right). \quad (29)$$

În fine, cuplând inegalităţile (21), (25) şi (9), (29) obţinem punctul c) şi respectiv d) al propoziţiei 1. Egalităţile au loc numai dacă $[ABCD]$ este tetraedru regulat.

Lăsăm în seama cititorului demonstrarea următoarelor:

Consecinţe. *În orice tetraedru* $[ABCD]$ *au loc următoarele rafinări ale inegalităţii Durrande*:

a) $\dfrac{12}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{1}{R} \le \dfrac{1}{r_A}+\dfrac{1}{r_B}+\dfrac{1}{r_C}+\dfrac{1}{r_D} \le \dfrac{2\sqrt{2}}{r}$;

b) $\dfrac{18}{R^2} \le \dfrac{1}{r_A^2}+\dfrac{1}{r_B^2}+\dfrac{1}{r_C^2}+\dfrac{1}{r_D^2} \le \dfrac{2}{r^2}$;

c) $\dfrac{\sqrt{2}}{\frac{2}{3}R-r} \le \dfrac{1}{R_A}+\dfrac{1}{R_B}+\dfrac{1}{R_C}+\dfrac{1}{R_D} \le \dfrac{\sqrt{2}}{r}$;

d) $\dfrac{9}{2}\cdot\dfrac{1}{(5R^2-36r^2)} \le \dfrac{1}{R_A^2}+\dfrac{1}{R_B^2}+\dfrac{1}{R_C^2}+\dfrac{1}{R_D^2} \le \dfrac{1}{2r^2}$;

e) $64r^2 \le R_A\cdot R_B\cdot R_C\cdot R_D \le 64\cdot\left(\dfrac{2}{3}R-r\right)$;

f) $4r^4 \le r_A\cdot r_B\cdot r_C\cdot r_D \le \dfrac{S^2}{16\cdot 27} \le \dfrac{4}{81}\cdot R^4$

(inegalitate ce reprezintă o extindere a problemei **154**, pag. 37 din [8]);

g) $\dfrac{9}{4R^2} \le \dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}+\dfrac{1}{l^2}+\dfrac{1}{m^2}+\dfrac{1}{n^2} \le \dfrac{1}{4r^2}$

(inegalitatea constituie o extindere a problemei **83**, d), pag. 24 din [8], precum şi o extindere la tetraedru a cunoscutei inegalităţi din triunghi $\dfrac{1}{R^2} \le \dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{a^b}+\dfrac{1}{c^2} \le \dfrac{1}{r^2}$, unde, de această dată, R, r reprezintă raza cercului circumscris, respectiv înscris triunghiului ABC de laturi a, b, c);

h) $36 \le \dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{l}+\dfrac{l}{m}+\dfrac{m}{n}+\dfrac{n}{a} \le \dfrac{2R}{r}$

(inegalitatea constituie o extindere la tetraedru a inegalităţii din triunghi $\dfrac{R}{2r} \ge \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}\right)$, autori *V. Băndilă*, *M. Lascu*, conform problemei 7.**39**, pag 133 din [10]);

i) $\frac{5}{8r^2} \geq \frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{al} + \frac{1}{am} + \frac{1}{an} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{bl} + \frac{1}{bm} + \frac{1}{bn} + \frac{1}{cl} + \frac{1}{cm} + \frac{1}{cn} +$
$+ \frac{1}{lm} + \frac{1}{ln} + \frac{1}{mn} \geq \frac{45}{8} \cdot \frac{1}{R^2}$
(această inegalitate constituie o extindere la tetraedru a problemei **4** dată la Nordic Mathematical Contest, ediţia 18, din 1. 04. 2004).

Propoziţia 2. *În orice tetraedru $[ABCD]$ au loc următoarele rafinări ale inegalităţii Durrande*:

a) $4\left(\frac{3r}{R}\right)^{\alpha} \leq \left(\frac{h_a}{m_a}\right)^{\alpha} + \left(\frac{h_b}{m_b}\right)^{\alpha} + \left(\frac{h_c}{m_c}\right)^{\alpha} + \left(\frac{h_d}{m_d}\right)^{\alpha} \leq 4,$
pentru orice $\alpha \in [1, \infty)$;

b) $9\frac{r}{R^2} \leq \frac{h_a^2}{m_a^2} + \frac{h_b}{m_b^2} + \frac{h_c}{m_c^2} + \frac{h_d}{m_d^2} \leq \frac{1}{r}$;

c) $54\sqrt{3}\frac{r^3}{R^2} \leq 6V\left(\frac{1}{al} + \frac{1}{bm} + \frac{1}{cm}\right) \leq d_1 + d_2 + d_3 \leq b_1 + b_2 + b_3 \leq 2\sqrt{3}R$;

d) $2^4 \cdot 3^6 \cdot \frac{r^6}{R^4} \leq d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 \leq b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 \leq 4R^2$;

e|) $\frac{32}{3}R^2 \geq \sqrt[3]{a^2b^2c^2} + \sqrt[3]{a^2m^2n^2} + \sqrt[3]{b^2m^2n^2} + \sqrt[3]{c^2m^2n^2} \geq 96r^2$.

Demonstraţie. Sunt cunoscute următoarele rezultate

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} + \frac{1}{h_d} = \frac{1}{r} \qquad \text{([4], pag. 39)} \tag{30}$$

$$h_a + h_b + h_c + h_d = 16r \qquad \text{([4], pag. 39)} \tag{31}$$

$$m_a + m_b + m_c + m_d = \frac{16}{3}R \qquad \text{([8], problema } \mathbf{80} \text{ sau [6], pag. 471)} \tag{32}$$

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + m_d^2 = \frac{64}{9}R^2 \qquad \text{([8], problema } \mathbf{80} \text{ sau [6], pag. 471)} \tag{33}$$

$$b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = \frac{1}{4}\left(a^2 + b^2 + c^2 + l^2m^2 + n^2\right) \qquad \text{([8], pag. 8),} \tag{34}$$

ceea ce implică

$$b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = \frac{1}{4} \cdot 16R^2 = 4R^2 \qquad \text{(conform inegalităţii (17))} \tag{35}$$

$$V \geq 8\sqrt{3}r^3 \qquad \text{([3], pag. 500, aplicaţia 5.3)} \tag{36}$$

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1} + \frac{x_2^2}{\alpha_2} + \ldots + \frac{x_n^2}{\alpha_n} \geq \frac{(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n} \tag{37}$$

unde $x_i \in \mathbb{R}$, $\alpha_i > 0$, $i = \overline{1, n}$, $n \in \mathbb{N}^*$ ([1]);

$$h_ah_bh_ch_d \geq 256r^4 \quad \text{(conform inegalităţii mediilor şi a relaţiei (30)).} \tag{38}$$

a) Din $h_a \leq m_a$ (şi analoagele) rezultă

$$\sum\left(\frac{h_a}{m_a}\right)^{\alpha} \leq 4,$$

pentru orice $\alpha \in [1, \infty)$.

Dacă în relaţia (37) alegem: $n = 4$, $x_1 = \sqrt{h_a}$, $x_2 = \sqrt{h_b}$, $x_3 = \sqrt{h_c}$, $x_4 = \sqrt{h_d}$, $\alpha_1 = m_a$, $\alpha_2 = m_b$, $\alpha_3 = m_c$, $\alpha_4 = m_d$, obţinem:

$$\sum \frac{h_a}{m_a} = \sum \frac{\left(\sqrt{h_a}\right)^2}{m_a} \geq \sum \frac{\left(\sqrt{h_a}\right)^2}{\sum m_a} \geq \frac{\left(4\sqrt[8]{h_a h_b h_c h_d}\right)^2}{\sum m_a} \geq 64r \cdot \frac{3}{16R} = 12 \cdot \frac{r}{R} \quad (39)$$

(am utilizat inegalităţile (32) şi (38)).

Mai departe, conform inegalităţii *Jensen* aplicată funcţiei convexe,

$$f : (0, \infty) \to (0, \infty),\ f(x) = x^2,\ q \in [1, \infty],$$

avem

$$\left(\sum \frac{h_a}{m_a}\right)^\alpha \geq 4 \cdot \left(\frac{\sum \frac{h_a}{m_a}}{4}\right)^\alpha \geq 4 \cdot \left(\frac{12\frac{r}{R}}{4}\right)^\alpha = 4 \cdot \left(\frac{3r}{R}\right)^\alpha,$$

pentru orice $\alpha \geq 1$ (am utilizat şi inegalitatea (39)).

b) Avem:

$$\sum \frac{h_a}{m_a^2} \leq \sum \frac{h_a}{h_a^2} = \sum \frac{1}{h_a} = \frac{1}{r} \quad (40)$$

(conform identităţii (30)).

Apoi, similar demonstraţiei punctului a), utilizăm inegalitatea (37), inegalitatea mediilor, inegalitatea (38) şi inegalitatea (33) şi obţinem succesiv

$$\sum \frac{h_a}{m_a^2} = \sum \frac{\left(\sqrt{h_a}\right)^2}{m_a^2} \geq \frac{\left(\sum \sqrt{h_a}\right)^2}{\sum m_a} \geq \frac{\left(4\sqrt[4]{h_a h_b h_c h_d}\right)^2}{\sum m_a} \geq$$

$$\geq \frac{64r}{\sum m_a^2} \geq 64 \cdot r \cdot \frac{9}{64 \cdot R^2} = 9 \cdot \frac{r}{R^2}, \quad (41)$$

Cuplând inegalităţile (40) şi (41), obţinem concluzia punctului b).

c) Conform problemelor **866** şi **867**, pag. 92 din [16], rezultă că $d_i \leq b_i$, $i = 1, 2, 3$ şi deci

$$d_1 + d_2 + d_3 \leq b_1 + b_2 + b_3. \quad (42)$$

Însă

$$b_1 + b_2 + b_3 \leq \sqrt{3} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^3 + b_3^2} \leq 2\sqrt{3}R \quad (43)$$

(conform inegalităţii (35)).

Se ştie că

$$6V\left(\frac{1}{al} + \frac{1}{bm} + \frac{1}{cn}\right) \leq d_1 + d_2 + d_3 \quad (44)$$

(conform problemei **169**, pag. 39, din [8]).

În plus, conform inegalităţilor dintre medii, precum şi a inegalităţii (24) avem:

$$\frac{1}{al} + \frac{1}{bm} + \frac{1}{cn} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{abclmn}} \geq 3\frac{6^2}{(a + b + c + l + m + n)^2} \geq$$

$$\geq 3 \cdot 6^2 \cdot \frac{1}{\left(4\sqrt{6}R\right)^2} = \frac{9}{8} \cdot \frac{1}{R^2}. \tag{45}$$

Ţinând seama acum de inegalităţile (36) şi (45), obţinem

$$6V\left(\frac{1}{al} + \frac{1}{bm} + \frac{1}{cn}\right) \geq 54\sqrt{3} \cdot \frac{r^3}{R^2}. \tag{46}$$

Cuplând inegalităţile (42), (43), (44) şi (46), găsim concluzia de la punctul c).

d) Similar punctului c), avem $d_i^2 \leq b_i^2$, pentru orice $i \in \{1, 2, 3\}$; rezultă

$$d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 \leq b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 \leq 4R^2,$$

conform inegalităţii (35).

De asemenea

$$d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 \geq \frac{1}{3}\left(d_1 + d_2 + d_3\right)^2 \leq \frac{1}{3}\left(54 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{r^3}{R^2}\right)^2 = 2^4 \cdot 3^6 \cdot \frac{r^6}{R^4} \tag{48}$$

(am utilizat inegalitatea de la punctul c)).

Cuplând inegalităţile (47) şi (48), se obţine concluzia punctului d).

e) Partea dreaptă a inegalităţii reprezintă – sub formă corectată – rezultatul aplicaţiei 5.4, pag. 500, din [3].

Pentru demonstrarea părţii stângi, utilizăm de patru ori inegalitatea mediilor precum şi inegalitatea (17). Aşadar, avem

$$\sqrt[3]{a^2b^2c^2} + \sqrt[3]{a^2m^2n^2} + \sqrt[3]{b^2n^2l^2} + \sqrt[3]{c^2m^2l^2} \leq$$

$$\leq \frac{1}{3}\left[\left(a^2 + b^2 + c^2\right) + \left(a^2 + m^2 + n^2\right) + \left(b^2 + n^2 + l^2\right) + \left(c^2 + m^2 + l^2\right)\right] =$$

$$= \frac{2}{3}\left(a^2 + b^2 + c^2 + l^2 + m^2 + n^2\right) \leq \frac{2}{3} \cdot 16R^2 = \frac{32}{3}R^2.$$

Observaţii. 1. Toate inegalităţile acestei propoziţii devin simultan egalităţi numai dacă $[ABCD]$ este tetraedru regulat.

2. Inegalitatea a) generalizează pentru orice tetraedru (nu numai pentru cele ortocentrice ale căror ortocentre sunt situate în interiorul acestora) punctul i) al problemei **129**, pag. 32, din [8].

Propoziţia 3. *În orice tetraedru $[ABCD]$ au loc inegalităţile*

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{R^2} \leq \frac{1}{m_a^2 + m_b^2 + m_c^2} + \frac{1}{m_b^2 + m_c^2 + m_d^2} + \frac{1}{m_c^2 + m_d^2 + m_a^2} + \frac{1}{m_d^2 + m_a^2 + m_b^2} \leq$$

$$\leq \frac{1}{h_a^2 + h_b^2 + h_c^2} + \frac{1}{h_b^2 + h_c^2 + h_d^2} + \frac{1}{h_c^2 + h_d^2 + h_a^2} + \frac{1}{h_d^2 + h_a^2 + h_b^2} \leq$$

$$\leq \frac{1}{12}\left(\frac{1}{r_a^2} + \frac{1}{r_b^2} + \frac{1}{r_c^2} + \frac{1}{r_d^2}\right).$$

b) *Dacă $[ABCD]$ este tetraedru ortocentric, atunci are loc următoarea rafinare a inegalităţii Durrande*:

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{R^2}\le\sum\frac{1}{m_a^2+m_b^2+m_c^2}\le\sum\frac{1}{h_a^2+h_b^2+h_c^2}\le\frac{1}{3^5\cdot 4}\cdot\frac{R^4}{r^6}.$$

Demonstraţie. a) Din inegalitatea mediilor şi inegalitatea (33), avem

$$\sum\frac{1}{m_a^2+m_b^2+m_c^2}\ge\frac{16}{3\left(m_a^2+m_b^2+m_c^2+m_d^2\right)}\ge\frac{16}{3}\cdot\frac{9}{64}\cdot\frac{1}{R^2}=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{R^2}. \tag{49}$$

Evident, $m_a\ge h_a$ (şi analoagele); rezultă

$$\sum\frac{1}{m_a^2+m_b^2+m_c^2}\le\sum\frac{1}{h_a^2+h_b^2+h_c^2}. \tag{50}$$

În continuare:

$$\frac{1}{h_a^2+h_b^2+h_c^2}\le\frac{1}{9}\left(\frac{1}{h_a^2}+\frac{1}{h_b^2}+\frac{1}{h_c^2}\right)$$

(şi analoagele); deci

$$\sum\frac{1}{h_a^2+h_b^2+h_c^2}\le\frac{1}{3}\left(\frac{1}{h_a^2}+\frac{1}{h_b^2}+\frac{1}{h_c^2}+\frac{1}{h_d^2}\right). \tag{51}$$

Dar, conform soluţiei problemei **25086**, G.M.-B nr. 12/2004, pag. 488, se cunoaşte identitatea

$$\frac{1}{r_a^2}+\frac{1}{r_b^2}+\frac{1}{r_c^2}+\frac{1}{r_d^2}=4\left(\frac{1}{h_a^2}+\frac{1}{h_b^2}+\frac{1}{h_c^2}+\frac{1}{h_d^2}\right). \tag{52}$$

Prin cuplarea relaţiilor (49), (50), (51) şi (52), se obţine concluzia punctului a).

b) Inegalitatea rezultă imediat din punctul a) şi din inegalitatea

$$\frac{1}{r^2}\le\frac{1}{r_a^2}+\frac{1}{r_b^2}+\frac{1}{r_c^2}+\frac{1}{r_d^2}\le\frac{1}{81}\cdot\frac{R^4}{r^6}, \tag{53}$$

care constituie fondul problemei **O:1132**, G.M.-B nr.8/2006 sau al propoziţiei 2, relaţia (32) din [7], pag. 205.

Observaţie. La punctul a) egalităţile se ating pe rând sau simultan, numai dacă $[ABCD]$ este tetraedru echifacial, iar la punctul b) numai dacă tetraedrul este regulat.

Propoziţia 4. *În orice tetraedru ortocentric $[ABCD]$ au loc următoarele rafinări ale inegalităţii Durrande*:

a) $\dfrac{1}{4r^2}\le\dfrac{1}{h_a^2}+\dfrac{1}{h_b^2}+\dfrac{1}{h_c^2}+\dfrac{1}{h_d^2}\le\dfrac{1}{324}\cdot\dfrac{R^4}{r^6}.$

b) $\dfrac{9}{4R^2} \le \dfrac{1}{m_a^2}+\dfrac{1}{m_b^2}+\dfrac{1}{m_c^2}+\dfrac{1}{m_d^2} \le \dfrac{1}{m_a h_a}+\dfrac{1}{m_b h_b}+\dfrac{1}{m_c h_c}+\dfrac{1}{m_d h_d} \le \dfrac{1}{324}\cdot\dfrac{R^4}{r^6}$.

Demonstraţie. a) Se aplică identitatea (52) în inegalitatea (53).

b) Conform inegalităţii mediilor precum şi a inegalităţii (33), rezultă

$$\sum \frac{1}{m_a^2} \ge \frac{16}{\sum m_a^2} \ge 16\cdot\frac{9}{64}\cdot\frac{1}{R^2} = \frac{9}{4}\cdot\frac{1}{R^2}.$$

Totodată, $\sum \dfrac{1}{m_a^2} \le \sum \dfrac{1}{m_a h_a} \le \sum \dfrac{1}{h_a^2} \le \dfrac{1}{324}\cdot\dfrac{R^4}{r^6}$.

La ambele puncte, egalităţile se ating pe rând, sau simultan, numai dacă tetraedrul este regulat.

În încheiere, având în vedere egalitatea din problema **115**, pag. 30, din [8], precum şi relaţia $\dfrac{1}{r_a^2}+\dfrac{1}{r_b^2}+\dfrac{1}{r_c^2}+\dfrac{1}{r_d^2} \ge \dfrac{1}{r^2}$, putem spune că, într-un tetraedru oarecare $[ABCD]$, în baza celor prezentate mai înainte, au loc următoarele consecinţe:

i) $8\sqrt{2}\left(\dfrac{2}{3}R - r\right) \ge R_A + R_B + R_C + R_D \ge \dfrac{2}{3\sqrt{3}}(a+b+c+l+m+n) \ge$
$\ge 2\left(r_A + r_B + r_C + r_D\right) \ge 8\sqrt{2}r$;

ii) $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{r_A^2}+\dfrac{1}{r_B^2}+\dfrac{1}{r_C^2}+\dfrac{1}{r_D^2}\right) \le \dfrac{1}{r^2} \le \dfrac{1}{r_a^2}+\dfrac{1}{r_b^2}+\dfrac{1}{r_c^2}+\dfrac{1}{r_d^2}$.

În acelaşi timp, propunem cititorului interesat, în baza celor prezentate în acest articol, ca aplicaţii directe, să arate că au loc următoarele rafinări de tip Durrande, ce completează problemele **106**, **113**, **157**, **165**, **170**, **235**, **305**-c), **312**-d) şi **364** din [8]:

a) *În orice tetraedru $[ABCD]$ au loc următoarele rafinări ale inegalităţii Durrande*:

1. $4\sqrt{6}R \ge a+b+c+l+m+n \ge 6\sqrt[6]{abclmn} \ge$
$\ge 6\sqrt[6]{(-al+bm+cn)(al+bm-cn)(al+cn-bm)} \ge \ldots$
$\ge 6\sqrt[6]{72\cdot V^2} \ge 12\sqrt{6}r$;

2. $48r \le 3\left(m_a+m_b+m_c+m_d\right) \le 8\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2} \le 16R$;

3. $64\cdot 81\cdot r^4 \le 9\sqrt[3]{a^2b^2c^2l^2m^2n^2} \le$
$\le (al+bm+cn)^2 \le \left(a^2+b^2+c^2\right)\left(l^2+m^2+n^2\right) \le 64R^4$;

4. $\dfrac{2^{10}}{27}\cdot R^3 \ge \left(m_a^2+m_b^2+m_c^2+m_d^2\right)\left(h_a+h_b+h_c+h_d\right) \ge \dfrac{128}{\sqrt{3}}\cdot V \ge 2^{10}\cdot r^3$;

5. $2^7\cdot R^3\cdot 3^{-\frac{3}{2}} \ge \left(S_A+S_B+S_C+S_D\right)\left(h_a+h_b+h_c+h_d\right) \ge$
$\ge 48\cdot V \ge 2^7\cdot 3^{\frac{3}{2}}\cdot r^3$;

6. $216\cdot\dfrac{r^2}{R} \le \dfrac{l^2+b^2+c^2}{m_a}+\dfrac{a^2+c^2+m^2}{m_b}+\dfrac{a^2+b^2+n^2}{m_c}+$
$+\dfrac{l^2+m^2+n^2}{m_d} \le 24\cdot R$;

b) *Dacă* $[ABCD]$ *ese tetraedru ortocentric având ortocentrul situat în interiorul tetraedrului, atunci are loc următoarea rafinare a inegalităţii Durrande*

$$\frac{1}{324}\cdot\frac{R^4}{r^6}\geq\frac{1}{m_ah_a}+\frac{1}{m_bh_b}+\frac{1}{m_ch_c}+\frac{1}{m_dh_d}\leq\frac{3}{4Rr}$$

c) $\dfrac{4}{R}\leq\dfrac{1}{GA_1}+\dfrac{1}{GB_1}+\dfrac{1}{GC_1}+\dfrac{1}{GD_1}\leq\dfrac{4\sqrt{6}}{9}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{l}+\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}\right)\leq$ $\leq\dfrac{4}{3r}$, unde G reprezintă centrul de greutate al tetraedrului $[ABCD]$, iar A_1, B_1, C_1, D_1, al doilea punct de intersecţie al dreptelor AG, BG, CG şi respectiv DG cu sfera circumscrisă tetraedrului (inegalitatea completează problema **2049*** din revista Crux Mathematicorum, autor *Jan Ciak*, Polonia sau **379** din [8]).

Bibliografie

[1] T. Andreescu, M. Lascu, *Asupra unei inegalităţi*, G. M. - B nr. 9-10/2001.

[2] D. Brânzei, C. Coca, S. Aniţa, *Planul şi spaţiul euclidian*, Editura Academiei R.S.R., Bucureşti, 1986.

[3] M. Dincă, M. Bencze, *About Inequalities*, Octogon Mathematical Magazine, vol. 12, no. 2, A, october 2004.

[4] M. Miculiţa, D. Brânzei, *Analogii triunghi-tetraedru*, Editura Paralela 45, Piteşti, 2000.

[5] N. Minculete, *Egalităţi şi inegalităţi geometrice în triunghi*, Editura Eurocarpatica, Sfântu Gheorghe, 2003

[6] M. Olteanu, *Rafinări ale inegalităţii lui Durande în tetraedru*, G. M. - B, nr. 8, 2006 şi G. M. - B, nr. 12, 2006 (partea a II-a).

[7] M. Olteanu, *Asupra unor inegalităţi în tetraedru*, G. M. - B, nr. 3, 2006.

[8] M. Olteanu, *Inegalităţi în tetraedru – culegere de probleme*, Editura Universitară Conspress, Bucureşti, 2003.

[9] M. Olteanu, *Asupra unei inegalităţi în tetraedre Crelle*, G. M. - A, nr. 3, 2003.

[10] L. Panaitopol, *O demonstraţie a inegalităţii lui Durrande*, G. M. - B nr. 5-6, 2002.

[11] Gh. Ţiţeica, *Probleme de geometrie*, ediţia a VI-a, Editura Tehnică, Bucureşti, 1981.

[12] Y.-D. Wu and Z,-H. Zang, *The Edge-Tangent Sphere of a Circumscriptible Tetrahedron*, Forum Geometricum, volume 7, 2007, pp. 19-24, ediţie electronică.

Inginer,
S. C. Hidroconstrucţia S.A. Bucureşti, sucursala „Olt-Superior“
Râmnicu-Vâlcea

IMC 2007, Blagoevgrad, Bulgaria

de Dan Schwarz

I was fortunate to accompany the Romanian team at the 14^{th} edition of the International Mathematical Competition (IMC), held in Blagoevgrad, Bulgaria, between August 4 and August 10, 2007. This is a very arduous mathematical competition, consisting of 12 problems of different degrees of difficulty, asked over 2 days of 5 hours working time each. It is sat by undergraduates from as many as 140 universities and colleges (over the 14 editions), ranging from powerful (in mathematics!) eastern European countries like Romania, Bulgaria, Hungary, Poland, Russia, Ukraine, Belarus, to western European countries like France, Germany, Spain, The Netherlands; famous places like Princeton and Oxford; but also exotic (to us) places like Iran, Indonesia, Mongolia, Brazil.

The venue was the American University in Bulgaria and its campus, with outstanding bed and board conditions, nested in the heart of a friendly, tourist-oriented little city. The low living cost and high quality of goods and services in Bulgaria were affordable and enjoyable even to limited-revenue students. The weather was unfortunately rainy for most of the time, but a welcome change from the heat-wave we all experienced, and conducive to working on math problems!

After problem selection, examination, and final contestation solving and corrections, two Grand First Prizes were awarded, to Russian **Alexander Efimov**, and our own **Andrei Neguţ** (hailing from Princeton). They both solved all but the last problem from the set! Moldovan *Simion Filip* (Princeton) had an outstanding performance too, being very close to one of top places. Another Romanian, *Claudiu Raicu* (University of Bucharest), grabbed one of the First Prizes, while *Octavian Ganea* (Poli Bucharest) missed one by a hair. He and *Dragoş Frăţilă* (University of Bucharest), as well as *Marius Pachiţariu* (Princeton), had to settle for Second Prizes, while others were awarded lesser ones. The best placed girl was *Iris Smit* (University of Amsterdam). In all, there were 250 contestants.

We all want to thank the rectors of Universities, as well as the private sponsors that made the trip to IMC 2007 available to quite a large number of Romanian students. As they say: train tickets – xxx RON; competition fees – xxx RON; the unique experience, opportunity to meet fellow mathematicians and bathe in a melting pot of cultures – priceless!

All that is left is to enjoy the diversity of problems, and elegance and technique of the solutions presented in the sequel!

Day 1, August 6, 2007 (6 problems, 5 hours working time).

Problem 1. *Let f be a polynomial of degree n with integer coefficients, and let $p > n$ be prime. Suppose that $f(k)$ is divisible by p for every integer k. Prove that all coefficients of f are divisible by p.*[1)]

[1)]In the problem submitted, n was 2 and p was 5. (A.N.)

Solution. (XII$^{\text{th}}$ grade) Consider $f(x)$ as a polynomial in $\mathbb{Z}_p[x]$. Then $f(x)$ has p roots, while its degree is less than p. Therefore $f \equiv 0$, so all of its coefficients are divisible by p. ■

Alternative Solutions.[1] **(XI$^{\text{th}}$ grade)** Have $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$. Then $f(k) = pv_k$ for all $k = 0, 1, \ldots, n$ can be seen as a linear system of $n+1$ equations in $n+1$ unknowns (the a_i coefficients). Its determinant is Vandermonde, of value $\Delta = \prod\limits_{0 \le i < j \le n} (j-i)$ coprime with p. It follows that the unknowns are uniquely determined, so their values coïncide with a_i, and so will be divisible by p. □

(X$^{\text{th}}$ grade) We have

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} f(k) \frac{\prod\limits_{i \ne k}(x-i)}{\prod\limits_{i \ne k}(k-i)} = p\frac{f_0(x)}{\Delta},$$

a particular form of Lagrange's interpolation polynomial, therefore the coefficients will be divisible by p. □

(IX$^{\text{th}}$/VIII$^{\text{th}}$ grade) We will prove that, if a polynomial $f(x)$ with integer coefficients, of degree $\deg f = n < p$, is such that p divides $f(x_k)$ for $n+1$ integers x_k, $0 \le k \le n$, from $\{0, 1, \ldots, p-1\}$, then all its coefficients are divisible by p. The proof goes by induction, the case $n = 0$ being trivial.

We have $f(x) = (x - x_n)g(x) + f(x_n)$, where clearly $g(x) \in \mathbb{Z}[x]$, of degree $\deg g = n-1$. Then p divides $f(x_i) - f(x_n) = (x_i - x_n)g(x_i)$, hence $g(x)$ inherits the property, and by induction hypothesis, $g(x) = ph(x)$, and so
$f(x) = p\left((x - x_n)h(x) + \dfrac{f(x_n)}{p}\right)$.

Alternatively, to avoid induction altogether, we can take $f_n \equiv f$, and $f_k(x) = (x - x_k)f_{k-1}(x) + f_k(x_k)$, for $k = n, n-1, \ldots, 1$. Since f_0 will be constant, and p will divide $f_0(x_0)$, the result follows from bottom up. □

Problem 2. *Let $n \ge 2$ be an integer. What are the minimal and maximal possible ranks of an $n \times n$ matrix whose n^2 entries are precisely the integers from 1 to n^2?*

Solution. The rank cannot be less than 2. The row and column crossing at the entry 1 will contain $2n-1$ entries, hence the highest is $M \ge 2n-1$, wlog on the row. The highest entry on the column being $m \ge n$, the 2×2 minor (completed by $x \le n^2$)

$$\begin{bmatrix} 1 & M \\ m & x \end{bmatrix}$$

will have a determinant of absolute value $mM - x \ge n(2n-1) - n^2 = n(n-1) \ne 0$.

The rank can be 2. Take as i^{th} row $(1, 2, \ldots, n) + n(i-1)(1, 1, \ldots, 1)$, therefore all rows lie in the two-dimensional subspace spanned by vectors $(1, 2, \ldots, n)$ and $(1, 1, \ldots, 1)$. Since we have just shown it cannot be less than 2, the rank will be 2.

[1] Given, so that only less and less knowledge is required, by *Dan Schwarz.* (A.N.)

The rank can be as large as n. Use odd numbers on the diagonal, and even numbers above the diagonal; modulo 2 this is a lower triangular matrix of determinant 1, thus odd. Therefore the matrix is nonsingular, whence its rank is n.

■

Alternative Solution.[2)] Take as first row the vector $(1, 2, \ldots, n)$, and as i^{th} row $(i > 1)$ the vector $(1, 2, \ldots, n) + n(\sigma^0(i-1), \sigma^1(i-1), \ldots, \sigma^{n-1}(i-1))$, where σ is the cycle $(n-1, \ldots, 1)$.

After subtracting the first row from all others, then the first column from the last one, the determinant is seen to be $(-1)^{n-1}(n-1)n^{n-1}\prod_{k=0}^{n-2} P(\omega_k)$, where $P(x) = 1 + 2x + \cdots + (n-1)x^{n-2}$, and $\omega_k = e^{2k\pi i/(n-1)}$ (the known formula for a circulant determinant obtained by cyclically permuting row $(1, 2, \ldots, n-1)$). But $P(\omega_0) = P(1) = n(n-1)/2$, while, for $x \neq 1$,

$$P(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1 + x + \cdots + x^{n-1}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x^n - 1}{x - 1}\right) = \frac{(n-1)x^n - nx^{n-1} + 1}{(x-1)^2}$$

hence, for $k > 0$,

$$P(\omega_k) = \frac{(n-1)\omega_k^n - n\omega_k^{n-1} + 1}{(\omega_k - 1)^2} = \frac{(n-1)(\omega_k - 1)}{(\omega_k - 1)^2} = \frac{n-1}{\omega_k - 1}.$$

Alternatively,

$$(\omega_k - 1)P(\omega_k) = (n-1) - \sum_{i=0}^{n-1} \omega_k^i = n - 1.$$

So

$$\prod_{k=0}^{n-2} P(\omega_k) = (-1)^{n-2}(n-1)^{n-2}n/2,$$

and the value of the determinant is $-(n-1)^{n-1}n^n/2$, different from zero, hence the rank is n. □

Problem 3. *Call a polynomial $P(x_1, \ldots, x_k)$ good if there exist 2×2 real matrices $A_1, \ldots, A_k$ such that*

$$P(x_1, \ldots, x_k) = \det\left(\sum_{i=1}^{k} x_i A_i\right).$$

Find all values of k for which all homogeneous polynomials with k variables of degree 2 are good.

Solution. The possible values of k are 1 and 2.

If $k = 1$, then $P(x) = \alpha x^2$ and we can choose

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

[2)]Given during the competition by Romanian contestant *Claudiu Raicu*. Its interest also resides in being related to a solution to Problem 4 of Day 2. (A.N.)

If $k = 2$, then $P(x) = \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma xy$ and we can choose

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

and

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -1 & \gamma \end{pmatrix}.$$

If $k \geq 3$ we will show that $P(x_1, \dots, x_k) = \sum_{i=1}^{k} x_i^2$ is not good. Suppose that it is; since the first columns of the matrices are linearly dependent (there are k of them, more than their dimension, which is 2), there must exist a non-trivial relation. Then the determinant has zero first column, hence its value is 0, while the value of P is non-zero, a contradiction. ■

Problem 4. *Let G be a finite group. For arbitrary sets $U, V, W \subseteq G$, denote by N_{UVW} the number of triples $(x, y, z) \in U \times V \times W$ for which xyz is the unity.*

Suppose that G is partitioned into three nonempty sets A, B and C. Prove that $N_{ABC} = N_{CBA}$.

Solution. (Condensed form.) One gets that $N_{UVG} = |U \times V| = |U| \cdot |V|$ et al. Then one gets the equality $N_{UVW} = N_{VWU} = N_{WUV}$. Finally, for a partition of W into three nonempty sets W_1, W_2 and W_3, one obtains

$$N_{UVW} = N_{UVW_1} + N_{UVW_2} + N_{UVW_3}.$$

Applying these three formulae, the statement follows. ■

Problem 5. *Let n be a positive integer, and $a_1, \dots, a_n$ be arbitrary integers. Suppose that a function $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ satisfies $\sum_{i=1}^{n} f(k + a_i \ell) = 0$ whenever k and ℓ are integers and $\ell \neq 0$. Prove that $f \equiv 0$.*

Solution.[1)] Denote

$$E(k, \ell) := \sum_{i=1}^{n} f(k + a_i \ell).$$

Since $f((k + C\ell) + a_i \ell) = f(k + (a_i + C)\ell)$, we can translate the integers a_i with any integer C, therefore we may assume wlog $0 = a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n = a$. We obviously have

$$E(k, \ell) = \sum_{j=0}^{a} \lambda_j f(k + j\ell) = 0,$$

where $\lambda_j = |\{i \,;\, a_i = j\}|$. Denote

$$R(X) := \sum_{j=0}^{a} \lambda_j X^j,$$

[1)]Given during the competition by Princeton contestant *Andrei Neguţ*. (A.N.)

so

$$R(1) = \sum_{j=0}^{a} \lambda_j = n \neq 0.$$

Define the subset of the polynomial ring $\mathbb{R}[X]$

$$\mathcal{I} := \left\{ P(X) = \sum_{j=0}^{m} b_j X^j \ ; \ \sum_{j=0}^{m} b_j f(k + j\ell) = 0, \ \forall\, k, \ell \in \mathbb{Z}, \ell \neq 0 \right\}.$$

This is clearly a subspace of the real vector space $\mathbb{R}[X]$. Furthermore, $P(X) \in \mathcal{I}$ implies $XP(X) \in \mathcal{I}$, since we can write

$$\sum_{j=0}^{m} b_j f(k + (j+1)\ell) = \sum_{j=0}^{m} b_j f((k+\ell) + j\ell) = 0.$$

Hence $\mathcal{I}$ is a non-zero *ideal*, since $R(X) \in \mathcal{I}$.

Thus $\mathcal{I}$ is generated (as an ideal) by some non-zero polynomial Q (since $\mathbb{R}[X]$ is principal). If Q is monomial, then the definition of $\mathcal{I}$ implies $f \equiv 0$, so we can assume Q has a (complex) zero $c \neq 0$. Again, by definition of $\mathcal{I}$, $Q(X^M) \in \mathcal{I}$ for every positive integer M, since

$$\sum_{j=0}^{m} b_j f(k + (Mj)\ell) = \sum_{j=0}^{m} b_j f(k + j(M\ell)) = 0,$$

hence $Q(X)$ divides $Q(X^M)$. This shows that all numbers $c, c^2, \ldots, c^M, \ldots$ are zeroes of Q. Since Q has only finitely many roots, we must have $c^N = 1$ for some $N \geq 1$; in particular $Q(1) = 0$, which implies $P(1) = 0$ for all $P \in \mathcal{I}$. This contradicts the fact that $R(1) \neq 0$. ■

Alternative Solution.[1)] As before, assume $0 = a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n = a$. Now, if the values of f are known for any contiguous sequence of $2a$ integers, all the others can be calculated from the given relation, so the $\mathbb{Q}$-linear subspace spanned by the values of f in $\mathbb{R}$ is of finite dimension. A canonical projection map π onto $\mathbb{Q}$ is linear in any element of the basis, therefore the function $\pi \text{o} f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ also satisfies the functional equation. (This finite dimension business is not really necessary, as we could use a Hamel basis of $\mathbb{R}$ over $\mathbb{Q}$).

The same observation now entitles us to derive all values of $\pi \text{o} f$ from a finite set of rational numbers, therefore computing a common denominator N for them lets the image of $n!N(\pi \text{o} f)$ to be part of $\mathbb{Z}$, so $n!N(\pi \text{o} f) : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, satisfying the functional equation.

Take now an arbitrary prime $p > n!Nn$. Modulo p, the given relation induces a period of some length t. Taking $\ell = t$, the relation reduces to $n!Nn(\pi \text{o} f)(k) \equiv$ $\equiv 0 \pmod{p}$, therefore p divides $(\pi \text{o} f)(k)$. Since p was taken arbitrary large, this in turn forces $(\pi \text{o} f)(k) = 0$, and as any projection map is zero, so will be f. □

1) Composite from several contributions, and put together by *Dan Schwarz.* (A.N.)

Alternative Solution.[1] For a logical proposition $\mathcal{P}$ we will use the notation $[[\ \mathcal{P}\ ]]$ for a variable that has value 1 if $\mathcal{P}$ is true, and 0 if $\mathcal{P}$ is false. For integer $C > \max\limits_{j=1}^{n} |a_j|$ we have $a_j + C \neq 0$ for any j, so

$$0 = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} f((k - a_1(a_j + C)) + a_i(a_j + C)) \right)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} f((k + C(a_i - a_1)) + a_j(a_i - a_1)) \right) = nf(k) \sum_{i=1}^{n} [[a_i - a_1]]$$

therefore $f(k) = 0$ for all integers k. $\square$

Remark. The ideal $\mathcal{I}$ from the first solution is nothing but the family of all characteristic polynomials associated with some linear recurrence relation, with variable coefficients, derived from the given functional equation. The key feature of substituting X^M for X amounts to just changing the value of ℓ in the given equation.

Some contestants actually went this way, studying (with various degrees of success) the common possible roots of such characteristic polynomials (using the resultant determinant, or some other tools). Using the ideal demonstrates the depth packed in the fact that $\mathbb{R}[X]$ is a principal ring.

Problem 6. *How many non-zero coefficients can a polynomial $P(z) \in \mathbb{C}[z]$ have, if its coefficients have integer moduli, and $|P(z)| \leq 2$ for any complex number z of unit modulus?*[2]

Solution. We will show that the answer is 0, 1 or 2. These values are possible, for example polynomials $P_0(z) = 0$, $P_1(z) = 1$, and $P_2(z) = 1 + z$.

Consider an arbitrary polynomial $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n$, with $a_0 a_n \neq 0$ (otherwise, if $a_0 = 0$, divide it by some power of z). Take

$$P_0(z) = \frac{|a_0|}{a_0} P \left(\left(\frac{a_0}{|a_0|} \frac{|a_n|}{a_n} \right)^{1/n} z \right),$$

of free term $|a_0|$ and leading coefficient $|a_n|$, while all other coefficients still have integer moduli. Obviously P_0 fulfills the conditions, therefore we may wlog assume both a_0 and a_n to be positive integers.

Take $Q(z) = a_1 z + \cdots + a_{n-1} z^{n-1}$; our goal is to show $Q \equiv 0$. Consider $\omega = e^{2\pi i/n}$, a primitive root of order n of the unit. Notice that

$$\sum_{k=0}^{n-1} Q(\omega^k) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} a_i (\omega^k)^i = \sum_{i=1}^{n-1} a_i \sum_{k=0}^{n-1} (\omega^i)^k = 0.$$

Taking the average of polynomial $P(z)$ at the points ω^k we obtain

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P(\omega^k) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (a_0 + Q(\omega^k) + a_n (\omega^k)^n) = a_0 + a_n$$

[1] Given during the competition by Bulgarian contestant *Emil Baronov.* (A.N.)
[2] In the problem submitted, $P(z)$ was given of integer coefficients. (A.N.)

and

$$2 \geq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} |P(\omega^k)| \geq \frac{1}{n}\left|\sum_{k=0}^{n-1} P(\omega^k)\right| = a_0 + a_n \geq 2.$$

This clearly implies $a_0 = a_n = 1$, and $|P(\omega^k)| = |2 + Q(\omega^k)| = 2$ for all k, therefore all values of $Q(\omega^k)$ must lie on the circle $|2 + z| = 2$, while their sum is 0. This is only possible if $Q(\omega^k) = 0$ for all k, but then Q has n roots, while $\deg Q \leq n - 1$, so $Q \equiv 0$ and $P(z) = 1 + z^n$, with only two non-zero coefficients. ■

Remark. From *Parseval*'s formula (integrating $|P(z)|^2 = P(z)\overline{P(z)}$ on the unit circle) it is obtained that

$$\sum_{i=0}^{n} |a_i|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |P(e^{it})|^2 \mathrm{d}t \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 4\mathrm{d}t = 4.$$

Hence there cannot be more than four non-zero coefficients. Even four are too many, as equality above is impossible. For only three monomials, the argument from the solution may be applied in a simplified form.

Let us also notice that when $P(z)$ has exactly two non-zero coefficients, both coefficients are of unit modulus, and the bound in $|P(z)| \leq 2$ is reached, that is $\sup\limits_{|z|=1} |P(z)| = 2$.

Day 2, August 7, 2007 (6 problems, 5 hours working time).

Problem 1. *Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be a continuous function. Suppose that for any $c > 0$, the graph of f can be moved to the graph of cf using only translation(s) and/or rotation(s). Does this imply that $f(x) = ax + b$ for some real numbers a and b?*

Solution. No. The function $f(x) = ae^{bx}$, $a, b \in \mathbb{R}^*$, also has this property, since $c(ae^{bx}) = ae^{b(x+(\ln c)/b)}$, i.e. $cf(x) = f(x + C)$, with $C = (\ln c)/b$, and thus we can superimpose the two graphs by a translation. ■

Remark. The problem proved to be quite taxing, as many competitors did not manage to find an example. Trying to find it by exhibiting some constraints, and solving them, leads to complications. Good guesswork (and some street-smartness in looking for a known basic function, as this was a Problem 1) was rewarded!

Problem 2. *Let x, y and z be integers such that $S = x^4 + y^4 + z^4$ is divisible by 29. Show that S is divisible by 29^4.*

Solution. We claim that 29 then divides all three x, y and z. Assume the contrary, wlog that 29 does not divide x. Since $\mathbb{Z}_{29}$ is a field (29 is a prime), there is some integer w such that $wx \equiv 1 \pmod{29}$. Then $(wx)^4 + (wy)^4 + (wz)^4$ is also divisible by 29, so we can assume $x \equiv 1 \pmod{29}$.

There are only eight bi-quadratic residues modulo 29, listed below

$$\{0, 1, 7, 16, 20, 23, 24, 25\}.$$

We need $y^4 \equiv -1 - z^4 \pmod{29}$, but the reduced residues of $-1 - z^4$ are

$$\{28, 27, 21, 12, 8, 5, 4, 3\},$$

and the two sets have no common elements. ■

Remark. The problem is entirely computational. The trick of reducing to $x \equiv 1 \pmod{29}$ is only needed to simplify the computations, as after obtaining the list of bi-quadratic residues, one can establish a list of all sums of two, and compare it with the original.

Problem 3. *Let C be a nonempty closed bounded subset of the real line, and $f : C \to C$ be a nondecreasing continuous function. Show that there exists a point $p \in C$ such that $f(p) = p$.*[1)]

Solution. C being bounded, inf and sup taken on nonempty subsets of it are finite and, since C is closed, belong to it.

Let $a = \inf\limits_{x \in C} x$ and also let $A = \{x \in C\ ;\ x \leq f(x)\}$. Clearly $a \in A$, hence A is nonempty. Take $p = \sup\limits_{x \in A} x$, so $p \in C$. For every $x \in A$ we have $x \leq p$, hence $x \leq f(x) \leq f(p)$, since f is nondecreasing. This implies $p = \sup\limits_{x \in A} x \leq f(p)$, hence $p \in A$.

But then $f(p) \leq f(f(p))$, so $f(p) \in A$, and so $f(p) \leq \sup\limits_{x \in A} x = p$. Putting both inequalities together, one gets $f(p) = p$. ■

Alternative Solution. Also taking $b = \sup\limits_{x \in C} x \in C$, one can extend f to $\widetilde{f} : [a, b] \to [a, b]$ through $\widetilde{f}(x) = \lambda_x \sup\limits_{x \geq y \in C} f(y) + (1 - \lambda_x) \inf\limits_{x \leq y \in C} f(y)$, where $\lambda_x \in [0, 1]$ is such that $x = \lambda_x \sup\limits_{x \geq y \in C} y + (1 - \lambda_x) \inf\limits_{x \leq y \in C} y$. The function $\widetilde{f}$ is easily seen to be nondecreasing (and, if f continuous, also continuous). The problem is thus reduced to the case when C is an interval, where having continuity available solves the problem, but lacking it presents the same difficulty as the original. □

Problem 4. *Let $n > 1$ be a positive integer, and $A_n = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ be the $n \times n$ matrix where $a_{ij} = 2$ if $i = j$, $a_{ij} = 1$ if $i - j \equiv \pm 2 \pmod{n}$, while $a_{ij} = 0$ otherwise. Find* $\det A_n$.[2)]

Solution. For $n \leq 4$ the values can be computed by hand: $\det A_2 = 4$, $\det A_3 = 4$ and $\det A_4 = 9$. We will then concern ourselves with $n \geq 5$.

Notice that $A_n = B_n^2$, where $B_n = (b_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ is the $n \times n$ matrix where $b_{ij} = 1$ if $i - j \equiv \pm 1 \pmod{n}$, while $b_{ij} = 0$ otherwise. To find $\det B_n$, expand the determinant with respect with the first row, then expand both terms with respect to the first column, to get the formal expression

$$-(\Delta_1 + (-1)^n \Delta_2) - (-1)^n (\Delta_3 - (-1)^n \Delta_4).$$

---

1) The condition f continuous is superfluous; without it, the statement is known as *Knaster*'s theorem. (A.N.)

2) In the problem submitted, n was postulated odd. (A.N.)

When n is odd, the second and third matrices obtained are lower/upper triangular, while in the first and the fourth matrices we have $\mathrm{row}_1 - \mathrm{row}_3 + \cdots \pm \mathrm{row}_{n-2} = \mathbf{0}$, so $\det B_n = -(0-1) + (1-0) = 2$ and thus $\det A_n = 4$.

When n is even, the values of these terms are harder to find, but then the problem was submitted for n odd! We will find the correct value in the alternative solution to follow. ■

Alternative Solution.[1] For $n \geq 5$, the matrix A_n is circulant, therefore its determinant is $\det A_n = \prod_{k=0}^{n-1} P(\omega_k)$, where $P(x) = 1 + 2x^2 + x^4 = (1+x^2)^2$, and $\omega_k = e^{2k\pi i/n}$ (the known formula for a circulant determinant obtained by cyclically permuting row $(1,0,2,0,1,0,\ldots,0)$).

(As a matter of fact, this formula itself suggests that $A_n = B_n^2$, where B_n is also circulant, obtained by cyclically permuting row $(1,0,1,0,\ldots,0)$).

Since ω_k are the roots of the polynomial $Q_n(x) = x^n - 1$, it follows that $\prod_{k=0}^{n-1}(1+\omega_k^2) = \prod_{k=0}^{n-1}(i-\omega_k)\prod_{k=0}^{n-1}(-i-\omega_k) = Q_n(i)Q_n(-i) = (i^n-1)((-i)^n-1)$ (in these computations $i = \sqrt{-1}$).

For n odd, it amounts to $(-1)^n(i^n-1)(i^n+1) = (-1)^n(i^{2n}-1) = 2$, hence $\det A_n = 4$.

For n even, it amounts to $(-1)^n(i^n-1)^2$, which is 0 when $n \equiv 0 \pmod 4$, and 4 when $n \equiv 2 \pmod 4$, therefore $\det A_n = 0$ for $n \equiv 0 \pmod 4$, while $\det A_n = 16$ for $n \equiv 2 \pmod 4$. □

Problem 5. *For positive integers $k \geq 1$ and $m \geq 2$, find the least number $n(k,m)$ for which there exist real $n(k,m) \times n(k,m)$ matrices $A_1, \ldots, A_k$ such that all three of the following conditions hold*:

- $A_i^m = \mathbf{0}$ *for all* $1 \leq i \leq k$,
- $A_iA_j = A_jA_i$ *for all* $1 \leq i,j \leq k$, *and*
- $(A_1 \cdots A_i \cdots A_k)^{m-1} \neq \mathbf{0}$.[2]

Solution. Since $(A_1 \cdots A_i \cdots A_k)^{m-1} \neq \mathbf{0}$, there must exist a vector $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ such that $(A_1 \cdots A_i \cdots A_k)^{m-1}\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. The more then

$$\mathbf{v}_{(p_1,\ldots,p_i,\ldots,p_k)} := (A_1^{p_1} \cdots A_i^{p_i} \cdots A_k^{p_k})\mathbf{v} \neq \mathbf{0},$$

for all $0 \leq p_i \leq m-1$. For consistency, we also use the notation $\mathbf{v}_{(0,\ldots,0,\ldots,0)} := \mathbf{v}$. Let us show that these m^k vectors are linearly independent, therefore the dimension $n(k,m)$ is at least m^k. Assume the contrary, and consider a non-trivial relation

$$\sum_{j=1}^{N} \lambda_j \mathbf{v}_{S_j} = \mathbf{0}$$

of least number N of terms, where $S_j = (p_{1j}, \ldots, p_{ij}, \ldots, p_{kj})$, with $0 \leq p_{ij} \leq m-1$.

[1] Given (with omissions) during the competition by Princeton contestant *Simion Filip* (see related issues at Problem 2 of Day 1). (A.N.)

[2] In the problem submitted, m was 2. (A. N.)

There must exist an index i such that $\max\limits_{j=1}^{N} p_{ij} > \min\limits_{j=1}^{N} p_{ij}$, otherwise N is 1, absurd. Take $p = m - \max\limits_{j=1}^{N} p_{ij}$ and apply A_i^p to the relation; at least one term will vanish, and at least one term will not. We obtain therefore a relation with less than N number of terms, contradiction.

This also offers a way to build a model for $n(k,m) = m^k$. Consider m^k vectors forming a basis, and index them with k-tuples $(p_1, \dots, p_i, \dots, p_k)$, with $0 \le p_i \le m-1$. Define $A_i \mathbf{v}_{(p_1,\dots,p_i,\dots,p_k)} = \mathbf{0}$ if $p_i = m-1$, and $A_i \mathbf{v}_{(p_1,\dots,p_i,\dots,p_k)} = \mathbf{v}_{(p_1,\dots,p_i+1,\dots,p_k)}$ if $0 \le p_i > m-1$. It is readily checked that all three conditions hold. ■

Alternative Solution.[1] Since A_k is nilpotent of order m, the dimension of the image $\Im(A_k^{m-1})$ is at most $\lfloor n(k,m)/m \rfloor$. Then $n(k,m) \ge m^k$ follows by induction on k. Consider the linear operators λ_i associated with matrices A_i. The matrices B_i $(i > k)$ associated with the linear operators $\pi_k \mathrm{o} \lambda_i \mathrm{o} \iota_k$ verify all three conditions (ι_k is the canonical injection from $\Im(\lambda_k^{m-1})$ into the full space, while π_k is the canonical projection from the full space onto $\Im(\lambda_k^{m-1})$). This reduces the situation to the identical one for $k-1$. □

Alternative Solution.[2] The model is that of the real vector space made of all polynomials P in k variables x_i, with degree in each variable at most $m-1$. Partial differentiation with respect to x_i is a linear operator, which will be denoted A_i, thus $A_i P := \dfrac{\partial P}{\partial x_i}$. Again, it is readily checked that all three conditions hold: A_i^m makes all polynomials vanish, A_i and A_j obviously commute, and $(A_1 \dots A_k)^{m-1} x_1^{m-1} \dots x_k^{m-1} = ((m-1)!)^k \neq 0$. □

Problem 6. *Let $f \not\equiv 0$ be a polynomial with real coefficients. Define the sequence $f_0, f_1, \dots, f_n, \dots$ of polynomials by $f_0 = f$ and $f_{n+1} = f_n + f_n'$ for every $n \ge 0$. Prove that there exists a number N such that, for every $n \ge N$, all roots of f_n are real.*

Solution.[3] The proof is extremely technical. One can definitely prove the case $\deg f = 2$ (as the cases for degree 0 and 1 are trivial). Also, noticing that $(e^x f_n(x))' = e^x f_n(x) + e^x f_n'(x) = e^x f_{n+1}(x)$ sheds some light on the phenomenon.

We will refrain in this presentation from reproducing the (very) difficult official solution.

Liceul Internaţional de Informatică,
Bucureşti

[1] Given during the competition by Princeton contestant *Simion Filip*. (A.N.)
[2] Given during the competition by Brazilian contestant Fábio Moreira. (A.N.)
[3] Nobody managed to tackle this during the competition (only very few scores of 1, 2 or 3 points out of 20 were recorded). (A.N.)

PUNCTE DE VEDERE

Starea actuală a învăţământului superior românesc

de Laurenţiu Modan

Abstract

In our work „Actual Estate of the Romanian University Education", we propose realising a study based on a careful analysis of the teaching and learning present system, from our country society. For this, our starting point is the precarious Mathematics education in the contemporary Romania, and equally, the searching since 2005, about Bologna Program, of the French professor in Amiens University, respectively, *Bernard Kalaora*.

Key words: teaching Romanian system, learning Romanian system, Mathematics education.

M.S.C.: 01A85, 01A99.

1. Tradiţia universitară românească

Începuturile normalităţii culturale ale unei naţii coincid, în general, cu momentul apariţiei primei sale universităţi. Cu cât întemeierile şcolilor academice au fost mai timpurii în istoria unei ţări, cu atât mai prolifice vor fi câştigurile naţiei respective, care, prin răbdare, a beneficiat de o îndelungă perioadă de căutare, de cizelare şi de aşezare a unor fapte, cărora numai trecerea vremii le asigură şlefuirea spre giuvaer! Este cazul unor culturi solide ca ale Franţei, Italiei, şi Germaniei, care, în fond, şi-au pus amprenta pe dezvoltarea ulterioară a umanităţii.

La noi, în ciuda existenţei unor instituţii superioare de educare, ceva mai vechi, ca Academia Mihăileană din Iaşi, Şcoala de la Sfântul Sava, din Bucureşti, şi Colegiul Piariştilor din Cluj, nu putem emite pretenţia de a le numi universităţi! Primele lăcaşe academice româneşti, în adevăratul sens al cuvântului, apar târziu, în 1860, la Iaşi şi respectiv în 1864, la Bucureşti, prin întemeierea celor două prime universităţi, în urma hrisoavelor semnate de *Al. I. Cuza*, domnul Unirii (v. [3]). Acestora, din 1872, li se adaugă şi universitatea din Cluj.

Primii doctori români, mai ales cei şcoliţi la Paris şi Roma, indiferent de domeniu, s-au întors în majoritate, cu mult entuziasm, în ţară, deci şi să contribuie la punerea temeliilor ştiinţei şi ale culturii naţionale. Cu toţii erau călăuziţi de formularea magică, potrivit căreia „cum arată astăzi şcoala, aşa va arăta mâine ţara", din spusele lui *Spiru Haret*, primul doctor român în Matematici, care, renunţând la o strălucită carieră universitară la Paris, a revenit în ţară, pentru a deveni în timp „omul şcolii" sau „marele ministru", după cum îl va evoca, deseori, Nicolae Iorga (v.[3]). Munca temeinică şi serioasă, a pionierilor învăţământului universitar românesc, a început să dea roade în primii ani ai secolului al XX-lea... Iar între cele două războaie mondiale, truda lor a izbutit chiar să impună universităţile româneşti! Cultivarea sentimentului pentru lucrul bine făcut, transmis de maeştri în sufletele discipolilor, a reuşit să reziste şi peste timpurile tulburi ce au venit după impunerea forţată a ideologiei sovietice, când, aproape o generaţie întreagă, de profesori universitari, a fost distrusă în închisorile comuniste... Şi ne-am bucurat constatând că nu se pierduse totul şi că seminţele bine sădite de către aceşti întemeietori de drumuri, în ştiinţă şi cultură, au reuşit să reziste, şi germinând, să contribuie la... continuitatea firescului! Şi, deşi mai rar ca în perioada de glorie naţională, respectiv aceea a României Mari, s-au pus iarăşi cărămizi solide pentru spiritualitatea naţiei, chiar şi în vremurile bântuite de sărăcia ideologiei proletare a egalitarismului...

De altfel, trebuie să subliniem că întreaga perioadă comunistă, dintre 1947 şi 1989, a fost constituită dintr-o alternanţă de etape mai luminoase, cu altele foarte întunecoase, datorate luptei dintre vechii universitari, cu o formaţie solidă de specialitate şi cu o vastă cultură, realizate după modelul Europei vestice, dar şi între cei noi, reîntorşi de la studii, mai mult sau mai puţin coerente, făcute în Rusia sovietică, şi impuşi apoi de puterea proletară, susţinută de Moscova. Într-o bună parte a sa, deceniul al 7-lea al veacului trecut s-a bucurat de prestigiul unor personalităţi ce au profesat în învăţământul nostru superior, şi care în ciuda unor compromisuri făcute cu regimul, i-au impus totuşi un standard şi o calitate de nivel internaţional. Pentru Matematică, trebuie să amintim că în această perioadă istorică, România avea realizări ce erau imediat citate după cele ale ruşilor şi polonezilor, la vremea aceea, forţe de necontestat ale domeniului.

Calitatea morală, cel mai adesea îndoielnică a persoanelor formate în fosta Uniune Sovietică şi promovate apoi în universităţi, alături de intrarea în viaţa activă şi impunerea în lumea academică, de către partidul unic, a unor „produse“ ale discriminatoarei reforme a învăţământului din 1948, care susţinea doar non-valoarea, totul cumulat şi cu dispariţia naturală a ultimilor mari foşti profesori, formaţi între cele două războaie mondiale, au dus treptat, la o adevărată sărăcire spirituală a învăţământului superior românesc! Astfel, cu un număr dominant de pseudo-specialişti formatori, pentru care politicul făcea regula, în majoritatea universităţilor predecembriste dispăruse respectul faţă de morala creştină, faţă de valoare în general, şi faţă de viitorul naţiei, în special! Iar acestea funcţionau după un compromis tacit, susţinut de programe deseori neadecvate, însoţite de o exigenţă în continuă scădere, conducând în general, spre lipsa unei perspective reale a învăţământului universitar din ultimii ani, ai deceniului al 8-lea, din secolul deja apus...

2. Perioada universitară postdecembristă

Primăvara adusă în sufletele românilor, de către însoritul decembrie 1989, nu a atras după sine şi normalitatea atât de necesară, în viaţa academică şi ştiinţifică a ţării! După rezolvarea intereselor carieriste ale marii majorităţi a unor modeşti învăţăcei universitari, care au devenit apoi, cale de câţiva ani, adevăraţi globe-trotteri, erijaţi în... somităţi academice, fără operă de bază, şi care, fără nici o pricepere şi cu o capacitate limitată de a discerne alegerea utilului pentru instituţia ce o reprezentau, au încercat copierea a tot felul de modele: american, anglo-saxon, austriac, franţuzesc, italian, scandinav... Relativ repede, a apărut o bulversare totală a sistemului universitar românesc, în care s-au născut înainte de vreme, specialităţi noi, dar fără a avea mai întâi, dascălii necesari, în care s-au înfiinţat universităţi noi, în oraşe unde nici licee cu tradiţie nu existau, sau chiar în localităţi unde cei cu studii superioare abia se numărau în câteva duzini... Şi culmea ridicolului, în ţara în care până-n 1989, numărul inginerilor neştiutori de meserie, era de 4 ori mai mare ca al maiştrilor, în ţara cu o suprafaţă medie, dar cu puţini locuitori, s-a decretat...

nevoia acută de „specialişti", scoşi pe banda rulantă a „învăţământului la distanţă", sau a unor universităţi particulare, toate fiind în cea mai mare măsură, doar nişte... cooperative, unde contra bani, s-au eliberat diplome, cu titluri ce confereau drepturi nelegale. Nimeni nu a vrut să priceapă vreodată, sau cu atât mai mult, să încerce să conştientizeze, că România nu-i Canada, şi nici măcar Australia, pentru a-şi dezvolta fără noimă, un sistem educativ nul, de învăţământ la distanţă, în condiţiile în care, în România actuală, nu există nici pe departe, conştiinţa civică a celor două ţări menţionate anterior! În plus, acestea impun învăţământului lor la distanţă, o seriozitate triplă decât cea întâlnită la cursurile de zi ale majorităţii universităţilor noastre de stat... Vom mai aminti aici, că în Canada, prin forma „la distanţă", nu pot fi urmate decât studii scurte, de 3 ani, care pregătesc doar specialişti de execuţie, plătiţi cu cel mult 34.000 $ CAD pe an. În cea mai întinsă provincie canadiană, în Québec, mare cât jumătate din Europa, învăţământul la distanţă e autorizat doar într-o singură universitate, care nu se ocupă decât de buna funcţionare a acestei forme!

Lipsa conştiinţei civice româneşti rezultă şi din faptul că la autorizarea sau acreditarea unei puzderii de noi universităţi de stat, sau particulare, nu contează decât interesul meschin al unor semidocţi, care s-au dorit... împăunaţi cu titluri universitare. Desigur, tot lipsa simţului realităţii nu a îndemnat pe nici un diriguitor politic sau administrativ actual, să privească în mod conştient realitatea europeană, care ne arată că în privinţa învăţământului laic privat există, în fond, o unică universitate particulară foarte veche, elitistă, de tradiţie, cu o seriozitate şi cu un renume de marcă în lume, respectiv Universitatea Liberă din Bruxelles. Acesteia i se mai adaugă cel mult alte două instituţii europene catolice private, cu nume rezonant în lumea academică, ele fiind situate la Louvain în Belgia şi la Genéve în Elveţia. În România postrevoluţionară, lipsa conştiinţei civice a făcut ca în decursul ultimilor 16 ani, să apară armate întregi de posesori ai diplomelor fără acoperire, în marea majoritate, jurişti şi economişti, care induc inflaţie pe piaţa forţei de muncă, contribuind în fond, prin lipsa educaţiei lor profesionale, la scăderea agravantă a nivelului cultural al naţiei! Atenţionăm aici, pe cei în drept, că în România anului 2007, în conformitate cu principiul Timberger-Bos, aplicat mărimii ţării şi numărului său de locuitori, în perioada actuală, sunt necesare cel mult 18 universităţi de stat şi particulare (v. [1]) şi nu 137, câte funcţionează acum! În plus, acestea trebuie să fie universităţi adevărate, cu un sistem de educaţie care să respecte tradiţia de aproape un secol şi jumătate a mediului academic naţional, ce a contribuit la formarea câtorva valori de marcă în cultură şi în ştiinţă, astăzi, unanim recunoscute pe plan mondial! Prin urmare, ne trebuie universităţi puternice şi cu coloană vertebrală, care să aibă demnitatea renunţării la plafonarea impusă de Programul Bologna, program care prin egalitarismul comunitar, introdus de o criză a sistemului european de valori, nu face decât să decapiteze unele şcoli naţionale, bazate pe un sistem elitist, care, şi în România, a funcţionat aproape perfect până în jurul anilor 1997-1998. Sistemul elitist a existat la noi din totdeauna, prin tradiţia învăţământului superior românesc, unde doar o parte redusă dintre bacalaureaţi, şi aleasă prin concurs riguros, câştiga dreptul de înmatriculare ca student. Aceasta este urmarea firească a unui fapt rezultat chiar prin selecţia naturală, potrivit căreia, nu toţi indivizii unei naţii pot fi absolvenţii studiilor universitare! Iar la aspectul de faţă, trebuie să reflectăm cu atât mai mult, cu cât nici măcar comunismul, în ciuda egalitarismului său proletar, nu a gândit vreodată, ca aproape toţi cetăţenii săi să posede diplome universitare! Nu trebuie să uităm apoi, că umplerea totală a timpului unor tineri fără capacităţi intelectuale, cu aşa-zise studii superioare contra taxă, nu duce decât la lipsirea societăţii de forţa calificată, de muncă, ce n-o mai are, şi pe care trebuie s-o găsească în alte spaţii decât cel naţional!

3. Ineficienţa programului Bologna

În continuare, vom căuta să analizăm prin prisma contextului deja prezentat, diminuarea drastică a calităţii învăţământului românesc, rezultată şi ca urmare a scăderii nivelului şcolii matematice naţionale. Iar aceasta din urmă se va afla într-un declin şi mai accentuat decât ceea ce s-a petrecut în ultimii 10 ani, din cauza acceptării Programului Bologna (v. [2], [5] şi [6]). Relativ la Programul anterior, subliniem că universităţile europene cu tradiţie de secole, au criticat în mod deschis şi nu au subscris la sistemul egalitarist 3/2/3, cunoscut şi sub forma licenţă/masterat/doctorat (L/M/D). Este în primul rând, cazul Şcolilor de Înalte Studii din Franţa, în care intră: L'École Normale Supérieure, La Haute École Comerciale, l'École Nationale d'Administration, precum şi puternicul lanţ format din Les Écoles d'Ingénieurs. Acestora li s-au adăugat şi prestigioasele Şcoli Politehnice din Torino şi Milano (Italia), Zürich şi Lausanne (Elveţia), precum şi la fel de recunoscutele universităţi Charles din Praga şi Th. Masarik din Brno (Cehia). Sunt frumoase exemple, care ne demonstrează că tradiţia trebuie respectată, indiferent de curentele efemere, nefundamentate logic, deoarece în mod firesc, ating omenirea la un moment dat...

O critică bine motivată, a sistemului L/M/D, a fost prezentată încă din 2005, de Bernard Kalaora, profesor de sociologie la Universitatea Jules Verne din Amiens (Franţa) şi cercetător CNRS în Laboratorul de antropologie socială (v.[2]). În viziunea sa, Programul Bologna este o modalitate de „deformare a realităţii... întreţinând doar iluzia succesului la înfruntarea concurenţei“, fiind în fond „aşa-zisa schimbare în stabilitatea perfectă“. Foarte departe de o adevărată analiză şi organizare a educaţiei şi cercetării universitare, a selectării obiective a studenţilor, „departe de a crea pentru ei legături cu mediile economice şi industriale de stat, sau private, departe de a contribui la mobilitatea cadrelor didactice şi a studenţilor pentru formarea unor poli europeni pe discipline, sistemul L/M/D nu a reuşit decât o copiere a unor fapte deja caduce“. Mult invocata pluridisciplinaritate a fost redusă doar „la regrupararea unor discipline deja existente, fără a se evalua valoarea lor cognitivă“, decretându-se importantă doar "„curricula“, în fond „aceeaşi haină, puţin rearanjată după noile reglementări europene, în ciuda unui conţinut veritabil de transdisciplinaritate şi mobilitate a cunoştinţelor“. Practic, în Franţa, observa *B. Kalaora*, sistemul L/M/D nu face decât să certifice „mai multă birocraţie, formalism al gestiunii administrative şi procedurale, protocoale în plus, întăreşte nomenclatura universitară, vizând doar o uniformizare a administraţiei, prin folosirea unor coduri comune... bazate pe o constrângere mai eficace, susţinută printr-un alt sistem informatic“. Totul este împins spre o „exagerată gestiune birocratică“, care generează presiuni şi o permanentă neîncredere între participanţii din sistem, „exacerbând în final, tensiunea luptei pentru putere, în tabăra formatorilor“. Practic, după

B. Kalaora, „universitatea nu mai este o scenă a învăţământului şi a transmiterii cunoştiinţelor, ci o maşină birocratică ce funcţionează în neant,... distrugând creativitatea, imaginaţia şi fiind exact reversul maşinăriei gândite de Deleuze". Cadrele didactice, despersonalizate de sistemul egalitarist L/M/D, devin „simple curele de transmisie", folosite de „şefi, a căror unică misiune rămâne punerea în practică a cerinţelor ministerelor de resort, sperând mereu doar în buna lor evaluare spre noi promovări", căci aceasta depinde în cea mai mare măsură, „nu de calitatea profesională, ci de executarea rapidă şi fără discuţie, a unor noi ordine". Într-un astfel de context, B. Kalaora conchide că reforma pretinsă de L/M/D nu rămâne decât „un simulacru, în care beneficiarii nu sunt nicidecum studenţii, ci apărătorii birocraţiei, ce aspiră la calitatea de şefuleţi locali (decani, rectori, coordonatori de departamente)". În viziunea sa, Programul Bologna este unul „lipsit de calitate şi mai ales de conţinut, care doreşte doar să creeze imaginea culturii pentru toţi". Singurele „câştiguri", dar în sens negativ, se reduc la „scăderea calităţii examinării studenţilor, la creşterea numărului sesiunilor de examinare, precum şi la apariţia unor examene la pseudo-discipline", fapte extraordinar de reale pentru actuala societate universitară românească! *B. Kalaora* mai constată cu amărăciune, în studiul său, că în Franţa, culmea „câştigului negativ" constă în creşterea fără măsură a „celor ce se aleg, **fără acoperire**, cu o diplomă de 3 ani, numită acum **licence**, în locul aceleia mai utile, de 2 ani, şi care se numea **deug**". Iar totul se desfăşoară „numai în favoarea scăderii drastice a calităţii lucrurilor învăţate în timpul celor 3 ani, net inferioare celor ce se studiau înainte, în 2 ani". Sociologul *B. Kalaora* mai observă că pretenţiile noilor deţinători ai diplomelor fără acoperire, „cresc simţitor, devenind chiar deranjante, când vin din partea reprezentanţilor mediilor defavorizate, care reclamă apoi, un nou statut profesional şi social, şi care, paradoxal, nu au acces la el, tocmai prin nivelul precar al cunoştinţelor însuşite". În opinia sa, cel mai trist este faptul că „marea majoritate a cadrelor didactice devine complicea stării birocratice", pierzându-se în fond menirea dascălului. Asupra sistemului de la Bologna, care se îndreaptă „spre nivelul 0 al pregătirii universitare", **B. Kalaora** concluzionează că „regresia efectivă a învăţământului superior devine generalizată, iar acesta tinde spre o infantilizare a sa". Mult trâmbiţata europenizare universitară se rezumă în final, „doar la un număr redus de mobilităţi, prin care foarte puţini studenţi vor urma unii ani de studii în alte ţări, numărul în cauză fiind insignifiant, de vreme ce nu există nici o obligaţie curriculară efectivă în privinţa standardului de cunoaştere a limbilor străine". În finalul studiului său, *B. Kalaora* conchide că „L/M/D nu rămâne decât o simplă maimuţăreală, o înşelătorie şi o ipocrizie", iar dacă am parafraza în spirit românesc, am zice că Programul Bologna este „un furt al propriei căciuli". Previziunea sociologului francez este chiar sumbră, pentru el „prăbuşirea totală a sistemului universitar fiind foarte aproape", de vreme ce „câştigătorii globalizării învăţământlui superior sunt doar funcţionarii „apparatchiks", care în ciuda apartenenţei lor la mediul academic elevat, sunt mai degrabă ca mecanismul de bază al vechilor sisteme comuniste".

4. Consecinţele programului Bologna în spaţiul românesc

Vom întări în cele ce urmează, pertinenţa articolului cercetătorului şi profesorului *B. Kalaora*, făcând referiri la spaţiul academic românesc, unde sistemul L/M/D nu duce decât la scăderea nivelului universitar, în cel mai fericit caz, către unul de şcoală postliceală a anilor 1970-1980... Iar premisa descreşterii continue, a calităţii învăţământului nostru superior, este întărită de proiectul legii acestuia, în care ministerul de resort prevede ca nota de absolvire a **licenţei** şi a **masteratului** să fie 5, când prin tradiţie ea trebuia să fie 6, respectiv 7. Aceste bareme ne reamintesc faptul că, dacă în era comunistă cea mai dură, a anilor 1978-1988, partidul stat îşi dorea ca toţi românii să fie bacalaureaţi, astăzi, din lipsa de conştiinţă civică a guvernanţilor şi legiuitorilor actuali, s-ar vrea ca fiecare „locuitor al ţării“ să se... împăuneze cu un titlu! Desigur, unul chiar fără minimă acoperire, dacă avem în vedere că discipline absolut puerile umplu "curricula", în timp ce acelea, care pun bazele logicii şi ale meseriei ulterioare, lipsesc aproape cu desăvârşire!

Ca matematician, trebuie să constat discreditarea Ştiinţei Regină, mai ales începând cu anii 1997-1998, de când însăşi gândirea logică este permanent discreditată, fiind ameninţată astfel, dezvoltarea firească a naţiei! Căci într-o ţară în care chiar ministerul educaţiei scoate din programa şcolară studiul Geometriei în plan şi-n spaţiu, la aproape toate vârstele, nu mai există nici o îndoială asupra dorinţei de anihilare a logicii generaţiilor viitoare şi a reducerii naţiei, doar la o stare vegetală ([4])...

Când sub oblăduirea ministerului de resort, se ajunge ca în România actuală, la facultăţile economice, în perioada celor 3 ani alocaţi licenţei, Matematicii să-i fie acordat doar un curs de un semestru, cu 28 de ore, înseamnă că în mod evident, s-a revenit la gândirea şabloanelor bolnăvicioase ale anilor 1950-1960, când se afirma convingător, că..., "unui contabil nu-i trebuie mai mult decât cele 4 operaţii". Trist, dar mai ales jenant, este să constatăm că absolvenţii facultăţilor economice în limbi străine, veniţi din alte ţări, nu vor obţine echivalarea europeană a licenţei lor, tocmai ca urmare a numărului mult prea redus, de credite transferabile, rezultate din diminuarea timpului destinat studiului Matematicii, drastic minimalizat, ca într-un liceu de mâna a doua! Vom observa cu plăcere, că există totuşi, unele universităţi particulare, ca aceea ce poartă numele lui *Spiru Haret*, şi care au înţeles că o diplomă de economist, pentru a fi recunoscută european, necesită un minimum de un an, alocat studiului Matematicii.

O situaţie gravă o întâlnim şi-n facultăţile tehnice, căci şi aici, numărul orelor de studiu al Matematicii s-a diminuat alarmant, ajungându-se în majoritatea cazurilor, la alocarea a cel mult două semestre, cu o mixtură de Calcul diferenţial şi integral, Algebră liniară, Geometrie analitică în spaţiu, Ecuaţii diferenţiale, Probabilităţi, Calcul variaţional etc., toate la un loc, îngrămădite într-un timp scurt, nepermiţând studenţilor o decantare a cunoştinţelor dobândite, şi absolut necesare în activitatea unui viitor inginer al secolului al XXI-lea...

Situaţia nu este cu nimic mai bună, nici în facultăţile de Matematică şi Informatică! Scăderea generală a interesului tinerilor pentru Matematica fundamentală, precum şi diminuarea accentuată a numărului de studenţi la această specializare, se constată deja în calitatea profesională mediocră a majorităţii debutanţilor, angajaţi în şcoli, sau chiar în licee... Interesul pentru Informatică aduce un număr mare de studenţi la această secţie, unde desigur, dorinţa cunoaşterii faptelor Matematicii efective, este vădit diminuată. Orgoliile unor profesori, deja depăşiţi de timpul în care trăim, au dus la apariţia unor programe analitice, astăzi numite pompos "curriculare", neadecvate însă, nici pentru secţiile de Matematică, nici pentru cele de

Informatică! Astfel, s-au alocat numeroase ore, unor subdiscipline fără viitor, deşi altele, situate în topul actual, sunt reduse la 0! Vom consemna aici, că un student la Informatică, fără o solidă bază matematică, nu va putea utiliza eficient, nici Maple, nici Matlab, iar lipsa unor discipline moderne de tehnologia programării, din formarea sa, nu-l va putea face competitiv! Desigur că şi lipsa unor cursuri de Algebră, Analiză sau Geometrie computaţională, din programa secţiei de Matematică, ulterior, nu le va mai permite absolvenţilor, o facilă reconversie profesională!...

5. Situaţia academică a corpului profesoral

Absolut inegală este situaţia profesorilor şi a conferenţiarilor din cele 62 universităţi de stat şi cele 75 particulare, acreditate sau doar autorizate! Există astfel în România, specialităţi pentru care s-au făcut numiri de profesori universitari, fără ca aceştia să îndeplinească unele cerinţe minime de lectori, pentru alte discipline... Chiar în cadrul aceleiaşi discipline, sistemul relaţional a adus confirmări pe posturi, pentru persoane care au realizări profesionale nule, în timp ce altele merituoase sunt blocate în poziţii inferioare! Există astăzi, o mulţime... numărabilă de profesori universitari ce n-au măcar un articol publicat într-o limbă străină!... Actualul sistem românesc de promovare universitară, inegal şi neunitar, încurajează prin relaţiile mafiotice ale unor „comitete şi comiţii“, impostura, creând, în general, un lanţ al ... rezolvării intereselor politice, sau administrative, ale timpului ce-l trăim... Prin acest lanţ, se interzice în fond, abilitarea drept conducător de doctorate, a unor adevărate valori, ţinute vreme îndelungată, în umbra unor nulităţi, care după 1990, au reuşit să ţeasă adevărate clanuri de interese! Şi este ruşinos dar şi trist, în acelaşi timp, că există conducători de doctorate, care nu au nici un articol în domeniul numirii lor, ei fiind doar modeşti autori de studii fără valoare, sau de colaje scoase din diferite cărţi, şi numite apoi pompos ... „monografii“.

6. Epilog

Ne place să credem, că toţi aceia ce au puterea de a discerne asupra stării actuale a învăţământului românesc, şi mai ales a celui universitar, vor acţiona unitar, încercând o ieşire rapidă şi rezonabilă din marasmul ce ameninţă efectiv, viitorul naţiei! Pentru că un popor fără educaţie şi care nu cultivă logica Matematică, devine un popor vegetal... Susţinem, cu tărie, revenirea la matricea sistemului tradiţional al învăţământului românesc, clădită de *Spiru Haret* la sfârşitul veacului al XIX-lea, ceea ce ar însemna nu numai intrarea în normalitate, dar şi revenirea la ceea ce a asigurat renumele unor domenii recunoscute în lumea întreagă. Reevaluarea modului de admitere în licee şi facultăţi, care să permită tinerilor din elită, formarea lor ca specialişti, în ţara natală, impunerea şcolii noastre doctorale prin profundă seriozitate, respectarea criteriilor de valoare în promovarea specialiştilor, alocarea de fonduri adecvate care să statueze profesorul-cercetător, ca entitate de bază a sistemului universitar românesc, toate cumulate şi cu înlăturarea definitivă din lumea academică, a tuturor reprezentanţilor reminiscenţelor politice trecute şi actuale, ce şi-au urmărit doar interesele, precum şi neacceptarea modelelor din afară, ce n-au nimic în comun cu realitatea istoriei noastre, ne vor permite în timp, o reabilitare intelectuală adevărată, a naţiei!

Bibliografie

[1] F. C. Gheorghe, *Învăţământul românesc sufocat de universităţile tarabă*, Cugetarea Europeană, an III, nr. 1(13) 2006, Bucureşti.

[2] B. Kalaora, *Université : l'échec programmé d'une reforme*, Le Monde, 17 februarie 2005, Paris.

[3] L. Modan, *Spiru Haret, reper al spiritualităţii româneşti*, Gazeta Matematică, seria Metodică, vol. 68, nr. 2, 2001, pg. 113-118.

[4] L. Modan, *Asupra stării matematicii în învăţământul universitar economic din România*, Proc. Colocviului Naţional de Fizică, septembrie 2003, Ed. Credis, pg. 84-87, Bucureşti.

[5] L. Modan, *Învăţământul matematic românesc în context european*, Cugetarea Europeană, an IV, nr. 3 (16),2007, Bucureşti.

[6] C. Niculescu, *Ştiinţă fără Matematică* ?, Gazeta Matematică, seria Metodică, vol. 72, nr. 3 (2005), pg. 258-260. Bucureşti.

Facultatea de Matematică-Informatică
Universitatea Spiru Haret, str. Ion Ghica, nr. 13
Bucureşti
modan_laurent@yahoo.fr

NOTE MATEMATICE

Behind an elementary problem of geometry

BY WLADIMIR G. BOSKOFF

Abstract

In this very short note the author describes the problem of geodesics for Platonic solids.

Key words: Platonic solids, metric, geodesic
M.S.C.: 52B05, 51K05, 53A05

It is well known the „Spider and Fly" problem. A hungry spider climbing on a wall of a cubical room sees a fly land on the opposite wall. What is the shortest path from the spider to the fly? The solution involves that the cube may be laid flat on a plane. The spider and the fly seen as points are connected by a line which is the shortest path in the plane. Folding up the cube, the image of this line is the shortest path on the cube. What is behind this problem? In this note we show that the metric induced by two adjacent sides of a polyhedron depends on the dihedral angle of the faces of the polyhedron. This means that regular polyhedra, that is Platonic solids, admit a global metric. The geodesics corresponding to this metric are related to the solution of the „Spider and Fly" problem extended to Platonic solids.

To establish our context, consider Figure 1. We choose a rectangular three-dimensional frame such that the x-axis lies on the edge between the faces F_i and F_j of the regular polyhedron P. Suppose O, the origin of this frame, is an arbitrary point on the edge. We assume that the face F_i lies in the $xy-$plane. Denote by

$(\pi - \alpha)$ the angle between the two faces of the regular polyhedron and let M be a point lying on the face F_j. Denoting by x and $-y$ the first two coordinates of M, we obtain $-y \tan \alpha$ as the third coordinate.

Consider the point $\overline{M}$ corresponding to M when we lay flat the given polyhedron on the $xy-$plane. Then $\overline{M}$ has the coordinates $\left(x, -\dfrac{y}{\cos \alpha}, 0\right)$. For a point in a neighborhood of M we have the coordinates
$(x + dx, -(y + dy), -(y + dy) \tan \alpha)$. This point corresponds after laying flat the face on the $xy-$plane to the point $\overline{M} + d\overline{M}$ of coordinates $\left(x + dx, -\dfrac{y + dy}{\cos \alpha}, 0\right)$. The metric corresponding to the pair of points $\overline{M}$ and $\overline{M} + d\overline{M}$ is

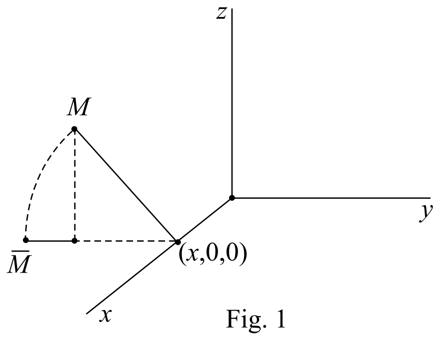


Fig. 1

$$ds^2 = dx^2 + \frac{1}{\cos^2 \alpha} dy^2.$$

The case when $\cos \alpha = 0$ must be discussed separately. It corresponds to $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$, therefore the Platonic solid is a cube. Suppose that M lies originally in the $xz-$plane, as in Figure 2, and has coordinates $(x, 0, z)$.

Point $\overline{M}$ that will correspond in the $xy-$plane has coordinates $(x, -z, 0)$. An arbitrary point in a neighborhood of M has originally coordinates $(x + dx, 0, z + dz)$. In $xy-$plane it switches to $(x + dx, -(z + dz), 0)$. So, the metric corresponding to the cube is $ds^2 = dx^2 + dz^2$. Therefore there exist two kinds of metrics corresponding to the Platonic solids. Since these metrics are both flat, their geodesics are lines. This matches the image of the shortest path between two given points lying on two faces in one of those Platonic solids is the line which connects the points after the laying flate of the Platonic solid on a plane. Folding up the Platonic solide, the image of this geodesic is the shortest path between the given points.

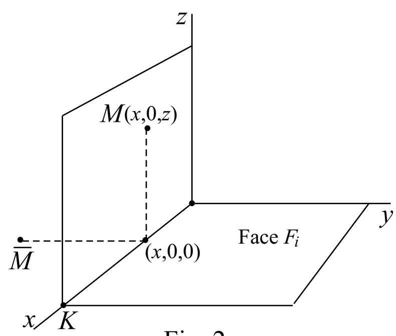


Fig. 2

References

[1] W. Klingenberg, *A Course in Differential Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, New York-Heidelberg-Berlin: Springer-Verlag, VI, 1975.

Department of Mathematics and Computer Science,
University Ovidius,
Constantza, Romania

O demonstraţie elementară a inegalităţii lui Jordan

de Andrei Vernescu şi Dan Coma

Abstract

We present a geometric proof of the inequality of Jordan.
Key words: Camille Jordan, sinus, area, monotony, convexity.
M.S.C.: 26A05, 26A09, 26A24, 26A48, 26A51

1. O demonstraţie a inegalităţii lui *Jordan* [1]

$$\frac{\sin x}{x} \geq \frac{2}{\pi}, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \tag{1}$$

poate fi găsită, de exemplu, în excelenta monografie [6] a lui *D. S. Mitrinović* şi *P. M. Vasić*, pag. 33, pentru aceasta stabilindu-se cu ajutorul negativităţii derivatei[2] că funcţia $f : \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ este strict descrescătoare, deci $f(x) \geq f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi}$.

2. Câteva considerente introductive dintr-o lucrare recentă a celui de al doilea autor [3] constituie o nouă demonstraţie a inegalităţii lui *Jordan*, de natură pur geometrică, fără folosirea derivatelor. Unicul element necesar este graficul funcţiei sinus pe intervalul $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ şi acceptarea intuitivă a faptului că funcţia este concavă pe acest interval[2],[3] (fig. 1).

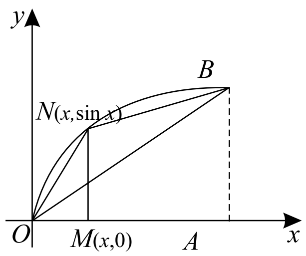


Fig. 1

Iată această demonstraţie.

Considerând punctul variabil $M(x, 0)$, cu $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ şi punctul corespunzător de pe grafic $N(x, \sin x)$, avem inegalitatea de arii

$$\sigma[OMN] + \sigma[NMAB] \geq \sigma[AOB] \tag{2}$$

(cu egalitate dacă şi numai dacă $x = \frac{\pi}{2}$, adică M coincide cu A), în care în partea stângă apar aria unui triunghi dreptunghic şi aria unui trapez, iar în partea dreaptă apare aria unui triunghi dreptunghic. Exprimând aceste arii în funcţie de x obţinem

$$\frac{x \sin x}{2} + \frac{(1 + \sin x)\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{2} \geq \frac{\pi}{4},$$

de unde, efectuând calculele necesare, rezultă

$$\frac{\sin x}{x} \geq \frac{2}{\pi}.$$

3. Mai mult, metoda geometrică prezentată permite chiar obţinerea faptului că funcţia $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$, cu $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ este strict descrescătoare.

Într-adevăr, fie $u, v \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$, $u < v$ oarecare (fig. 2). Urmând acelaşi procedeu, obţinem:

$$\frac{u \sin u}{2} + \frac{(\sin u + \sin v)(v - a)}{2} \geq v \sin v,$$

de unde:

$$\frac{\sin u}{u} \geq \frac{\sin v}{v}.$$

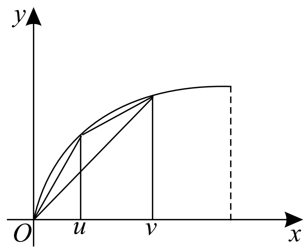


Fig. 2

Acum se vede că, de fapt, inegalitatea (1) poate fi regăsită prin particularizarea $v = 1$.

Asupra unei interpretări geometrico-mecanice a inegalităţii lui *Jordan*, a se vedea [11].

4. Procedeul urmat permite stabilirea faptului că, pentru o funcţie concavă oarecare $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$, cu $f(0) = 0$ funcţia $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$, $x > 0$, este descrescătoare. Dacă f este convexă, atunci funcţia $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$, $x > 0$, este crescătoare. Dar aceasta nu reprezintă decât un caz particular al faptului că, dacă f este convexă, atunci funcţia p_{x_0}, dată de

$$p_{x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

este crescătoare (a se vedea [7]).

Aceasta constituie, într-un anumit sens, o „banalizare“ a inegalităţii lui Jordan.

Notele autorilor

[1]) *Camille Jordan* (1838-1922), matematician francez, cunoscut pentru importante realizări, în special în algebră, analiză şi topologie.

[2]) Obţinerea formulei de derivare a funcţiei sinus se sprijină în mod esenţial pe utilizarea limitei fundamentale $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, a cărei stabilire necesită, la rândul său, anumite elemente premergătoare analizei matematice (în literatura matematică anglo-saxonă „prerequisites“ de „precalculus“) anume inegalitatea $\sin x \leq x \leq \mathrm{tg} x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, a cărei justificare se face, de regulă, pe baza definiţiei geometrice a funcţiilor trigonometrice (numită foarte sugestiv de către *E. Maor* în [5] definiţia „medievală“). Uneori, chiar justificarea inegalităţii menţionate se face utilizând concepte mai elaborate. Astfel, chiar în [6] se obţine inegalitatea $x \leq \mathrm{tg} x$ integrând inegalitatea $\frac{1}{\cos^2 t} \geq 1$ (de exemplu pe un interval $[0, x]$, cu $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$). Aceasta, ca şi justificarea rezultatului $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ pe baza regulii lui *L'Hospital*, duce la un cerc vicios. Există şi o definire analitică (deci neintuitivă), care utilizează seriile de puteri (a se vedea [1], [2], [7]).

[3]) Construcţia graficului funcţiei sinus, la o primă luare de contact în liceu (ca şi pentru funcţia de gradul II, funcţia exponenţială şi funcţia logaritmică) se face în clasele de „precalculus“ a IX-a şi a X-a, deci înainte de studiul sistematic al funcţiilor cu ajutorul derivatelor, prin singura metodă posibilă la acel stadiu, anume construcţia „prin puncte“, neriguroasă, dar, momentan, suficient de sugestivă. Dar cunoaşterea acestor câtorva funcţii

elementare este absolut necesară la începutul studiului analizei în clasa a XI-a; din acest motiv, în numeroase manuale de analiză se recapitulează funcţiile elementare, la început, după prezentarea corpului numerelor reale, dar înainte de începerea teoriei limitelor.

[4)] Stabilirea concavităţii *Jensen* a funcţiei sinus pe intervalul $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, adică a inegalităţii $\sin \frac{u+v}{2} \geq \frac{\sin u + \sin v}{2}$, pentru orice $u, v \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ constituie un exerciţiu trivial de trigonometrie. Dar trecerea de la convexitatea (concavitatea) *Jensen* la cea uzuală este ceva mai delicată. Pentru o expunere elegantă şi detaliată a teoriei, recomandăm excelenta monografie [8]. Un articol în care sunt prezentate primele elemente de convexitate, legate şi de câteva aspecte didactice, a fost publicat în paginile acestei reviste, a se vedea [12].

Bibliografie

[1] N. Boboc, *Analiză matematică*, Editura Universităţii din Bucureşti, 1999.

[2] I. Colojoară, *Analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1983

[3] D. Coma, *Grafice de funcţii şi inegalităţi*, A cincea Conferinţă de Analiză neliniară şi Matematici Aplicate, Târgovişte 2007.

[4] N. Dinculeanu, *Elemente de Analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, diferite ediţii, 1959-1979.

[5] E. Maor, e : *The story of a number*, Princeton University Press, 1998 (tradusă în limba română la Editura Fundaţiei Theta, 2006).

[6] D. S. Mitrinović, P. M. Vasić, *Analytic Inequalities*, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1970.

[7] M. Nicolescu, *Analiză matematică*, vol. II, Editura Tehnică, Bucureşti, 1957.

[8] C. P. Niculescu, L. E. Persson, *Convex Functions, Basic Theory and Applications*, Universitaria Press, Craiova, 2003.

[9] C. P. Niculescu, A. Vernescu, *Lectura graficului: Maximul funcţiilor convexe*, partea I, G. M.-B **109** (2004), nr. 9, pp. 321-325.

[10] C. P. Niculescu, A. Vernescu, *Lectura graficului: Maximul funcţiilor convexe*, partea a II-a, G. M.-B **110** (2005), nr. 3, pp. 97-103.

[11] A. Vernescu, *O interpretare geometrico-mecanică a inegalităţii lui Jordan*, G. M.-A **20** (**90**) (2002), nr. 2, pp. 103-105.

[12] A. Vernescu, *Câteva puncte de vedere în abordarea noţiunii de convexitate la clasa a XI-a*, G. M.-A **24** (2006), nr. 4, pp. 270-284.

Universitatea Valahia
Târgovişte

Şcoala generală Vădăstriţa
jud. Olt

Imagini geometrice ale mulţimii numerelor reale deduse dintr-o problemă de loc geometric

de Anghel Dafina

Abstract

In this note we deal with a locus problem. The obtained locus is a geometric image of the real line.

Key words: loci, arcs
M.S.C.: 51M04

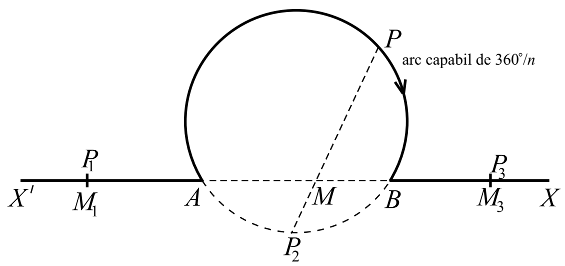
Enunţul problemei. *Pe dreapta fixă d, situată în planul π se consideră punctele fixe A, B şi punctul mobil M. În planul π se construiesc poligoanele regulate de laturi $[AM]$ şi $[BM]$, cu m, respectiv n laturi, unde $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n \geq 3$. Cercurile circumscrise acestor poligoane se intersectează în M şi P. Se cere locul geometric al punctului P.*

Pentru rezolvare deosebim cazurile $m = n$ şi $m \neq n$, în fiecare caz poligoanele pot fi situate de aceeaşi parte a dreptei d sau de o parte şi de alta a acesteia.

Organizăm dreapta d ca o axă, axa numerelor reale $x'x$, punctele A, B având abscisele a, b constante, iar punctul M abscisa x variabilă.

Se obţin următoarele rezultate:

1) Dacă $m = n$ şi poligoanele regulate sunt în acelaşi semiplan (semiplanul superior), locul geometric al punctului P este reuniunea dintre un arc de cerc cu extremităţile în A şi B, arc capabil de $\dfrac{360^\circ}{n}$ şi semidreptele $X'A)$ şi $(BX$.



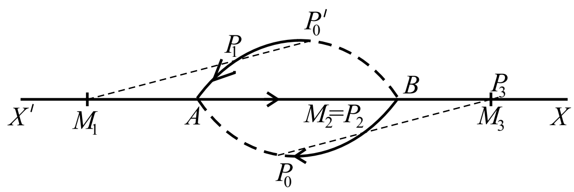
Când M parcurge semidreapta $X'A)$, adică $x \in (-\infty, a)$, cercurile sunt tangente şi $P = M$.

Când M parcurge $[AB]$, adică $x \in [a, b]$, P descrie arcul APB, capabil de $\dfrac{360^\circ}{n}$.

Când M parcurge $(BX$, adică $x \in (b, +\infty)$, cercurile sunt tangente şi $P = M$.

Se constată că dreapta MP, când $x \in (a, b)$, trece printr-un punct fix P_0, unde P_0 este mijlocul arcului ce completează arcul APB până la un cerc, adică arcul AP_0B este arc capabil de $180^\circ - \dfrac{360^\circ}{n}$.

2) Dacă $m = n$ şi poligoanele regulate sunt în semiplane diferite, locul geometric al punctului P este reuniunea arcelor $P_0'A$, BP_0 (arce capabile de $180^\circ - \dfrac{360^\circ}{n}$) şi a segmentului AB.



Când M parcurge semidreapta $X'A)$, adică $x \in (-\infty, a)$, punctul P descrie arcul $P_0'A$.

Când M parcurge $[AB]$, adică $x \in [a, b]$, cercurile sunt tangente şi $P = M$.

Când M parcurge $(BX$, adică $x \in (b, +\infty)$, P descrie arcul BP_0'.

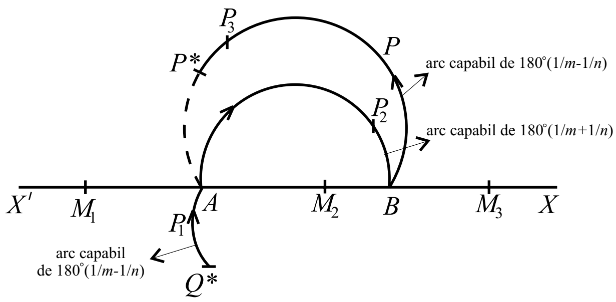
Punctele P_0' şi P_0 nu sunt puncte ale locului geometric, fiind poziţii limită ale punctului P şi corespund în situaţia când $x \to -\infty$, respectiv $x \to +\infty$.

Se constată că dreapta MP, când $x \in (-\infty, a)$, trece prin punctul fix P_0', iar când $x \in (b, +\infty)$, trece prin punctul fix P_0'.

În cazul particular $m = n = 4$ arcul de cerc loc geometric de la 1. este semicerc, iar arcele AP_0', BP_0 de la 2. sunt sferturi de cerc, fiind arce capabile de $90°$.

3) Dacă $m < n$ şi poligoanele regulate sunt în acelaşi semiplan (semiplanul superior) locul geometric al punctului P este reuniunea a trei arce de cerc, astfel: Q^*A, arc capabil de $180° \left(\dfrac{1}{m} - \dfrac{1}{n}\right)$, iar măsura arcului AQ^* este egală cu $\dfrac{360°}{n}$; AP_2B este arcul capabil de $180° \left(\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n}\right)$ şi BP^*, arcul capabil de $180° \left(\dfrac{1}{m} - \dfrac{1}{n}\right)$, cu măsura arcului $AP^* = \dfrac{360°}{n}$.

Arcele AP^* şi AQ^* sunt simetrice faţă de dreapta d.



Când M parcurge semidreapta $X'A)$, adică $x \in (-\infty, a)$, punctul P descrie arcul de cerc Q^*A.

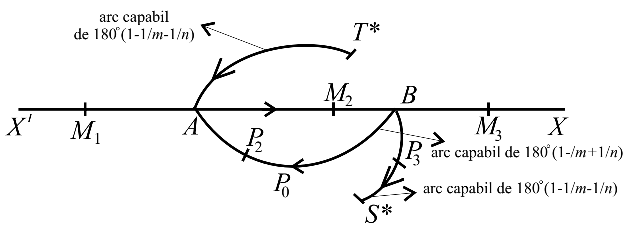
Când M parcurge $[AB]$, adică $x \in [a, b]$, punctul P descrie arcul de cerc BPA.

Când M parcurge $(BX$, adică $x \in (b, +\infty)$, punctul P descrie arcul de cerc BP^*.

Punctele P^* şi Q^* nu sunt puncte ale locului geometric, fiind poziţii limite ale punctului P, când x tinde la $-\infty$, respectiv $+\infty$.

4) Dacă $m < n$ şi poligoanele regulate sunt în semiplane diferite, locul geometric al punctului P este reuniunea a trei arce de cerc, astfel: T^*A este arcul

capabil de $180^\circ\left(1-\dfrac{1}{m}-\dfrac{1}{n}\right)$ cu măsura arcului AT^* egală cu $\dfrac{360^\circ}{n}$; APB, este arcul capabil de $180^\circ\left(1-\dfrac{1}{m}-\dfrac{1}{n}\right)$, cu extremităţile în A şi B; BS^* este capabil de $180^\circ\left(1-\dfrac{1}{m}-\dfrac{1}{n}\right)$, cu măsura arcului BS^* egală cu $\dfrac{360^\circ}{n}$.



Când M parcurge semidreptele $X'A)$, adică $x \in (-x, a)$, punctul P descrie cercul T^*A.

Când M parcurge $[AB]$, adică $x \in [a, b]$, punctul P descrie cercul APB.

Când M parcurge $(BX$, adică $x \in (b, +\infty)$, punctul P descrie cercul BS^*.

Arcele BT^* şi BS^* sunt simetrice faţă de dreapta d.

Punctele T^* şi S^* nu sunt puncte ale locului geometric, fiind poziţii limită ale punctului P, când se tinde la $-\infty$, respectiv $+\infty$.

În cazul particular $m = 3$ şi $n = 6$, cercul APB de la 3) este semicerc şi arcele AT^* şi BS^* se află pe cercul de diametru $[AB]$, fiind arce capabile de 90°.

Observaţia 1. Cercul de diametru $[AB]$, sau o parte a sa, devine loc geometric numai în situaţiile $m = n = 4$, sau $m = 3$; $n = 6$, respectiv $m = 6$; $n = 3$, deoarece ecuaţia $\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{2}$ are în $\mathbb{N}$ numai aceste soluţii.

Observaţia 2. În cazurile $m = 3$, $n = 4$ şi $m = 4$, $n = 6$ locurile geometrice coincid, arcele corespunzătoare fiind capabile de câte 105°, 75°, 165° şi 15°. Deosebirea constă în faptul că pentru $m = 3$; $n = 4$, punctele limita P^*, T^* se află pe cercul capabil de 75°, iar pentru $m = 4$; $n = 6$ acestea se află pe cercul capabil de 105°. Aceste cazuri rezultă din rezolvarea în $\mathbb{N}$ a ecuaţiei $\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=1-\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{q}$.

Observaţia 3. O parte din locul geometric poate să coincidă pentru perechi de poligoane regulate cu număr diferit de laturi.

În afara exemplelor prezentate în observaţiile 1) şi 2) mai exemplificăm:

Ecuaţia $\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}\neq\dfrac{1}{2}$, unde $m, n, p, q \in \mathbb{N}\setminus\{0,1,2\}$ are soluţia $m = 2k+1$, $n = 2k+2$, $p = k+1$, $q = (2k+1)(2k+2)$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$.

Pentru $k = 2$ obţinem perechile de poligoane $m = 5$; $n = 6$, laturi şi $p = 3$; $q = 30$. Pentru $k = 3$ obţinem $m = 7$; $n = 8$ şi $p = 4$; $q = 56$.

Observaţia 4. Arcele APB şi BP_0 de la cazurile 1), respectiv 2) se află pe acelaşi cerc.

Arcele APB şi BS^*; BP^* şi APB; AQ^* şi AT^* de la cazurile 3) respectiv 4) se află pe acelaşi cerc.

Observaţia 5. Cazul $m > n$ se tratează în mod analog cazului $m < n$.

Observaţia 6. Dacă planul π este variabil, dreapta d rămânând fixă, locul geometric al punctului P se obţine prin rotaţia locului geometric prezentat în cazurile 1), 2), 3), 4) în jurul axei d.

Remarcă. Locurile geometrice descrise în cazurile 1), 2), 3), 4) reprezintă imagini geometrice ale mulţimii numerelor reale, parcurse în sensul indicat prin săgeţi.

Bibliografie

[1] A. Dafina, *Problema celor două poligoane regulate*, G. M. A nr.4/2003, pp. 236-241, G. M. A nr.1/2004, pp. 32-42.

[2] A. Dafina, *Contribuţii asupra locurilor geometrice*, Editura PIONIER, Ploieşti, 2003.

Colegiul Naţional Nicolae Iorga
Vălenii de Munte, Prahova

NOTE METODICE

Exemple de monoizi izomorfi

DE GHEORGHE COSTOVICI

Abstract

Starting from a remark from the book entitled Real Analysis, by *H. L. Royden*, we present four examples of monoids which are isomorphic.

Key words: monoids, isomorphism
M.S.C.: 08A02

Fie $a < 0$, $b < 0$, $c > 0$, $d > 0$ patru numere reale. Vom considera funcţiile

• $f : (a,0] \times (a,0] \to \mathbb{R}$, cu $f(x,y) = xfy = x+y$, dacă $x+y > a$ şi $f(x,y) = xfy = x+y-a$ dacă $x+y \leq a$;

• $g : (b,0] \times (b,0] \to \mathbb{R}$ cu $g(x,y) = xgy = x+y$ dacă $x+y > b$ şi $g(x,y) = xgy = x+y-b$ dacă $x+y \leq b$;

• $u : [0,c) \times [0,c) \to \mathbb{R}$ cu $u(x,y) = xuy = x+y$ dacă $x+y < c$ şi $u(x,y) = xuy = x+y-c$ dacă $x+y \geq$;

• $v : (0,d) \times (0,d) \to \mathbb{R}$ cu $v(x,y) = xvy = x+y$ dacă $x+y < d$ şi $v(x,y) = xvy = x+y-d$ daca $x+y \geq d$.

Vom arăta că:

(I) f, g, u, v sunt operaţii (binare);

(II) cuplurile $((a,0], f)$, $((b,0], g)$, $([0,c), u)$, $([0,d), v)$ sunt monoizi comutativi, izomorfi (operaţiile sunt asociative, comutative şi pentru fiecare există unitate).

(I). Arătăm că f este operaţie binară pe $(a,0]$. Fie $x, y \in (a,0)$. Dacă $x+y > a$ atunci $xfy = x+y > a$. $x \leq 0$ şi $y \leq 0$ implică $x+y = xfy \leq 0$. Deci $xfy \in (a,0]$.

Dacă $x+y \leq a$ atunci $xfy = x+y-a \leq 0$. Dar $x > a$ şi $y > a$ implică $x+y > 2a$, de unde $x+y-a = xfy > a$. Deci $xfy \in (a,0]$. Aşadar, f este operaţie pe $(a,0]$.

Este evident acum că şi g este operaţie pe $(b, 0]$.

Arătăm că v este operaţie pe $[0, d)$. Fie $x, y \in [0, d)$. Dacă $x + y < d$, atunci $xvy = x + y \leq d$. Dacă $x \geq 0$ şi $y \geq 0$, rezultă $x + y = xvy \geq 0$. Deci $xvy \in [0, d)$.

Dacă $x + y \geq d$ atunci $xvy = x + y - d \geq 0$. Dar $x < d$ şi $y < d$ implică $x + y < 2d$ şi $xvy = x + y - d < d$. Deci $xvy \in [0, d)$. Prin urmare v este operaţie pe $[0, d)$.

Este clar acum că şi u este operaţie (binară) pe $(0, c)$.

(II). Arătăm că $((a, 0], f)$: este monoid comutativ. Din definiţia operaţiei f „se citeşte" comutativitatea ei. Există $0 \in (a, 0]$. Dacă $x \in (a, 0]$ atunci $a < x = x + 0 \leq 0$ şi atunci, conform definiţiei lui f avem $xf0 = x + 0 = x$. Deci 0 este unitatea pentru operaţia f.

Să stabilim că f este asociativă. Fie $x, y, z \in (a, 0]$. Avem de arătat că $(xfy)fz = xf(yfz)$.

Cazul 1: $x + y > a$. Atunci $xfy = x + y$.

Cazul 1.1: $x + y > a$ şi $x + y + z > a$. Atunci $(xfy)fz = x + y + z$.

Cazul 1.2: $x + y > a$ şi $x + y + z \leq a$. Atunci $x(xfy)fz = x + y + z - a$.

Cazul 2: $x + y \leq a$. Atunci $xfy = x + y - a$.

Cazul 2.1: $x + y \leq a$ şi $x + y - a + z > a$. Atunci $(xfy)fz = x + y - a + z$.

Cazul 2.2: $x + y \leq a$ şi $x + y - a + z \leq a$. Atunci $(xfy)fz = x + y - a + z - a$.

Cazul $1'$: $y + z > a$. Atunci $yfz = y + z$.

Cazul $1'.1$: $y + z > a$ şi $x + y + z > a$. Atunci $xf(yfz) = x + y + z$.

Cazul $1'.2$: $y + z > a$ şi $x + y + z \leq a$. Atunci $xf(yfz) = x + y + z - a$.

Cazul $2'$: $y + z \leq a$. Atunci $yfz = y + z - a$.

Cazul $2'.1$: $y + z \leq a$ şi $x + y + z - a > a$. Atunci $xf(yfz) = x + y + z - a$.

Cazul $2'.2$: $y + z \leq a$ şi $x + y + z \leq a$. Atunci $xf(yfz) = x + y + z - a - a$.

Cazul 1.1 şi $1'.1$ implică $(xfy)fz = xf(yfz)$.

Cazul 1.1 şi $1'.2$ nu există datorită contradicţiei ipotezelor.

Cazul 1.2 şi $1'.1$ nu există datorită contradicţiei ipotezelor.

Cazul 1.2 şi $1'.2$ implică $(xfy)fz = xf(yfz)$.

Cazul 1.1 şi $2'.1$ nu există datorită contradicţiei rezultată din ipoteze căci $y + z \leq a$ şi $x \leq 0$ şi deci $x + y + z \leq a$.

Cazul 1.1 şi $2'.2$ nu există datorită contradicţiei rezultată din ipoteze căci $x + y > 0$ şi $z > a$ şi deci $x + y + z > 2a$.

Cazul 1.2 şi $2'.1$ implică $(xfy)fz = xf(yfz)$.

Cazul 1.2 şi $2'.2$ nu există datorită contradicţiei rezultată din ipoteze căci $x + y > a$ şi $z > a$ şi deci $x + y + z > a$.

Cazul 2.1 şi $1'.1$ nu există datorită contradicţiei rezultată din ipoteze căci $x + y \leq a$ şi $z \leq a$ şi deci $x + y + z \leq a$.

Cazul 2.1 şi $1'.2$ implică $(xfy)fz = xf(yfz)$.

Cazul 2.1 şi $2'.1$ implică $(xfy)fz = xf(yfz)$.

Cazul 2.1 şi $2'.2$ nu există datorită contradicţiei ipotezelor.

Cazul 2.2 şi $1'.1$ nu există datorită contradicţiei rezultată din ipoteze căci $y + z > a$ şi $x > a$ şi deci $x + y + z > 2a$.

Cazul 2.2 şi $1'.2$ nu există datorită contradicţiei rezultată din ipoteze căci $y + z > a$ şi deci $x + y + z > a$.

Cazul 2.2 şi $2'.1$ nu există datorită contradicţiei rezultată din ipoteze.

Cazul 2.2 şi $2'.2$ $\quad (xfy)fz = xf(yfz)$.

În concluzie, $((a, 0], f)$ este monoid comutativ.

Evident, şi $((b, 0], g)$ este monoid comutativ.

Arătăm că $([0, d), v)$ este monoid comutativ. Din definiţia lui v se vede imediat că v este comutativă. Există $0 \in [0, d)$. Atunci, dacă $x \in [0, d)$ avem $0 \leq x = x+0 \leq d$ şi deci $xv0 = x + 0 = x$ şi astfel 0 este unitatea pentru v.

Arătăm că operaţia v este asociativă.

Cazul 1: $x + y < d$. Atunci $xvy = x + y$.

Cazul 1.1: $x + y < d$ şi $x + y + z < d$. Atunci $(xvy)vz = x + y + z$.

Cazul 1.2: $x + y < d$ şi $x + y + z \geq d$. Atunci $x(xvy)vz = x + y + z - d$.

Cazul 2: $x + y \geq d$. Atunci $xvy = x + y - d$.

Cazul 2.1: $x + y \geq d$ şi $x + y - d + z < d$. Atunci $(xvy)vz = x + y - d + z$.

Cazul 2.2: $x + y \geq d$ şi $x + y - d + z \geq a$. Atunci $(xvy)vz = x + y - d + z - a$.

Cazul $1'$: $y + z < d$. Atunci $yvz = y + z$.

Cazul $1'.1$: $y + z < d$ şi $x + y + z < d$. Atunci $xv(yvz) = x + y + z$.

Cazul $1'.2$: $y + z < d$ şi $x + y + z \geq d$. Atunci $xv(yvz) = x + y + z - d$.

Cazul $2'$: $y + z \geq d$. Atunci $yvz = y + z - d$.

Cazul $2'.1$: $y + z \geq d$ şi $x + y + z - d < d$. Atunci $xv(yvz) = x + y + z - d$.

Cazul $2'.2$: $y + z \geq d$ şi $x + y + z - d \geq d$. Atunci $xv(yvz) = x + y + z - d - d$.

Cazul 1.1 şi $1'.1$ implică $(xvy)vz = xv(yvz)$.

Cazul 1.1 şi $1'.2$ nu există datorită contradicţiei ipotezelor.

Cazul 1.2 şi $1'.1$ nu există datorită contradicţiei ipotezelor.

Cazul 1.2 şi $1'.2$ implică $(xvy)vz = xv(yvz)$.

Cazul 1.1 şi $2'$. nu există datorită contradicţiei rezultată din ipoteze căci $y + z \geq d$ şi $x \geq 0$ şi deci $x + y + z \geq d$.

Cazul 1.1 şi $2'.2$ nu există datorită contradicţiei rezultată din ipoteze căci $x + y < d$ şi $z < d$ şi deci $x + y + z < 2d$.

Cazul 1.2 şi $2'.1$ implică $(xvy)vz = xv(yvz)$.

Cazul 1.2 şi $2'.2$ nu există datorită contradicţiei rezultată din ipoteze căci $x + y < d$ şi $z < d$ şi deci $x + y + z < 2d$.

Cazul 2.1 şi $1'.1$ nu există datorită contradicţiei rezultată din ipoteze căci $x + y \geq d$ şi $x \geq 0$ şi deci $x + y + z \geq d$.

Cazul 2.1 şi $1'.2$ implică $(xvy)vz = xv(yvz)$.

Cazul 2.1 şi $2'.1$ implică $(xvy)vz = xv(yvz)$.

Cazul 2.1 şi $2'.2$ nu există datorită contradicţiei ipotezelor.

Cazul 2.2 şi $1'.1$ nu există datorită contradicţiei rezultată din ipoteze căci $y + z < d$ şi $x < d$ şi deci $x + y + z < 2d$.

Cazul 2.2 şi $1'.2$ nu există datorită contradicţiei rezultată din ipoteze căci $y + z < d$ şi $x < d$ şi deci $x + y + z < 2d$.

Cazul 2.2 şi $2'.1$ nu există datorită contradicţiei ipotezelor.

Cazul 2.2 şi $2'.2$ implică $(xvy)vz = xv(yvz)$.

Deci $([0,d),v)$ este monoid comutativ. Este clar că şi $([0,c),u)$ este monoid comutativ.

Să stabilim în continuare izomorfismele dintre cei patru monoizi.

Deoarece $a < x \leq 0$, rezultă $b < (b/a)x \leq 0$ şi deci există $F:(a,0) \to (b,0)$ cu $F(x) = (b/a)x$. Arătăm că F este izomorfism între $((a,0],f)$ şi $((b,0],g)$.

Avem

$$F(t) = F(s) \Leftrightarrow \left(\frac{b}{a}\right)t = \left(\frac{b}{a}\right)s \Leftrightarrow t = s.$$

Deci F este injecţie.

Dacă $y \in (b,0)$, ceea ce este echivalent cu $b < y \leq 0$, atunci există $(a/b)y \in (a,0]$ astfel încât $F((a/b)y) = (b/a)(a/b)y = y$.

Deci F este şi surjecţie.

Fie $x,y \in (a,0]$. Atunci $xfy = x+y$ dacă $x+a > a$ şi $xfy = x+y-a$ dacă $x+y \leq a$. În cazul $x+y > a$ avem $(b/a)(x+y) = (b/a)x + (b/a)y > (b/a)a = b$ şi atunci $F(xfy) = F(x+y) = (b/a)(x+y) = (b/a)x + (b/a)y = ((b/a)x)g((b/a)y) = F(x)gF(y)$. În cazul $x+y \leq a$ avem $(b/a)(x+y) = (b/a)x + (b/a)y \leq (b/a)a = b$ şi atunci $F(xfy) = F(x+y-a) = (b/a)(x+y-a) = (b/a)x + (b/a)y - b = ((b/a)x)g((b/a)y) = F(x)gF(y)$.

Deci F este izomorfism.

Deoarece $b < x \leq 0$ implică $0 \leq (c/b)x < 0$, atunci există $G:(b,0] \to [0,c)$ cu $G(x) = (c/b)x$.

Dar

$$G(s) = G(t) \Leftrightarrow (c/b)s = (c/b)t \Leftrightarrow s = t$$

şi deci G este injecţie.

Dacă $y \in [0,c)$ echivalent cu $0 \leq y < c$, atunci există $(b/c)y \in (b,0]$ astfel încât avem $G((b/c)y) = (c/b)(b/c)y = y$ şi deci G este surjecţie.

Acum, dacă $x,y \in (b,0]$ atunci $xgy = x+y$ dacă $x+y > b$ şi $xgy = x+y-b$ dacă $x+y \leq b$. În cazul $x+y > b$ atunci $(c/b)(x+y) = (c/b)x + (c/b)y < c$ şi atunci avem $G(xgy) = G(x+y) = (c/b)(x+y) = (c/b)x + (c/b)y = ((c/b)x)u((c/b)y) = G(x)uG(y)$. În cazul $x+y \leq b$ avem $(c/b)(x+y) = (c/b)x + (c/b)y \geq c$ şi atunci $G(xgy) = G(x+y-b) = (c/b)(x+y-b) = (c/b)x + (c/b)y - c = ((c/b)x)u((c/b)y) = G(x)uG(y)$.

Deci G este izomorfism între monoizii $((b,0],g)$ şi $([0,c),u)$.

Dacă $0 \leq x < c$ atunci $0 \leq (d/c)x < d$ şi deci există $H:[0,c) \to [0,d)$ cu $H(x) = (d/c)x$. Dar

$$H(s) = H(t) \Leftrightarrow (d/c)s = (d/c)t \Leftrightarrow s = t$$

şi deci H este injecţie.

Dacă $y \in [0,d)$, ceea ce este echivalent cu $0 \leq y < d$, atunci există $(c/d)y \in [0,c)$ astfel încât $H((c/d)y) = (d/c)(c/d)y = y$ şi deci H este surjecţie.

Dacă $x,y \in [0,d)$ atunci $xuy = x+y$ dacă $x+y < c$ şi $xuy = x+y-c$ dacă $x+y \geq c$. În cazul $x+y < c$ avem $(d/c)(x+y) = (d/c)x + (d/c)y < d$ şi atunci $H(xuy) = H(x+y) = (d/c)(x+y) = (d/c)x + (d/c)y = ((d/c)x)v((d/c)y) = H(x)vH(y)$. În cazul $x+y \geq c$ avem $(d/c)(x+y) = (d/c)x + (d/c)y \geq d$ şi atunci avem $H(xuy) = H(x+y-c) = (d/c)(x+y-c) = (d/c)x + (d/c)y - d = ((d/c)x)v((d/c)y) = H(x)vH(y)$.

Deci H este izomorfism între monoizii $([0,c),u)$ şi $([0,c),v)$.

Observaţie. Ne-am inspirat din H. L. Royden, *Real Analysis*, New York, 1963 unde la pagina 52 se afirmă (fără demonstraţie) că, pentru $c=1$ în problema noastră, u este operaţie asociativă şi comutativă, aceasta servindu-i autorului (cărţii) în construcţia unei mulţimi nemăsurabile *Lebesgue*.

Catedra de Matematică
Universitatea Tehnică Gh. Asachi din Iaşi
B-dul Carol I, nr. 11, Iaşi, 700506
e-mail: costovic@gauss.tuiasi.ro

PROBLEME PROPUSE

259. Fie E spaţiul vectorial al funcţiilor indefinit derivabile definite pe $\mathbb{R}$ cu valori în $\mathbb{C}$ şi fie $f \in E$. Pentru orice $t \in \mathbb{R}$, să considerăm funcţia $\varphi_t \in E$ definită de egalitatea $\varphi_t(x) = f(x+t)$ şi fie $E(f) = Sp\{\varphi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$.

a) Să se precizeze dimensiunea spaţiului $E(f)$ în următoarele cazuri:

$$f_1(x) = \mathrm{e}^x; \quad f_2(x) = \sin x; \quad f_3(x) = x; \quad f_4(x) = x\mathrm{e}^x.$$

Să se verifice apoi că dacă f este de forma $f(x) = p(x)\mathrm{e}^{\alpha x}$, unde p este un polinom de gradul n cu coeficienţi complecşi, iar $\alpha \in \mathbb{C}$ [1)], atunci $E(f)$ este finit dimensional şi că rezultatul rămâne valabil şi în cazul când f este o combinaţie liniară de astfel de funcţii. Să se arate că, dacă

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1},$$

atunci $E(f)$ nu are dimensiune finită.

b) Fie $\{g_1, \ldots, g_n\} \subseteq E$ un sistem de n funcţii liniar independent. Să se arate că există n numere reale mutual distincte $a_1, \ldots, a_n$, astfel încât

$$\det(g_i(a_j)) \neq 0.$$

c) Fie $f \in E$ astfel încât $\dim_{\mathbb{C}} E(f) = n$ şi fie $\{g_1, \ldots, g_n\}$ o bază în $E(f)$. Să se arate că există funcţiile unice $h_1, \ldots, h_n \in E(f)$ astfel încât

$$f(x+t) = h_1(t)g_1(x) + \ldots + h_n(t)g_n(x).$$

d) În ipoteza de la punctul c), să se arate că f satisface o ecuaţie diferenţială liniară şi omogenă de ordinul n cu coeficienţi constanţi.

e) Aplicând rezultatul de la punctul d), să se determine funcţiile f pentru care $\dim_{\mathbb{C}} E(f) = 2$.

Dan Radu

[1)] O funcţie de forma considerată este numită, uneori, şi *quasipolinom.* (N. A.)

260. Să se determine numerele complexe de modul 1 cu proprietatea că

$$|1 + z + \ldots + z^n| \geq 1,$$

pentru orice număr natural par n.

Marian Tetiva

261. Dacă $(a_n)_{n\geq 1}$ este un şir de numere reale strict pozitive astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = a \in \mathbb{R}$, să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty}\left(\ln\frac{\mathrm{e}}{mn} + \sum_{k=1}^{mn}\frac{1}{k} - \gamma\right)^{a_n},$$

unde $m \in \mathbb{N}^*$ şi $\gamma = 0,577216\ldots$ este constanta lui *Euler*.

Dumitru Bătineţu-Giurgiu

262. Fie

$$X = \begin{pmatrix} t & u \\ v & w \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}).$$

Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, notăm

$$X^n = \begin{pmatrix} t_n & u_n \\ v_n & w_n \end{pmatrix}$$

şi fie $a = t + w$, $b = tw - uv$ urma, respectiv determinantul matricei X. Să se arate că următoarele afirmaţii sunt echivalente:

i) Şirurile $(t_n)_{n\geq 1}$, $(u_n)_{n\geq 1}$, $(v_n)_{n\geq 1}$, $(w_n)_{n\geq 1}$ sunt toate convergente.

ii) Are loc una dintre situaţiile

- $X = I_2$ (matricea unitate de ordinul al doilea);
- $a = b + 1$ şi b este un număr de modul mai mic ca 1;
- $|a|^2 + |a^2 - 4b| < 2\left(|b|^2 + 1\right) < 4$.

Marian Tetiva

263. Fie G centrul de greutate al tetraedrului oarecare $[ABCD]$ şi r, R razele sferelor înscrisă, respectiv circumscrisă acestuia. Se notează cu r_1, r_2, r_3, r_4 razele sferelor înscrise tetraedrelor $[GABC]$, $[GABD]$, $[GACD]$ şi respectiv $[GBCD]$. Să se arate că:

a) $\dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{r_2} + \dfrac{1}{r_3} + \dfrac{1}{r_4} < \dfrac{R^2}{r^3}$;

b) $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 > 16\dfrac{r^3}{R^2}$;

c) $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 > \dfrac{8}{5}r$.

Marius Olteanu

SOLUŢIILE PROBLEMELOR PROPUSE

238. *Fie G un grup aditiv abelian, iar $f : G \to \mathbb{R}$ o aplicaţie cu proprietatea că*

$$f(x+y) + f(x-y) \leq 2f(x) + 2f(y),$$

pentru orice $x \in G$.

Notăm $M = \{m \in \mathbb{N} \mid m > 1,\ f(mx) = m^2 f(x),\ \forall x \in G\}$. Să se arate că, dacă $M \neq \emptyset$, atunci $\inf M = 2$. (*În legătură cu problema* **234**.) [1]

Dan Radu

Soluţia autorului. Presupunând $M \neq \emptyset$, să notăm cu $m_0 = \inf M > 1$. Să observăm, mai întâi, că pentru $x = 0$ avem $f(0) = m_0^2 f(0)$ şi cum $m_0 > 1$, rezultă $f(0) = 0$.

Să presupunem acum, prin absurd, că $m_0 > 2$. Vom deosebi două cazuri:

Cazul I: $m_0 = 2p$. Atunci, ţinând seama de proprietatea lui m_0, de inegalitatea din enunţ şi de rezultatul stabilit la problema **234**, vom avea:

$$4p^2 f(x) = f(2px) = f(px+px) + f(px-px) \leq 2f(px) + 2f(px) = 4f(px) \leq 4p^2 f(x),$$

de unde rezultă $f(px) = p^2 f(x)$, ceea ce contrazice minimalitatea lui m_0.

Cazul II: $m_0 = 2p+1$. Atunci, uzând de aceleaşi argumente, vom avea:

$$\left(4p^2+4p+2\right) f(x) = (2p+1)^2 f(x) + f(x) = f((2p+1)x) + f(x) =$$
$$= f\left((p+1)x + px\right) + f\left((p+1)x - px\right) \leq$$
$$\leq 2f\left((p+1)x\right) + 2f(px) \leq 2(p+1)^2 f(x) + 2p^2 f(x) = \left(4p^2+4p+2\right) f(x)$$

şi deci

$$\left(2p^2+2p+1\right) f(x) = f\left((p+1)x\right) + f(px). \qquad (1)$$

Pe de altă parte

$$f\left((p+1)x\right) + f(px) \leq f\left((p+1)x\right) + p^2 f(x) \qquad (2)$$

şi deci, din (1) şi (2), rezultă

$$(p+1)^2 f(x) \leq f\left((p+1)x\right). \qquad (3)$$

Cum, conform problemei **234**, avem şi

$$f\left((p+1)x\right) \leq (p+1)^2 f(x),$$

urmează $f\left((p+1)x\right) = (p+1)^2 f(x)$, ceea ce contrazice, din nou, minimalitatea lui m_0.

Cu aceasta demonstraţia este încheiată.

Nota redacţiei. Soluţii corecte ale problemei am primit de la domnii *Marian Tetiva*, profesor la Colegiul Naţional Gheorghe Roşca-Codreanu din Bârlad , *Róbert Szász*, Universitatea Sapientia din Târgu-Mureş, precum şi de la *Benedict G. Niculescu*, profesor la Colegiul de Poştă şi Telecomunicaţii Gh. Airinei din Bucureşti.

239. *Se ştie că orice divizor prim q al unui număr Fermat $F_n = 2^{2^n} + 1$ este de forma $2^{n+2}k + 1$ (k fiind un număr natural). Fie q un asemenea divizor al lui F_n, astfel încât q^2 nu divide pe F_n şi k este impar.* [2]

Atunci $2^{q-1} \not\equiv 1 \pmod{q^2}$ şi ordinul clasei lui 2 în $\mathbb{Z}_{q^2}$ se divide cu q.

Marian Tetiva

Soluţia autorului. Putem scrie pe $2^{q-1} - 1$ în forma

$$2^{2^{n+2}k} - 1 = (2^k - 1)(2^k + 1)(2^{2k} + 1) \cdots (2^{2^n k} + 1)(2^{2^{n+1}k} + 1);$$

conform teoremei lui *Fermat*, una dintre aceste paranteze se divide cu q: este vorba de penultima, deoarece q divide pe $2^{2^n} + 1$ şi, k fiind impar,

$$2^{2^n k} + 1 = (2^{2^n} + 1)(2^{2^n (k-1)} - 2^{2^n (k-2)} + \cdots + 2^{2^n \cdot 2} - 2^{2^n} + 1).$$

[1] În enunţul problemei, apărut în G. M. -A nr. 2/2007, dintr-o eroare, în loc de „$M \neq \emptyset$“ a apărut „$M = \emptyset$“. Facem cuvenita rectificare. (N. R.)

[2] Dintr-o regretabilă eroare, în enunţul problemei apărut în G. M. - A nr. 2/2007 apare „$2^{2n+2}k + 1$“ în loc de „$2^{n+2}k + 1$“ cum este corect. Facem cuvenita rectificare. (N. R.)

Datorită ipotezei, q este factor al lui $2^{2^n}+1$, pe când q^2 nu este. Avem

$$2^{2^n} \equiv -1 \pmod q$$

deci

$$2^{2^n j} \equiv (-1)^j \pmod q,$$

deci a doua paranteză este congruentă cu k modulo q; aşadar (k şi q fiind prime între ele) factorul q apare doar o dată în descompunerea în factori primi a lui $2^{2^n k}+1$.

Pentru că $2^{2^n k} \equiv -1 \pmod q$, obţinem $2^{2^{n+1}k} \equiv 1 \pmod q$, deci nici ultimul factor al lui $2^{2^{n+2}k}-1$ (ultima paranteză) nu se divide cu q. În ce priveşte factorii dinaintea lui $2^{2^n k}+1$, nici aceştia nu sunt divizibili cu q. Aceasta deoarece oricare dintre relaţiile $2^k \equiv 1 \pmod q$ sau $2^{2^j k} \equiv -1 \pmod q$ (pentru $j<n$) implică $2^{2^n k} \equiv 1 \pmod q$, dar noi deja am văzut că $2^{2^n k} \equiv$ $\equiv -1 \pmod q$ (şi q este impar, deci $1 \not\equiv -1 \pmod q$). Astfel am arătat că q apare cu exponentul exact 1 în descompunerea lui $2^{q-1}-1$ în factori primi, deci $2^{q-1} \not\equiv 1 \pmod{q^2}$.

Pentru ultima afirmaţie, fie d ordinul clasei lui 2 în grupul unităţilor lui $\mathbb{Z}_{q^2}$, care trebuie să dividă pe $\varphi(q^2)=q(q-1)$ (cu φ notăm indicatorul lui *Euler*), datorită teoremei lui *Euler*: $2^{\varphi(q^2)} \equiv 1 \pmod{q^2}$. Pe baza celor demonstrate anterior d nu divide pe $q-1$, dar divide pe $q(q-1)$; desigur, aceasta înseamnă că d are factorul q.

Observaţie. Deoarece $2^{q-1}-1$ nu se divide cu q^2, nu se divide nici cu vreo putere q^s cu exponent $s \geq 2$. Cum $\varphi(q^s)=q^{s-1}(q-1)$, rezultă cu acelaşi raţionament că ordinul clasei lui 2 în $\mathbb{Z}_{q^s}$ $(s \geq 2)$ este divizibil cu q.

Nota redacţiei. O soluţie corectă a problemei am primit de la domnul *Róbert Szász*, Universitatea Sapientia din Târgu-Mureş, precum şi de la *Benedict G. Niculescu*, profesor la Colegiul de Poştă şi Telecomunicaţii Gh. Airinei din Bucureşti.

240. *Fie a, b şi x numere pozitive astfel încât $x=\sqrt{ab} \geq 1$. Să se arate că, pentru orice k număr natural, are loc inegalitatea*

$$\frac{1}{1+a+\ldots+a^k}+\frac{1}{1+b+\ldots+b^k} \geq \frac{2}{1+x+\ldots+x^k}.$$

Vasile Cîrtoaje

Soluţia autorului. Vom utiliza metoda inducţiei. Pentru $k=1$, avem

$$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}-\frac{2}{1+x}=\frac{1}{1+a}+\frac{a}{a+x^2}-\frac{2}{1+x}=\frac{(x-1)(x-a)^2}{(1+a)(a+x^2)(1+x)} \geq 0.$$

În continuare, considerăm inegalitatea adevărată pentru $k-1$, $k \geq 2$, adică:

$$\left[2+(a+b)+\ldots+\left(a^{k-1}+b^{k-1}\right)\right]\left(1+x+\ldots+x^{k-1}\right) \geq$$
$$\geq 2\left(1+a+\ldots+a^{k-1}\right)\left(1+b+\ldots+b^{k-1}\right)$$

şi arătăm că este adevărată pentru k, adică

$$\left[2+(a+b)+\ldots+\left(a^k+b^k\right)\right]\left(1+x+\ldots+x^k\right) \geq 2\left(1+a+\ldots+a^k\right)\left(1+b+\ldots+b^k\right).$$

Valorificând ipoteza de inducţie, rămâne să arătăm că

$$\left[2+(a+b)+\ldots+\left(a^{k-1}+b^{k-1}\right)\right]x^k+\left(a^k+b^k\right)\left(1+x+\ldots+x^{k-1}\right)+\left(a^k+b^k\right)x^k \geq$$
$$\geq 2\left(1+a+\ldots+a^{k-1}\right)b^k+2a^k\left(1+b+\ldots+b^{k-1}\right)+2a^kb^k.$$

Introducând notaţia

$$E_i=\left(a^i+b^i\right)x^k+\left(a^k+b^k\right)x^i-2a^ib^k-2a^kb^i,$$

inegalitatea poate fi scrisă astfel

$$E_0+E_1+\ldots+E_{k-1}+\frac{1}{2}E_k \geq 0.$$

Pentru demonstrarea acestei inegalităţi, vom arăta că

$$E_0+\frac{1}{2}E_k\geq 0;$$

$$E_i+E_{k-i}\geq 0\quad 1\leq i\leq\frac{k}{2};$$
$$E_{k/2}\geq 0,\qquad k-\text{par}.$$

Avem

$$E_0=2x^k-a^k-b^k,\quad \frac{1}{2}E_k=\left(a^k+b^k\right)x^k-2a^kb^k=\left(a^k+b^k-2x^k\right)x^k,$$

$$E_0+\frac{1}{2}E_k=\left(a^k+b^k-2x^k\right)\left(x^k-1\right)\geq 0.$$

Deoarece $a^k+b^k\geq 2\sqrt{a^kb^k}=2x^k$, rezultă $E_0+\frac{1}{2}E_k\geq 0$.

În vederea demonstrării inegalităţii $E_i+E_{k-i}\geq 0$, pentru $i<\frac{k}{2}$, avem

$$E_i=a^i\left(x^k-b^k\right)+b^i\left(x^k-a^k\right)+a^k\left(x^i-b^i\right)+b^k\left(x^i-a^i\right)=$$
$$=a^i\left(x^k-\frac{x^{2k}}{a^k}\right)+\frac{x^{2i}}{a^i}\left(x^k-a^k\right)+a^k\left(x^i-\frac{x^{2i}}{a^i}\right)+\frac{x^{2k}}{a^k}\left(x^i-a^i\right)=$$
$$=a^i\left(x^k-\frac{x^{2k}}{a^k}\right)+\frac{x^{2i}}{a^i}\left(x^k-a^k\right)+a^k\left(x^i-\frac{x^{2i}}{a^i}\right)+\frac{x^{2k}}{a^k}\left(x^i-a^i\right)=$$
$$=\frac{x^i}{a^k}\left(x^i-a^i\right)\left(x^{2k-i}-a^{2k-i}\right)-\frac{x^{2i}}{a^{k-i}}\left(x^k-a^k\right)\left(x^{k-2i}-a^{k-2i}\right),$$

deci

$$E_i\geq-\frac{x^{2i}}{a^{k-i}}\left(x^k-a^k\right)\left(x^{k-2i}-a^{k-2i}\right).$$

În mod similar,

$$E_{k-i}\geq-\frac{x^{2k-2i}}{a^i}\left(x^k-a^k\right)\left(x^{2i-k}-a^{2i-k}\right)=\frac{x^k}{a^{k-i}}\left(x^k-a^k\right)\left(x^{k-2i}-a^{k-2i}\right).$$

Rezultă

$$E_i+E_{k-i}\geq-\frac{x^{2i}}{a^{k-i}}\left(x^k-a^k\right)\left(x^{k-2i}-a^{k-2i}\right)+\frac{x^k}{a^{k-i}}\left(x^k-a^k\right)\left(x^{k-2i}-a^{k-2i}\right)=$$
$$=\frac{x^{2i}}{a^{k-i}}\left(x^{k-2i}-1\right)\left(x^k-a^k\right)\left(x^{k-2i}-a^{k-2i}\right)\geq 0.$$

În cazul k par, anume $k=2j$, avem

$$E_{k/2}=E_j=\left(a^j+b^j\right)x^{2j}+\left(a^{2j}+b^{2j}\right)x^j-2\left(a^j+b^j\right)x^{2j}=\left[a^{2j}+b^{2j}-\left(a^j+b^j\right)x^j\right]x^j=$$
$$=\left[a^{2j}+b^{2j}-\left(a^j+b^j\right)a^{j/2}b^{j/2}\right]x^j=\left(a^{j/2}-b^{j/2}\right)\left(a^{3j/2}-b^{3j/2}\right)x^j\geq 0.$$

Cu aceasta, inegalitatea este demonstrată. Pentru $k=1$, avem egalitate în cazurile $ab=1$ sau $a=b$, iar pentru $k\geq 2$, avem egalitate în cazul $a=b$.

Soluţie dată de *Ilie Bulacu*, matematician la Erhardt+Leimer PTS, Bucureşti. Vom demonstra inegalitatea din enunţ în 3 paşi.

Pasul 1. Vom arăta că funcţia $f(x)=\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x+\ldots+\mathrm{e}^{kx}}$, $k\in\mathbb{N}^*$, este convexă pentru $x\geq 0$, adică

$$f''(x)\geq 0,\quad \forall\, x\geq 0.$$

Prin calcul, rezultă imediat următoarele expresii pentru derivatele funcţiei $f(x)$:

$$f'(x)=-\frac{\mathrm{e}^x+2\mathrm{e}^{2x}+\ldots+k\mathrm{e}^{kx}}{\left(1+\mathrm{e}^x+\ldots+\mathrm{e}^{kx}\right)^2},\quad k\in\mathbb{N}^*,$$

$$f''(x) = \frac{2\left(e^x + 2e^{2x} + \ldots + ke^{kx}\right)^2 - \left(1^2e^x + 2^2e^{2x} + \ldots + k^2e^{kx}\right)\left(1 + e^x + \ldots + e^{kx}\right)}{\left(1 + e^x + \ldots + e^{kx}\right)^3}, \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

Notând $e^x = y$, inegalitatea $f''(x) \geq 0$, pentru $x \geq 0$, se reduce la inegalitatea

$$2\left(y + 2y^2 + \ldots + ky^k\right)^2 \geq \left(1^2y + 2^2y^2 + \ldots + k^2y^k\right)\left(1 + y + \ldots + y^k\right), \quad k \in \mathbb{N}^*, \quad y \geq 1.$$

Vom demonstra această inegalitate prin inducţie după k.

Pentru $k = 1$ inegalitatea devine $2y^2 \geq y(1 + y)$, oricare ar fi $y \geq 1$, care este evident adevărată.

Presupunem că inegalitatea este adevărată pentru k şi arătăm că este adevărată pentru $k + 1$.

Ţinând cont de ipoteza de inducţie şi împărţind cu y^{k+1}, avem succesiv:

$$2\left[y + 2y^2 + \ldots + (k + l)y^{k+1}\right]^2 \geq \left[1^2y + 2^2y^2 + \ldots + (k + 1)^2y^{k+1}\right]\left(1 + y + \ldots + y^{k+1}\right),$$

$$k \in \mathbb{N}^*, \quad \forall\, y \geq 1 \Leftrightarrow 2(k + 1)^2y^{2(k+1)} + 4(k + 1)\left(y + 2y^2 + \ldots + ky^k\right)y^{k+1} \geq$$

$$\geq (k+1)^2\left(1 + y + \ldots + y^k\right)y^{k+1} + \left(1^2y + 2^2y^2 + \ldots + k^2y^k\right)y^{k+1} + (k+1)^2y^{2(k+1)}, \ k \in \mathbb{N}^*, \ \forall\, y \geq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2(k + 1)^2y^{k+1} + 4(k + 1)\left(y + 2y^2 + \ldots + ky^k\right) \geq$$

$$\geq (k + 1)^2\left(1 + y + \ldots + y^k\right) + \left(1^2y + 2^2y^2 + \ldots + k^2y^k\right) + (k + 1)y^{k+1)}, \quad k \in \mathbb{N}^*, \quad \forall\, y \geq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (k + 1)^2\left(y^{k+1} - 1\right) - \left[(k + 1)^2 - 4(k + 1) + 1^2\right]y - \ldots - \left[(k + 1)^2 - 4k(k + 1) + k^2\right]y^k \geq 0,$$

$$k \in \mathbb{N}^*, \quad \forall\, y \geq 1 \Leftrightarrow (k + 1)^2\left(y^{k+1} - 1\right) + a_1y + a_2y^2 + \ldots + a_ky^k \geq 0, \quad k \in \mathbb{N}^*, \quad \forall\, y \geq 1,$$

unde

$$a_i = 3(k + 1)^2 - [2(k + 1) - i]^2, \quad i \in \{1, \ldots, k\}. \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

Deoarece $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$, $k \in \mathbb{N}^*$ şi $y \leq y^2 \leq \ldots \leq y^k$, $k \in \mathbb{N}^*$, pentru orice $y \geq 1$, conform cu inegalitatea lui *Cebâşev*, obţinem:

$$k\left(a_1y + a_2y^2 + \ldots + a_ky^k\right) \geq (a_1 + a_2 + \ldots + a_k)\left(y + y^2 + \ldots + y^k\right), \quad k \in \mathbb{N}^* \quad \text{şi } y \geq 1.$$

Prin urmare, este suficient să arătăm că $a_1 + a_2 + \ldots + a_k \geq 0$, $k \in \mathbb{N}^*$. Într-adevăr, avem

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_k = 3k(k + 1)^2 - [2(k + 1) - 1]^2 - [2(k + 1) - 2]^2 - \ldots - [2(k + 1) - k]^2 =$$

$$= 3k(k + 1)^2 - 4k(k + 1)^2 + 4(k + 1)(1 + 2 + \ldots + k) - \left(1^2 + 2^2 + \ldots + k^2\right) =$$

$$= k(k+1)^2 + 2k(k+1)^2 - \frac{k(k + 1)(2k + 1)}{6} = k(k+1)^2 - \frac{k(k + 1)(2k + 1)}{6} = \frac{k(k + 1)(4k + 5)}{6} > 0,$$

$k \in \mathbb{N}^*$.

Aşadar

$$(k + 1)^2\left(y^{k+1} - 1\right) + a_1y + a_2y^2 + \ldots + a_ky^k \geq 0, \quad k \in \mathbb{N}^*, \quad \forall\, y \geq 1.$$

Pasul 2. Arătăm că inegalitatea din enunţ este adevărată pentru a, b numere reale pozitive astfel încât $0 < a \leq 1 \leq b$ şi $ab = 1$.

Prin urmare, vom demonstra următoarea inegalitate:

$$\frac{1}{1 + a + \ldots + a^k} + \frac{1}{1 + b + \ldots + b^k} \geq \frac{2}{k + 1}, \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

Egalitate avem dacă şi numai dacă $a = b = 1$.

Într-adevăr, înlocuind pe a cu $\frac{1}{b}$, această inegalitate se scrie succesiv:

$$\frac{b^k + 1}{1 + b + \ldots + b^k} \geq \frac{2}{k + 1}, \ k \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow (k-1)b^k - 2\left(b^{k-1} + b^{k-1} + \ldots + b^2 + b\right) + (k-1) \geq 0, \ k \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (b-1)^2\left[(k - 1)b^{k-2} + 2(k - 2)b^{k-3} + 3(k - 3)b^{k-4} + 4(k - 4)b^{k-5} + \ldots + 2(k - 2)b + (k - 1)\right] \geq 0,$$

$k \in \mathbb{N}^*$, ceea ce este, evident, adevărat. În plus, egalitate avem dacă şi numai dacă $b = 1$.

Observaţie. Această inegalitate poate fi demonstrată şi astfel: considerăm funcţia

$$h(b) = (k-1)b^k - 2\left(b^{k-1} + b^{k-2} + \ldots + b^2 + b\right) + (k-1) \geq 0, \quad k \in \mathbb{N}^*, \quad b \geq 1$$

şi arătăm că h este o funcţie crescătoare pentru $b \geq 1$, de unde rezultă ca $h(b) \geq h(1) = 0$. Într-adevăr:

$$h'(b) = k(k-1)b^{k-1} - 2(k-1)b^{k-2} - 2(k-2)b^{k-3} - \ldots - 2 \cdot 2b - 2 \geq 0, \ k \in \mathbb{N}^*,$$

deoarece

$$h'(b) = (b-1)\left[k(k-1)b^{k-2} + (k-1)(k-2)b^{k-3} + (k-2)(k-3)b^{k-4} + \ldots + 3 \cdot 2b + 2 \cdot 1\right] \geq 0,$$

$k \in \mathbb{N}^*$.

O altă metodă de a arăta că $h'(b) \geq 0$, pentru orice $b \geq 1$, se bazează pe inegalitatea lui *Cebâşev* aplicată şirurilor $a_1 > a_2 > \ldots > a_{k-1}$, $k \in \mathbb{N}^*$ şi $1 \leq b \leq b^2 \leq b^{k-3} \leq b^{k-2}$, $k \in \mathbb{N}^*$, unde $a_i = 2(k-i)$, $i \in \{1, \ldots (k-1)\}$, $k \in \mathbb{N}^*$.

Prin urmare:

$$2(k-1)b^{k-2} + 2(k-2)b^{k-3} + \ldots + 2 \cdot 2b + 2 \leq \frac{k(k-1)}{(k-1)}(k-1)b^{k-1} = k(k-1)b^{k-1}, \quad k \in \mathbb{N}^*, \quad \forall\, b \geq 1.$$

Pasul 3. Aplicăm corolarul teoremei funcţiilor "right-convex" (RCF-Corollary, [1]) funcţiei

$$f(t) = \frac{1}{1 + t + \ldots + t^k}, \ k \in \mathbb{N}^*, \ t > 0.$$

Conform acestui corolar, dacă funcţia $f_1(x) = f(\mathrm{e}^x)$ este convexă pentru $x \geq \ln r$, $r > 0$ şi dacă inegalitatea $f(a) + f(b) \geq 2f(\sqrt{ab})$ este adevărată pentru a, b numere reale pozitive astfel încât $0 < a \leq r \leq b$ şi $\sqrt{ab} = r$, atunci inegalitatea $f(a) + f(b) \geq 2f(\sqrt{ab})$ are loc pentru a, b numere reale pozitive astfel încât $\sqrt{ab} \geq r$. În cazul nostru luăm $r = 1$ şi ţinând cont de rezultatele de mai sus, inegalitatea din enunţ este demonstrată.

Bibliografie

[1] V. Cîrtoaje, *Algebraic inequalities. Old and New Methods*, GIL Publishing House, Zalău, 2006.

Soluţie dată de *Róbert Szász*, Universitatea Sapientia din Târgu-Mureş. Fie $a, b \in (0, \infty)$, $ab = x^2 \geq 1$. Definim funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ astfel

$$f(t) = \frac{1}{1 + t + t^2 + \ldots + t^k} + \frac{1}{1 + \frac{x^2}{t} + \left(\frac{x^2}{t}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{x^2}{t}\right)^k}.$$

Inegalitatea de demonstrat este echivalentă cu

$$f(a) \geq f(x). \tag{1}$$

Fără a restrânge generalitatea putem presupune că $a \geq x$.

Vom demonstra că funcţia f este crescătoare pe intervalul $[x, a]$, de unde va rezulta inegalitatea (1).

Derivata funcţiei f este

$$tf'(t) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} i\left(\frac{x^2}{t}\right)^i}{\left(\sum\limits_{i=1}^{k}\left(\frac{x^2}{t}\right)^i\right)^2} - \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} it^i}{\left(\sum\limits_{i=1}^{k} t^i\right)^2}$$

şi, dacă introducem notaţia

$$g(t) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} it^i}{\left(\sum\limits_{i=1}^{k} t^i\right)^2},$$

atunci obţinem egalitatea

$$tf'(t) = g\left(\frac{x^2}{t}\right) - g(t). \tag{2}$$

Vom arăta că, dacă $t \in [x, a]$, atunci

$$g\left(\frac{x^2}{t}\right) \geq g(t) \tag{3}$$

şi acest rezultat, conform lui (2), va implica

$$f(t) \geq 0, \quad \forall\, t \in [x, a].$$

Derivata funcţiei $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definiă prin

$$g(t) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} it^i}{\sum\limits_{i=1}^{k} t^i}$$

este

$$g'(t) = \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{k} i^2 t^{i-1}\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{k} t^i\right) - 2\left(\sum\limits_{i=1}^{k} it^{i-1}\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{k} it^i\right)}{\left(\sum\limits_{i=1}^{k} t^i\right)^3}.$$

Considerăm polinoamele

$$P_1(t) = \left(\sum_{i=1}^{k} i^2 t^{i-1}\right)\left(\sum_{i=1}^{k} t^i\right) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_{2k-1} t^{2k-1},$$

$$P_2(t) = 2\left(\sum_{i=1}^{k} it^{i-1}\right)\left(\sum_{i=1}^{k} it^i\right) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \ldots + b_{2k-1} t^{2k-1}$$

şi

$$Q(t) = P_1(t) - P_2(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \ldots + c_{2k-1} t^{2k-1}.$$

Observăm că:

$$g'(t) = \frac{Q(t)}{\left(\sum\limits_{i=1}^{k} t^i\right)^3}, \tag{4}$$

$$a_i = \sum_{j=0}^{i} (j+1)^2 = \frac{(i+1)(i+2)(2i+3)}{6}, \quad i = \overline{0, k-1},$$

$$a_{k+i} = \sum_{j=i+1}^{k} j^2 = \frac{(k-i)(2k^2 + 2ki + 2i^2 + 3k + 3i + 1)}{6}, \quad i = \overline{0, k-1},$$

$$b_i = 2\sum_{j=0}^{i} (i-j)(j+1) = \frac{i(i+1)(i+2)}{3}, \quad i = \overline{0, k-1},$$

$$b_{k+i} = 2\sum_{j=0}^{k-i-1} (k-j)(i+j+1) = \frac{(k-i)(k^2 + 4ki + 3k + i^2 + 3i + 2)}{3}, \quad i = \overline{0, k-1}.$$

Un calcul simplu ne arată că $a_i > b_i$, $i = \overline{0, k-1}$ şi $a_{k+i} < b_{k+i}$, $i = \overline{0, k-1}$, iar de aici obţinem că primii k coeficienţi ai polinomului Q sunt pozitivi, iar următorii k coeficienţi sunt negativi ($c_i > 0$, $c_{k+i} < 0$, $i = \overline{0, k-1}$.)

În polinomul Q spunem că avem o schimbare de semn, dacă există un indice $j \in \{0, 1, 2, \ldots, 2k-1\}$ pentru care avem $c_i c_{i+1} < 0$.

Evident, numărul schimbărilor de semne în polinomul Q este egal cu numărul indicilor $i \in \{0, 1, 2, \ldots, 2k-1\}$, pentru care are loc inegalitatea $c_i c_{i+1} < 0$.

O teoremă a lui *Déscartes* ne spune că numărul rădăcinilor pozitive ale unui polinom cu coeficienţi reali este cel mult egal cu numărul schimbărilor de semne în polinom (vezi volumul *Polinoame şi ecuaţii algebrice* de L. Panaitopol, I. C. Drăghicescu, Editura Albatros, 1980, pag. 94).

Conform acestei teoreme, polinomul Q are cel mult o rădăcină pozitivă şi cum $Q(0) > 0$ şi $Q(1) < 0$, rezultă că polinomul Q are exact o rădăcină pozitivă şi această rădăcină t_0 este în intervalul $(0, 1]$.

Din observaţiile precedente deducem că $Q(t) > 0$, $t \in [0, t_0)$ şi $Q(t) < 0$, $t \in (t_0, \infty)$, iar egalitatea (4) implică

$$g'(t) > 0, \quad t \in [0, t_0), \quad g'(t) < 0, \quad t \in [t_0, a). \tag{5}$$

Dacă $t \in [x, a]$, atunci, din (5), deducem că funcţia g creşte pe intervalul $\left[\frac{1}{t}, t_0\right)$ şi descreşte pe $[t_0, t]$ (în cazul $\frac{1}{t} < t_0$) şi funcţia g descreşte pe intervalul $\left[\frac{1}{t}, t\right]$ (în cazul $\frac{1}{t} > t_0$).

Cum

$$g\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} i t^{2k-i}}{\left(\sum\limits_{i=1}^{k} t^i\right)^2} > \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} i t^{i}}{\left(\sum\limits_{i=1}^{k} t^i\right)^2} = g(t),$$

rezultă că

$$\inf\left\{ g(s) \middle| \, s \in \left[\frac{1}{t}, t\right]\right\} = g(t). \tag{6}$$

Condiţia $x \geq 1$ implică $\frac{x^2}{t} \in \left[\frac{1}{t}, t\right]$) şi deci, conform lui (6), avem $g\left(\frac{x^2}{t}\right) \geq g(t)$, adică (3) este adevărată.

Din acest rezultat şi din (2) obţinem că $f'(t) > 0$, $t \in [x, a]$, care înseamnă că are loc (1).

Nota redacţiei. Soluţie corectă ne-a transmis şi domnul *Marius Olteanu* – S. C. Hidroconstrucţia S.A. Bucureşti, sucursala „Olt-Superior“ din Râmnicu-Vâlcea.

241. *Să se determine* $\alpha \in \mathbb{R}$ *ştiind că*

$$L = \lim_{n \to \infty} n^{\alpha} \int_0^1 \sin^{2n} \frac{\pi x}{2} \, \mathrm{d}x \in (0, \infty).$$

Să se calculeze L *în acest caz.*

Gheorghe Szöllösy

Soluţia autorului. Vom începe prin a enunţa două leme:

Lema 1. (cunoscută) Dacă $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ admite derivată continuă, atunci

$$\lim_{n \to \infty} n \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - \int_0^1 f(x) \mathrm{d}x \right) = \frac{1}{2} \left(f(1) - f(0) \right). \tag{1}$$

Lema 2. Avem

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n! \mathrm{e}^n}{n^n \sqrt{2n\pi}} = 1.$$

(se deduce uşor din formula lui *Stirling*).

Fie

$$I_n = \int_0^1 \sin^{2n} \frac{\pi x}{2} \mathrm{d}x.$$

Este evident că există cel mult un număr α pentru care $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\alpha} I_n \in (0,\infty)$. (Presupunând că $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\alpha_0} I_n = \beta \in (0,\infty)$, pentru $\alpha \neq \alpha_0$ arbitrar, avem

$$\lim_{n\to\infty} n^{\alpha} I_n = \beta \lim_{n\to\infty} n^{\alpha-\alpha_0} = \begin{cases} 0, & \text{dacă} \quad \alpha < \alpha_0 \\ \infty, & \text{dacă} \quad \alpha > \alpha_0 \end{cases};\Big)$$

Vom arăta că $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} I_n = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$.

Deoarece

$$I_n = \frac{2n-1}{2n} I_{n-1},$$

pentru orice $n \geq 1$, iar

$$I_0 = 1,$$

avem

$$I_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}},$$

deci rămâne de arătat că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\binom{2n}{n}\sqrt{n}}{2^{2n}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

Aplicând Lema 1, pentru $f(x) = \ln(1+x)$ $\left(\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 2\ln 2 - 1\right)$, obţinem

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right) - 2n\ln 2 + n \right) = \frac{1}{2}\ln 2$$

şi apoi

$$\lim_{n\to\infty} \left(\ln \frac{(2n)!}{n!n^n} - \ln 2^{2n} + \ln \mathrm{e}^n - \ln\sqrt{2} \right) = 0,$$

de unde

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!\mathrm{e}^n}{n!n^n 2^{2n}\sqrt{2}} = 1,$$

adică

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!\mathrm{e}^n}{n^n\sqrt{2n\pi}} \cdot \frac{\binom{2n}{n}\sqrt{2n\pi}}{2^{2n}\sqrt{2}} = 1,$$

de unde, folosind Lema 2, avem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\binom{2n}{n}\sqrt{n}}{2^{2n}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

În concluzie, $\lim\limits_{n\to\infty} I_n \in (0,\infty)$ dacă şi numai dacă $\alpha = \dfrac{1}{2}$, iar $L = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} I_n = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$.

Soluţie dată de *Marian Tetiva*, profesor la Colegiul Naţional Gheorghe Roşca-Codreanu din Bârlad. Avem, cu o schimbare de variabilă simplă,

$$\int_0^1 \sin^{2n} \frac{\pi x}{2} \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} t\mathrm{d}t,$$

iar pentru integralele $I_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} t\mathrm{d}t$ obţinem printr-un procedeu standard de integrare prin părţi formula de recurenţă

$$I_n = \frac{2n-1}{2n} I_{n-1},$$

care conduce imediat la
$$I_n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} I_0 = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2}$$
(unde prin $(2n-1)!!$, respectiv $(2n)!!$, înţelegem produsul tuturor numerelor întregi pozitive impare, respectiv pare, până la $2n-1$, respectiv $2n$). Atunci
$$L = \lim_{n\to\infty} n^\alpha \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = \lim_{n\to\infty} n^{\alpha-\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{n}{n+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \sqrt{n+\frac{1}{2}} = \begin{cases} 0, & \alpha < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}, & \alpha = \frac{1}{2} \\ \infty, & \alpha > \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Am ţinut seama de formula lui *Wallis*
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot 4\cdot\dots\cdot(2n)}{1\cdot 3\cdot\dots\cdot(2n-1)} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$
pe care am rescris-o în forma
$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\sqrt{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

Astfel, vedem că valoarea lui α cerută în enunţul problemei este $\alpha = \frac{1}{2}$, pentru care limita este $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

Nota redacţiei. Soluţii principial identice cu cea dată de d-l *Marian Tetiva* ne-au mai fost trimise de domnii *Nicuşor Minculete* – Universitatea Dimitrie Cantemir din Braşov, *Marius Olteanu* – S. C. Hidroconstrucţia S.A. Bucureşti, sucursala „Olt-Superior" din Râmnicu-Vâlcea şi *Róbert Szász*, Universitatea Sapientia din Târgu-Mureş, precum şi de la *Benedict G. Niculescu*, profesor la Colegiul de Poştă şi Telecomunicaţii Gh. Airinei din Bucureşti.

242. *Să se arate că*

a) $r_a^n \sin\frac{A}{2} + r_b^n \sin\frac{B}{2} + r_c^n \sin\frac{C}{2} \geq \frac{3}{2}\left(\frac{p\sqrt{3}}{3}\right)^n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$;

b) $2(4R+r)^2(2R-r) \geq p^2(11R-4r)$,

unde notaţiile sunt cele uzuale într-un triunghi.

Nicuşor Minculete

Soluţia autorului. Pentru $n=1$ avem de demonstrat inegalitatea
$$r_a \sin\frac{A}{2} + r_b \sin\frac{B}{2} + r_c \sin\frac{C}{2} \geq \frac{p\sqrt{3}}{2}. \tag{1}$$

Cum $r_a = p\,\mathrm{tg}\frac{A}{2}$, $r_b = p\,\mathrm{tg}\frac{B}{2}$, $r_c = p\,\mathrm{tg}\frac{C}{2}$, inegalitatea (1) devine
$$\sum r_a \sin\frac{A}{2} = p\sum \mathrm{tg}\frac{A}{2}\sin\frac{A}{2} \geq \frac{p\sqrt{3}}{2},$$
adică
$$\sum \mathrm{tg}\frac{A}{2}\sin\frac{A}{2} \geq \frac{\sqrt{3}}{2},$$
ceea ce este evident, deoarece funcţia $f\left(0,\frac{\pi}{2}\right) \to \infty$, $f(x) = \mathrm{tg}x\cdot\sin x$, este convexă întrucât $f''(x) \geq 0$, pentru orice $x \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ şi, din inegalitatea lui *Jensen*, avem
$$\sum \mathrm{tg}\frac{A}{2}\sin\frac{A}{2} \geq 3\mathrm{tg}\frac{\sum A}{6}\sin\frac{\sum A}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Fie $a \geq b \geq c$; atunci $r_a \geq r_b \geq r_c$, $\sin \frac{A}{2} \geq \sin \frac{B}{2} \geq \sin \frac{C}{2}$, ceea ce implică, cu ajutorul inegalităţii lui *Cebâşev*,

$$\sum r_a^n \sin \frac{A}{2} \geq \frac{1}{3} \sum r_a^{n-1} \cdot \sum r_a \sin \frac{A}{2} \geq \frac{1}{3} \cdot \frac{p\sqrt{3}}{2} \sum r_a^{n-1} \geq \frac{p\sqrt{3}}{2} \left(\frac{r_a + r_b + r_c}{3} \right)^{n-1} \geq$$

$$\geq \frac{p\sqrt{3}}{2} \left(\frac{p\sqrt{3}}{3} \right)^{n-1} = \frac{3}{2} \left(\frac{p\sqrt{3}}{3} \right)^n.$$

Am utilizat inegalităţile

$$\frac{x^{n-1} + y^{n-1} + z^{n-1}}{3} \geq \left(\frac{x+y+z}{3} \right)^{n-1}, \quad n \geq 1 \quad x, y, z > 0$$

şi

$$r_a + r_b + r_c = 4R + r \geq p\sqrt{3}$$

(vezi[1], pag. 25).

b) Utilizând inegalitatea (1) şi inegalitatea lui *Cauchy*, avem

$$\sum r_a^2 \cdot \sum \sin^2 \frac{A}{2} \geq \left(\sum r_a \sin \frac{A}{2} \right)^2 \geq \frac{3p^2}{4}.$$

Dar

$$\sum r_a^2 = (4R + r)^2 - 2p^2$$

([1], pag. 13) şi

$$\sum \sin^2 \frac{A}{2} = 1 - \frac{r}{2R}$$

([1], pag. 8) şi, prin urmare,

$$\left[(4R + r)^2 - 2p^2 \right] (2R - r) \geq 2R \cdot \frac{3p^2}{4},$$

de unde

$$2(2R - r)(4R + r)^2 \geq p^2(11R - 4r),$$

q.e.d.

Bibliografie

[1] N. Minculete, *Egalităţi şi inegalităţi geometrice în triunghi*, Editura Eurocarpatica, Sfântu Gheorghe, 2003.

Soluţie dată, la punctul b) al problemei, de *Marian Tetiva*, profesor la Colegiul Naţional Gheorghe Roşca-Codreanu din Bârlad.

b) Inegalitatea lui *Blundon*

$$p \leq 2R + \left(3\sqrt{3} - 4 \right) r$$

ne arată că, pentru a obţine acest punct, este suficient să demonstrăm că

$$2(4R + r)^2(2R - r) \geq \left(2R + \left(3\sqrt{3} - 4 \right) r \right)^2 (11R - 4r).$$

Un calcul simplu ne arată că aceasta se scrie echivalent

$$20R^3 + (192 - 132\sqrt{3})R^2 r + (132\sqrt{3} - 549)Rr^2 + (170 - 96\sqrt{3})r^3 \geq 0$$

sau încă

$$(R - 2r)(20R^2 + (232 - 132\sqrt{3})Rr + (48\sqrt{3} - 85)r^2) \geq 0.$$

Această din urmă inegalitate rezultă folosind inegalitatea lui *Euler* $R \geq 2r$; conform acesteia, primul factor este nenegativ, iar al doilea este mai mare decât

$$20 \cdot 4r^2 + (232 - 132\sqrt{3})2r^2 + (48\sqrt{3} - 85)r^2 = 27(17 - 8\sqrt{3})r^2 > 0,$$

ceea ce încheie demonstraţia. Desigur, am folosit şi faptul că $232 - 132\sqrt{3} > 0$.

Nota redacţiei. Soluţii corecte ale problemei au mai dat domnii *Marius Olteanu* – S. C. Hidroconstrucţia S.A. Bucureşti, sucursala „Olt-Superior" din Râmnicu-Vâlcea şi *Róbert Szász*, Universitatea Sapientia din Târgu-Mureş, precum şi domnul *Benedict G. Niculescu*, profesor la Colegiul de Poştă şi Telecomunicaţii Gh. Airinei din Bucureşti.

ISTORIA MATEMATICII

Recreaţii Ştiinţifice – 125 de ani de la apariţie[1)]

de Temistocle Bîrsan şi Dan Tiba

La 15 ianuarie 1883, la Iaşi (în tipo-litografia „Buciumului Român"), apărea primul număr al revistei „Recreaţii Ştiinţifice", publicaţie ştiinţifică adresată unei largi audienţe, o premieră în peisajul cultural românesc de la acea dată. Colectivul de entuziaşti care au pus piatra de temelie a acestei intreprinderi cu profunde reverberaţii în viaţa academică română era format din *N. Culianu*, *C. Climescu*, *I. Melik* (de la Facultatea de Ştiinte din Iaşi), *G. I. Lucescu*, *V. Paladi*, *G. I. Roşiu*, *I. D. Rallet*, *G. Zarifopol*, *I. V. Praja* şi *I.M. Dospinescu* (profesori la diferite licee şi şcoli din Iaşi. Colaboratori regulaţi au fost şi *M. Tzony*, *V. C. Buţureanu*, *A. Scriban* de la Universitatea din Iaşi.

Noua publicaţie a avut ca model reviste de prestigiu ce apăreau în ţările cu tradiţie îndelungată din Europa, din care s-au preluat, în timp, articole şi probleme: „Analele lui Gergonne" (Franţa), „Mathesis" (Gand, Belgia – a nu se confunda cu societatea italiană cu acelaşi nume fondată la Torino în 1895), „Journal de mathematiques élémentaires" (Paris), „Revue Scientifique" etc.

Revista a apărut lunar, fără întrerupere, timp de şase ani. Iniţial, fiecare număr avea 32 de pagini, cuprinzând articole cu subiecte variate: aritmetică, algebră, geometrie, geometrie analitică, trigonometrie, calcul diferenţial şi integral, istoria matematicii, mecanică, topografie, cosmografie, astronomie, chimie, geografie sau diverse. Ulterior, s-au publicat şi numere de 24 de pagini sau numere comasate (7 şi 8, numere de vacanţă) de 48 sau 40 de pagini.

Revista a cunoscut o bună răspândire în Regatul României (în întinderea sa de atunci), primind colaborări sub formă de note, scrisori etc. din Iaşi, Bucureşti, Bacău, Botoşani, dar şi din Năsăud, Paris şi a constituit un model pentru întreprinderi similare ulterioare, cum ar fi cunoscuta Gazeta Matematică.

Ca „profesie de credinţă" a inimosului colectiv de editori, apare scrisă o scurta adresare *Către Cititori* în prima pagina a nr.l din 1883, în care se afirmă dorinţa ca noua publicaţie să remedieze din lacunele existente în învăţământul nostru, să ofere ospitalitate profesorilor sau institutorilor care „*tratează o chestiune de ştiinţe după o metoadă proprie lui*", să încurajeze tinerimea studioasă. Cu modestie şi obiectivitate se adaugă:

„*Nu pretindem că vom produce lucrări originale. În starea în care se află ţara noatră, lucrări originale pe terenul ştiinţelor, sînt foarte greu de intreprins. Nimine nu este vinovat pentru aceasta; trebue să ne facem stagiul cuvenit.*"

Într-adevăr, câteva date sunt edificatoare în privinţa situaţiei existente atunci în ţara noastră. Imediat după Unirea Principatelor s-a înlăturat, oficial, scrierea cu alfabetul chirilic (în anul 1860 în Ţara Românească şi 1863 în Moldova), iar în scrierea cu caractere latine s-a adoptat sistemul etimologic cu utilizarea semnelor diacritice. În perioada de până la 1880, limba româna literară (modernă) şi-a încheiat procesul de unificare şi de stabilizare în forma pe care o are astăzi. Învăţământul trecea prin mari prefaceri şi frământări: înfiinţarea universităţilor din Iaşi şi Bucureşti, legea Învăţământului din 1864, numeroasele regulamente menite să organizeze reţeaua de şcoli şi să stabilească programele acestora, lipsa de manuale şi cursuri în limba română etc. Aceste dificultăţi, greutăţile materiale, cât şi lipsa unui public format pentru receptarea unei reviste ştiinţifice de acest gen fac ca actul publicării „Recreaţiilor Ştiinţifice" să fie unul temerar şi pornit dintr-o înaltă responsabilitate, pentru îndeplinirea căruia au fost necesare multă dăruire şi multe sacrificii. În vol. VI, nr. 1, se subliniază concepţia umanistă a colectivului de redacţie, abordarea conştientă a actului ştiintific şi a procesului de învăţământ de la noi:

[1)] Prezentul articol este preluat din revista „Recreaţii Matematice", anul X, nr. 1, ianuarie-iunie 2008. (N.A.)

„Credem că noi am tras cea întâi brazdă care conduce către lucrări originale. Brazda'i mică şi îngustă, dar există ! [. . .]. *Noi de la început am avut în vedere că o să trebuiască să facem sacrificiu de timp şi bani. Am făcut şi vom face acest sacrificiu.*"

În numărul 7 din anul IV este amintit rolul deosebit jucat de *Ioan Pop* (*Popp*), care „venit din Transilvania în anul 1858 a predat cel întâiu în mod sistematic şi complet ştiinţele matematice în cursul superior al Liceului din Iaşi. [. . .] *a fost un excelent profesor. A ştiut să inspire gustul ştiinţelor matematice la o mulţime din elevii lui* [. . .]" printre aceştia sunt amintiţi *Gh. Roşiu*, *M. Tzony*, *C. Climescu*, *V. Palade* ş. a.

Răsfoind numerele „Recreaţiilor Ştiinţifice", cititorul de azi va aprecia frumoasa limbă folosită acum peste o sută de ani, calitatea înaltă a materialelor incluse, dar va constata şi existenţa multor lacune în terminologia de specialitate, mai cu seamă în matematică.

Aproape în fiecare număr erau prezente rubricile de Probleme Propuse şi Probleme Rezolvate (soluţii primite de la cititori). Terminologia vremii era Probleme Rezolvite, iar rezolvitorii erau de la diferite licee şi şcoli din Iaşi (în primele luni) ca, mai apoi, să apară rezolvitori din toată Moldova (Bacău, Bârlad, Dorohoi, Focşani, Galaţi etc.), de la Bucureşti (Liceul Sf. Sava, Şcoala de Poduri şi Şosele, Şcoala Militară, Şcoala Normală Superioară), Craiova, Alexandria sau chiar de la Paris, unde îşi continuau studiile mulţi tineri români (Institutul Duvignau, Institutul Jauffret, Collège Sainte-Barbe, Liceul St. Louis). Cel mai activ rezolvitor a fost *Vasile Cristescu*, întâi elev la Liceul din Iaşi, apoi student la Şcoala de Poduri şi Şosele din Bucureşti, calitate în care a publicat şi câteva Note; ulterior, a fost membru fondator al renumitei Gazeta Matematică – înfiinţată în anul 1895, cu apariţie neîntreruptă până astăzi – şi unul dintre cei patru „stâlpi" ai acesteia. În ultimul an de apariţie a Recreaţiilor Ştiinţifice, 1888, printre rezolvitori este de remarcat prezenţa lui Dimitrie Pompeiu (1873-1954), marele matematician de mai târziu, pe atunci în vârstă de 15 ani, elev în cl. a III-a la gimnaziul din Dorohoi. Sunt numeroşi rezovitorii care au devenit apoi nume de prestigiu: *Ermil Pangrati* (profesor de geometrie descriptivă la universităţile din Iaşi şi Bucureşti, rector al celei din urmă, organizatorul Şcolii de arhitectură, deputat, ministru, senator), *Anastasie Obregia* (profesor de chimie organică, Universitatea din Iaşi), *Grigore G. Stratilescu*, *Petru N. Culianu*, *Vasile Teodoreanu* ş. a.

Unele materiale publicate sunt menite să suplinească lipsa de cărţi şi cursuri la îndemâna studenţilor şi profesorilor. *Constantin Climescu* expune, într-un ciclu de nouă articole intitulat *Câteva curbe celebre şi importante* (opt apărute în vol. II-1884 şi unul în nr. 1 din 1885), principalele curbe plane clasice: cisoida lui Diocles, concoide, cicloide, spirale etc. Începând cu nr.4 din 1885 şi continuând număr de număr (cu puţine excepţii) până la dispariţia revistei, *Miltiade Tzony* publică *Un curs de probleme*, ce cuprinde 98 de probleme de mecanică raţională (anume, statică), care sunt complet rezolvate şi însoţite de figuri (v. [8], pp. 138-140, pentru un studiu amănunţit). O expunere a determinanţilor şi utilizării lor a fost făcută de *Ion D. Rallet* în nr. 11 şi 12 din 1883 şi nr. 1 din 1884; o altă prezentare a acestora (după *O. Hesse*), ce apare în vol. V (pp. 150 şi 190), este semnată cu pseudonimul *Candide*. În [1], în notele de subsol de la pp. 239 şi 256, se aduc argumente pentru identificarea acestui pseudonim cu *Victor Costin*, pe atunci student, mai târziu profesor la universitatea din Iaşi. Un membru fondator şi constant colaborator, publicând chestiuni variate de matematică elementară este *I. V. Praja*.

Din bogatul conţinut al „Recreaţiilor Ştiinţifice", punem în evidenţă alte câteva direcţii dezvoltate în paginile sale. *G. I. Lucescu* publică un studiu amplu şi documentat despre calendar. *Vasile C. Buţureanu* semnează două lungi cicluri de articole în domeniul mineralogiei. *August Scriban* publică o serie de articole de geografia Asiei centrale. *Iacob Solomon* tratează, într-o serie de şase note din vol. VI, chestiuni de istoria matematicii în antichitate utilizând surse la zi (de exemplu, „Geschichte der Mathematik" (Istoria matematicii a lui *Moritz Cantor*, 1880).

Revista „Recreaţii Ştiinţifice" a găzduit şi traduceri (parţiale) ale unor cărţi de referinţă. *G. I. Roşiu* traduce în româneşte (după o ediţie italiană a lui *E. Betti* şi *F. Brioschi*, Florenţa, 1868) şi publică în vol. II şi III ale revistei prima carte din *Elementele* lui *Euclid*. (Precizăm că traducerea completă a „Elementelor" a fost făcută mult mai târziu de *Victor Marian* şi publicată în Biblioteca Gazetei Matematice în trei volume, 1939-1941.) Sub acelaşi pseudonim *Candide* sunt prezentate în vol. IV (nr. 4-6 şi 8-11) şi vol. V (nr. 2 şi 3) traduceri din *Geometrie der Lage* (Geometria de poziţie) a lui *Staudt*.

Rubrica „Diverse", cu scop de informare, are un conţinut bogat şi variat, acoperind toate domeniile ştiinţei. În nr. 1 din 15 ianuarie 1883, la p. 21, se preia articolul „Fotografia Mişcării" (ce anticipează cinematografia) după „Revue Scientifique" din 23 dec. 1882 – o adevărată dovadă de promptitudine şi de capacitate de selecţie. În nr. 2 din 1883, la p. 47, apare o scurtă notiţă despre înfiinţarea, la Stockholm, în 1882, a faimoasei „Acta Mathematica“ sub auspiciile regelui Suedo-Norvegiei şi sub conducerea lui *G. Mittag-Lefler*; printre colaboratori se numărau şi *Appell*, *Goursat*, *Poincaré* (din Franţa) care, mai târziu (în 1905), vor alcătui comisia care a examinat teza de doctorat a lui *Dimitrie Pompeiu*, la Sorbona [5], [6]. În nr. 9 din 1884, un articol întreg este dedicat erupţiei vulcanului Krakatoa, catastrofă care a afectat tot globul (relatare oculară). În vol.III (1885), nr.5 şi 6, două articole sunt dedicate marelui matematician belgian *Eugène-Charles Catalan* (1814 -1894), menţionându-se inclusiv celebra sa conjectură din 1844 (numerele 8 şi 9 sunt singurele numere naturale consecutive care sunt puteri exacte) rezolvată mult mai târziu, în anul 2002, de matematicianul român *Preda Mihăilescu* [12]. Vol. IV din 1885, p. 208 şi următoarele, prezintă fenomenul natural numit *mascaret* sau *pororoca*, iar la pp. 235-237 cititorul este informat asupra unor date tehnice privind proiectul turnului Eiffel cât şi asupra unor controverse contemporane generate de această construcţie.

Sunt cultivate dezbateri în jurul unor probleme din actualitatea ştiinţifică sau din realitatea învăţământului românesc. Astfel, articolul „*Sf. Gheorghe şi Paştile*“ din nr. 5, anul VI, semnat de *Paul Tanco* (din Năsăud), primul român doctor în matematici, este comentat de *Constantin Gogu*, ilustru profesor de la Universitatea din Bucureşti, care mai publică, apoi, cinci scrisori asupra regulelor întrebuinţate pentru găsirea zilei Paştilor. Menţionăm polemicile susţinute cu publicişti de la „Contemporanul“ pe teme de chimie sau astronomie (p. 139, p. 142, p. 180 în nr. 5 şi nr. 6 din 1883 etc.). Cu deosebită putere de pătrundere, *G. Zarifopol* scrie: „teorii, adeseori ipoteze gratuite, emise de un învăţat străin luate de redacţia ziarului Contemporanul ca ultimele adevăruri ale ştiinţei“. Este interesantă analiza atentă şi riguroasă făcută de *G. Lucescu* în vol. VI unui manual manuscris de Aritmetică destinat cl. I şi a II-a primară şi urmată de avizul negativ dat acestuia. Semnificativă pentru corectitudinea redacţiei este faptul că sunt publicate alăturat atât critica adusă de un referent lucrării lui *I. V. Praja* „Curs de aritmetică raţională“, Iaşi, 1885, 359 pagini, cât şi replica acestui autor (vol. VI, pp. 238-247).

Să remarcăm şi faptul că, dintre membrii fondatori, numai *N. Culianu* şi *V. Paladi* nu apar în paginile revistei cu nici un fel de contribuţie, iar *I. M. Dospinescu* publică doar un rezumat al unui articol din „Revue Scientifique“ asupra filoxerei.

Alte trăsături foarte interesante sunt rigurozitatea deosebită a activităţii publicistice, bazată pe standarde care sunt valabile şi astăzi cât şi conectarea excelentă la viaţa ştiinţifică mondială. Se manifestă o bună înţelegere a fenomenului cercetării ştiinţifice şi a evenimentelor care frământau lumea în penultimul deceniu al secolului al XIX-lea.

Redacţia acordă maximă importanţă relaţiilor directe cu cititorii, dovadă fiind publicarea de scrisori, note, a unor soluţii diferite pentru aceeaşi problemă şi a unor statistici amănunţite referitoare la rezolvitori.

Pentru toate articolele şi notele publicate se indică sursele folosite. Cu totul extraordinar este aparatul bibliografic folosit de către autori, la toate disciplinele ce fac obiectul publicaţiei. Se citează cărţi şi reviste de specialitate străine contemporane (an de apariţie chiar şi 1888), dar şi „Aritmetica“ lui *Amfilohie Hotiniul* din 1795, Iaşi sau „Memoriile Academiei din Paris“ începând cu 1699.

Semnalăm cititorilor şi prezenţa unor erori specifice epocii de pionerat (de paginaţie, de numerotare a problemelor, de tipărire etc.), corectate în parte în diverse erate de către redacţia revistei şi care nu afectează în mod esenţial lectura.

Fără nici o îndoială, revista „Recreaţii Ştiinţifice“ a fost dedicată în primul rând chestiunilor de matematică. O statistică care ia în considerare numărul de pagini arată că în aproximativ 90% din spaţiul revistei sunt tratate subiecte de matematică, mecanică şi astronomie. Numărul total al problemelor propuse, publicate în cei şase ani de apariţie, este de 298 (cu 284 fiind numerotate două probleme). În dicţionarele de periodice româneşti revista este menţionată ca o publicaţie cu o contribuţie importantă la educaţia matematică a tineretului [3, 7].

În istoria matematicii româneşti, perioada 1860-1898 este marcată de eforturile făcute în scopul organizării şi modernizării învăţământului şi punerii bazelor cercetării ştiinţifice originale. Contribuţia „Recreaţiilor ştiinţifice“ la realizarea acestui program a fost recunoscută şi apreciată de generaţiile care i-au urmat. În *Întroducerea* din nr. 1, an 1 (1895), redactorii Gazetei Matematice spun: „Mai mulţi dintre noi datoresc acest gust [pentru matematică - n. n.] revistei „Recreaţii Ştiinţifice“ ce a apărut în timp, de 6 ani la Iaşi şi pe care noi încercam a o continua“ [17]. Mai târziu, în 1935, când această revistă sărbătorea 40 ani de existenţă, *I. Ionescu*, *Gh. Ţiţeica* şi mulţi alţii aminteau rolul avut de „Recreaţii Ştiinţifice“ [9, 16]. *Gh. Ţiţeica* spunea: „*Cea dintâi încercare de a ieşi din acest impas, de a rupe cu inerţia, de a determina un curent de preocupare ştiinţifică şi de* *a crea astfel un început de atmosferă prielnică dezvoltării ştiinţei matematice, a fost făcută la Iaşi prin publicarea „Recreaţiilor Ştiinţifice"* [16, pag. 69]. Alte aprecieri ale unor distinşi matematicieni români pot fi găsite în [18]. *I. Popa* face, în 1955 ([14]), un studiu aprofundat asupra conţinutului şi aportului Recreaţiilor Ştiinţifice – numind-o *„precursoare a Gazetei Matematice"* – cu prilejul sărbătoririi a 60 de ani de apariţie a Gazetei Matematice; studiul este reluat şi în volumul omagial dedicat centenarului Universităţii din Iaşi ([15]). Monografiile [1], [11], dar şi articolele [2], [4], [13] dau cititorului noi surse de informare.

Constantin Climescu a fost, prin bogăţia şi varietatea subiectelor publicate şi sacrificiile materiale făcute, susţinătorul principal şi sufletul „Recreaţiilor Ştiinţifice". Pe coperta interioară a revistei din al VI-lea an de apariţie este scris „ *Redacţia şi Administraţia la Dl. C. Climescu, Profesor la Facultatea de Ştiinţe, Strada Butu 22*". Aceeaşi adresă apare şi în casetele ce urmează titlul în fiecare număr din acest ultim an.

Apariţia revistei „Recreaţii Ştiinţifice", învingând dificultăţi de tot felul, reprezintă un act de curaj, dăruire, înţelepciune şi clarviziune. Revista a reuşit ca, în cei şase ani de existenţă, să contribuie la ridicarea nivelului învăţământului din ţara noastră, în special al celui matematic.

Bibliografie

[1] Şt. Andonie, *Istoria matematicii în România*, vol. I, Ed. Ştiinţifică, Bucureşti, 1965, pp. 236-240.

[2] Gh. Bantaş, *O pagină din istoria matematicii româneşti: centenarul revistei „Recreaţii Ştiinţifice"*, Probleme de istoria şi filozofia ştiintei, vol. X, 1984, Filiala Iaşi a Academiei Române, pp. 15-30.

[3] Şt. Bârsănescu, F. Bârsănescu, *Educaţia, învăţământul, gândirea pedagogică din România, Dicţionar cronologic*, Ed. Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1978.

[4] T. Bîrsan, *Recreaţii Ştiinţifice – „cea întâi brazdă"*, Recreaţii Matematice, 5 (2003), pp. 1-5.

[5] T. Bîrsan, D. Tiba, *O sută de ani de la publicarea tezei de doctorat a lui Dimitrie Pompeiu*, Recreaţii Matematice VII (2005), nr. 2, pp. 85-89.

[6] T. Bîrsan, D. Tiba, *One hundred years since the introduction of the set distance by Dimitrie Pompeiu*, în IFIP, vo1.199, „System modeling and optimization", F. Ceragioli, A. Dontchev, H. Furuta, K. Marti, L. Pandolfi eds. Springer, Boston, 2006, pp. 35-39.

[7] M. Bordeianu, F. Vladcovschi, *Învăţământul românesc în date*, Junimea, Iaşi, 1979.

[8] Gh. Gheorghiev, D. Ieşan, *Miltiade Tzony – primul profesor de mecanică la Universitatea din Iaşi*, Probleme de istoria şi filozofia ştiintei, vol. X, 1984, Filiala Iaşi a Academiei Române, pp. 125-146. Apărută, într-o formă prescurtată, şi în engleză: *Miltiade Tzony - the first professor in Mechanics at the University of Iaşi*, Noesis, Travaux du Comité Roumain d'Histoire et de Philosophie des Sciences, VI (1978), pp. 55-60.

[9] I. Ionescu, *Constituirea, administrarea şi redactarea „Gazetei Matematice"*, apărut în volumul jubiliar *Gazeta Matematică 1895-1935. Istoric - Învăţăminte*, Biblioteca Gazetei Matematice, vol. XI, Bucureşti, 1935.

[10] G. Ivănescu, *Istoria limbii române*, Junimea, Iaşi, 2000.

[11] N. Mihăileanu, *Reviste de matematici elementare din Romania (până la 1948)*, Ed. Gil, Zalău, 1995.

[12] P. Mihăilescu, *Primary cyclotomic units and a proof of Catalan's conjecture*, J. Reine Angew. Math. 572 (2004), pp. 167-196.

[13] R. Miron, *Centenarul revistei Recreaţii Ştiinţifice*, Probleme de istoria şi filozofia ştiinţei, vol. X, 1984, Filiala Iaşi a Academiei Române pp. 17-19.

[14] I. Popa, *Recreaţii Ştiinţifice – prcursoare a „Gazetei Matematice*, Gazeta Matematică şi Fizică, seria A, nr. 9, 1955, pp. 492-493.

[15] I. Popa, *Dezvoltarea matematicii*, apărut în *Contribuţii la istoria dezvoltării Universităţii din Iaşi*, vol. II, pp. 7-39, Bucurcşti, 1960.

[16] G. Ţiţeica, *Rolul Gazetei Matematice în dezvoltarea ştiinţei matematice în România*, apărut în volumul jubiliar *Gazeta Matematică, 1895-1935. Istoric-învăţăminte*, Biblioteca Gazetei Matematice, vol. XI, Bucureşti, 1935, pp. 65 75.

[17] *** *Introducere*, Gazeta Matematică, an I, nr. 1, septembrie 1895.·

[18] *** *„Recreaţii Ştiinţifice" – prezenţă în conştiinţa posterităţii*, Recreaţii Matematice, 5 (2003), nr. l, p.5.

Universitatea Tehnică
Gheorghe Asachi din Iaşi

Institutul de Matematică Simion Stoilow
al Academiei Române
Bucureşti

Prof. dr. doc. Ilie Popa
In memoriam – 100 de ani de la naştere

de Liviu Florescu

Universităţile şi facultăţile sunt structuri menite să formeze elitele intelectuale ale ţării. Constituirea administrativă a acestora este la liberul arbitru al organelor legiuitoare. Însă, oricâtă determinare, hotărâre sau interes ar depune, acestea nu pot constitui structuri de învăţământ care să fie şi performante. Aceste structuri se produc în timp, printr-un proces îndelungat de selecţie fină a ofertei genetice a naţiunii şi prin eforturi intelectuale majore. Trebuie să reflectăm la acestea când ne mândrim cu poziţia fruntaşă pe care o universitate ca a noastră o deţine în clasamentul naţional al cercetării ştiinţifice. Să ne gândim la cei care au avut puterea să pună bazele unor structuri care azi se dovedesc performante – trebuie să ne gândim la profesorii noştri.

Am dedicat a IX-a Conferinţa Naţională de Analiză Matematică unuia dintre creatorii de şcoală matematică la Universitatea Al. I. Cuza: prof. dr. doc. *Ilie Popa*. În cei peste 40 de ani de activitate la catedră, profesorul *Ilie Popa* a avut o contribuţie majoră la fundamentarea învăţământului şi cercetării în analiza matematică din facultatea noastră.

Încercând să evocăm figura profesorului *Ilie Popa*, suntem conduşi a ne aşeza, la „o masă a umbrelor". O reîntâlnire cu cei plecaţi dincolo, o reîntâlnire ireală, cu toţi cei care, acum treizeci, patruzeci de ani în urmă, constituiau o lume aparte, lumea de atunci a Seminarului Matematic din Iaşi. Am putea oare vorbi despre Profesorul *Ilie Popa* fără a nu rechema în amintire figura Profesorilor *Alexandru Myller*, *Octav Mayer*, *Ion Creangă*, *Alexandru Climescu*, a fraţilor *Mendel* şi *Adolf Haimovici*, figurile profesorilor *Dan Petrovanu*, *Ion Grindei*, *Nicolae Negoescu*? Evident nu.

Ilie Popa s-a născut la Iaşi acum 100 de ani – 26 iulie 1907. A făcut studiile liceale la vestitul Colegiu Naţional Costache Negruzzi (fostul Liceu Internat); profesorul *Raianu* a fost probabil printre primii care au remarcat aptitudinile matematice speciale ale elevului său.

Între 1927 şi 1931 *Ilie Popa* a urmat cursurile Facultăţii de Matematică ale Universităţii Al. I. Cuza, unde se remarcă prin deosebita sa capacitate de abordare originală a obiectului de studiu.

În perioada 1931-1934 funcţionează ca asistent la Facultatea de Matematică şi îşi începe activitatea de cercetare sub îndrumarea profesorului *Alexandru Myller*. Împreună cu viitorul academician *Mendel Haimovici* publică primele articole de geometrie. În geometrie – domeniu în care au excelat ctitorii şcolii de matematică de la Iaşi – îşi susţine în 1934 teza de doctorat „Contribuţii la geometria centro-afină diferenţială", sub conducerea profesorului *Octav Mayer*.

Între 1936 şi 1938 primeşte o bursă din partea Academiei Române. Îşi face studiile postdoctorale la Roma, sub îndrumarea lui *Enrico Bompiani* şi la Hamburg cu *Wilhelm Blaschke*.

Din 1937 ocupă o poziţie de conferenţiar la Facultatea de Matematică până în 1942 când devine profesor universitar. Cu excepţia unei scurte treceri pe la Universitatea Tehnică, îşi desfăşoara întreaga activitate ştiinţifică şi didactică la Universitatea Al. I. Cuza, până în anul pensionării – 1973, chiar şi după aceea, ca profesor consultant.

Timp de 25 de ani (1948 - 1973) a condus, la Facultatea noastră, catedra nou creată de Analiză Matematică.

Activitatea ştiinţifică a profesorului *Ilie Popa* s-a conturat în domeniul geometriei şi analizei matematice; a publicat, singur sau în colaborare cu profesorii *Gheorghe Gheorghiev* sau *Mendel Haimovici*, 40 de articole ştiinţifice, articole citate deseori în ţară şi în străinătate.

Multă pasiune şi talent a depus profesorul în studiile sale de istoria matematicii. În cele 30 de articole publicate în această direcţie, a analizat cu migală şi acribie ştiinţifică începuturile cercetării matematice în Moldova (la *Dimitrie Asachi*, *Nicu Botez* sau *Dimitrie Isopescu*), urmărind, de asemenea, formarea şi fixarea terminologiei matematice româneşti.

Profesorul *Ilie Popa* a fost, pe lângă un cercetător talentat, un excelent cadru didactic. Claritatea, rigoarea cursurilor sale, exemplele şi comparaţiile pertinente, surprinzător de plastice, cu ajutorul cărora ştia să ilustreze cele mai profunde teorii matematice, tonul blând şi calm sunt calităţi didactice recunoscute şi apreciate de studenţii celor 40 de generaţii care i-au urmat cursurile. Unii dintre foştii studenţi au continuat colaborarea cu prof. *Ilie Popa*, de data aceasta în calitate de conducător ştiintific, cu ocazia studiilor doctorale. Printre cei care au susţinut doctoratul sub conducerea sa amintim pe profesorii *Nicolae Negoescu*, *Olga Costinescu*, *Nicolae Gheorghiu*, *Gheorghe Bantaş*, *Anca Precupanu*, *Theodor Precupanu*; teza mea de doctorat a fost, de asemenea elaborată, sub conducerea prof. *Ilie Popa*, fiind probabil printre ultimii săi doctoranzi.

Calităţile didactice remarcabile ale profesorului au fost puse în valoare şi prin contribuţia adusă la redactarea cursului de Geometrie analitică (lucrare colectivă de înaltă ţinută coordonata de Octav Myler); această lucrare a primit, în anul 1951, Premiul de Stat.

Prof. dr. doc. *Ilie Popa* a deţinut în timpul carierei sale mai multe poziţii de conducere în ierarhia academică. Pe lângă funcţia de şef al catedrei de Analiză Matematică, deja amintită, a fost Prorector al Universităţii Al. I. Cuza (1944-1945 şi 1966-1971), Rector al Institutului Pedagogic (1960-1961 şi 1964-1966) şi Director al Seminarului Matematic. În perioada 1961-1964 a funcţionat ca Director General în Ministerul Învăţământului.

Matematicianul *Ilie Popa* a fost o personalitate complexă: profesor prin excelenţă, cercetător pasionat şi talentat, a ştiut să-şi utilizeze rezervele de calm, luciditate şi rigoare în exercitarea unor funcţii de conducere care, îndeplinite în perioade atât de dificile, îi solicitau atât de mult aceste calităţi.

Roadele activităţii profesorului *Ilie Popa* şi a remarcabililor săi colegi de generaţie s-au materializat în realizările valorosului colectiv actual al facultăţii noastre. Forţa şi rezultatele şcolii ieşene de analiză matematică, reprezentarea naţională şi internaţională a acestei şcoli îşi pot identifica rădăcinile şi în eforturile acestor iluştri înaintaşi.

Universitatea Al. I. Cuza
Iaşi

MANIFESTĂRI ŞTIINŢIFICE

Simpozion de Funcţii Complexe în Onoarea Doamnei Profesor Cabiria Andreian-Cazacu, Facultatea de Matematică şi Informatică, Bucureşti, 18 februarie 2008

În ziua de 18 februarie 2008 doamna profesor doctor docent *Cabiria Andreian Cazacu*, membru de onoare al Academiei Române, a împlinit frumoasa vârsta de 80 de ani.

Cinstind evenimentul aşa cum se cuvine, Catedra de Analiză Matematică din Facultate a organizat un Simpozion de Funcţii Complexe dedicat doamnei profesor, care s-a desfăşurat chiar în ziua de 18 februarie, în Amfiteatrul Simion Stoilow.

După cuvântul de deschidere al domnului decan, prof. dr. *Dragoş Ştefan*, au fost prezentate conferinţe de către:

1. Acad. prof. dr. doc. *Solomon Marcus*
2. Cercetător principal dr. *Mihnea Colţoiu*, membru corespondent al Academiei Române
3. Prof. dr. doc. *Nicu Boboc*
4. Prof. dr. *Gheorghe Bucur*
5. Prof. dr. *Mihai Cristea*
6. Cercetător principal I dr. *Gheorghe Gussi*
7. Cercetător principal I dr. *Vasile Brânzănescu*, director I.M.A.R.
8. Prof. dr. *Petru T. Mocanu*, membru corespondent al Academiei Române
9. Conf. dr. *Victoria Stanciu*
10. Lector drd. *Carmen Boloşteanu*

În prima jumătate lucrările au fost conduse de către dl. conf. dr. *Radu Miculescu*, şeful Catedrei de Analiză Matematică, iar apoi de către dl. prof. dr. *Mihai Cristea*, de la aceeaşi Catedră.

Cu alese sentimente de consideraţie şi afecţiune, toţi vorbitorii au adus în conferinţele lor un cald elogiu personalităţii, realizărilor şi contribuţiilor de excepţie ale doamnei profesor *Cabiria Andreian Cazacu* la dezvoltarea analizei complexe în România, devotamentului său faţă de Facultatea de Matematică a Universităţii din Bucureşti şi faţă de Catedra de Analiză Matematică.

În cele ce urmează vom reda pe scurt anumite idei din câteva din conferinţele menţionate; întrucât ele nu au fost înregistrate, vom reproduce doar o parte din cele expuse, dar, cum se spune, „cu cuvintele noastre", pe baza unor notiţe sumare, luate rapid, în sală.

În foarte interesanta sa expunere, dl. acad. prof. dr. doc. *Solomon Marcus* a început specificând întâi cuvintele-cheie: *Cabiria Andreian Cazacu, funcţii complexe-distribuţia valorilor, suprafeţe riemanniene, cvasiconformitate, grupuri Klein, Stoilow, Nevanlinna, Ahlfors, Seminarii Româno-Finlandeze.*

Arătând că doamna profesor *Cabiria Andreian Cazacu* a fost prima femeie conferenţiar şi apoi profesor universitar la Universitatea din Bucureşti şi că este cea mai importantă reprezentantă feminină a matematicii româneşti, dl. acad. *Solomon Marcus* a menţionat că au mai existat prezenţe matematice feminine precursoare la Universitatea din Iaşi, anume *Vera Myller Lebedev*, *Silvia Creangă* şi *Florica T. Câmpan.* Iar oraşul Iaşi, coincidenţă fericită, este chiar oraşul natal al *Cabiriei Andreian*! Dar dânsa se refugiază în 1944, cu părinţii, în Bucureşti. Ca şi în cazul matematicienilor *Dimitrie Pompeiu*, *Nicolae Ciorănescu*, *Miron Nicolescu* şi *Grigore C. Moisil*, *Cabiria Andreian* a avut părintele om de şcoală. Şi ce şansă mai mare poate exista pentru un tânăr decât de a avea ca educatori proprii părinţi?

În timpul studiilor la Universitatea din Bucureşti, pe excepţionala studentă *Cabiria Andreian*, ca şi pe ceilalţi studenţi foarte buni, o invitau să stea de vorbă la Catedră profesori ca *Octav Onicescu*, *Alexandru Ghika* sau *Miron Nicolescu.* Pe vremea aceea frecvenţa nu era obligatorie, iar solicitarea unor profesori de a discuta cu anumiţi studenţi atesta valoarea acestora şi faptul că se făcuseră remarcaţi încă din anul întâi de facultate. În 1949 *Cabiria Andreian* îşi încheie strălucit studiile universitare susţinând licenţa sub îndrumarea profesorului *Dan Barbilian* şi îşi începe activitatea conducând seminarii la cursurile profesorilor *Alexandru Froda* şi *Grigore C. Moisil.* În 1951 este lector universitar, iar în octombrie 1952 susţine examenul de admitere la doctorat la profesorul *Simion Stoilow.* La acest examen de admitere la doctorat erau înscrişi cinci candidaţi. Astăzi toţi cinci sunt matematicieni renumiţi. În 1955 şi-a susţinut teza de doctorat, sub conducerea profesorului *Simion Stoilow* şi a fost numită conferenţiar. A fost prima femeie doctor în matematică a Universităţii din Bucureşti şi totodată prima femeie conferenţiar şi professor universitar la această Universitate.

În 1961 matematica românească îl pierde pe *Simion Stoilow.* Era de domeniul evidenţei că *Stoilow* a transmis ştafeta *Cabiriei Andreian Cazacu.* Volumul al doilea al cursului de Teoria funcţiilor de variabilă complexă fusese scris în colaborare de către *Simion Stoilow* şi *Cabiria Andreian Cazacu.* În acest al doilea volum, *Cabiria Andreian Cazacu* a reliefat în toată plenitudinea lor ideile novatoare ale maestrului sau *Stoilow* în Analiză şi Topologie, dar a introdus şi contribuţiile tinerei generaţii de matematicieni din Seminarul Stoilow, între care şi propriile contribuţii. În decursul întregii sale cariere de profesor şi de cercetător a avut mari realizări în mai multe ramuri ale Analizei complexe. Toată activitatea sa a fost permanent legată de Catedra de Analiză Matematică, al cărei şef a şi fost, în perioada 1973-1975, imediat după pensionarea lui *Miron Nicolescu.* A fost decan al facultăţii în perioada 1976-1984. A editat toate cărţile de Proceedings ale vestitelor Seminarii Româno-Finlandeze de Analiză complexă.

Dl. cercetător principal dr. *Mihnea Colţoiu*, membru corespondent al Academiei Române, omagiind personalitatea sărbătoritei, a prezentat o scurtă conferinţă intitulată „Problema lui Levi în spaţii Stein".

Dl. prof. dr. doc. *Nicu Boboc*, făcând elogiul personalităţii doamnei profesor *Cabiria Andreian Cazacu*, a depănat, de asemenea, câteva amintiri. Dânsul a intrat în facultate în 1952. *Cabiria Andreian* ţinea seminariile la cursul de Teoria funcţiilor de variabilă complexă al profesorului *Simion Stoilow*, din anul al doilea. Studenţii din acel an al doilea au remarcat, cu toţii ştiinţa, talentul, umanismul şi generozitatea *Cabiriei Andreian Cazacu.* În decursul îndelungii sale activităţi la Facultatea de Matematică a Universităţii din Bucureşti, *Cabiria Andreian Cazacu* a ţinut cursuri de Algebră, Analiză complexă, Cvasiconformitate, Spaţii Teichmüller, Suprafeţe Riemanniene, Spaţii analitice. A publicat peste 100 de lucrări ştiinţifice în specialităţile: Cvasiconformitate, Suprafeţe Riemanniene, Teoria lui Nevanlinna. A obţinut titlul de doctor docent în 1967, cu lucrarea „Clase de suprafeţe Riemanniene". A publicat 7 monografii, a scris 12 lucrări de Istoria matematicii, a fost editor al volumelor de Proceedings ale Seminariilor Romano-Finlandeze, la organizarea cărora a avut o contribuţie esenţială încă din anii '60. A călăuzit teze de doctorat, a organizat multe conferinţe, a condus un cerc ştiinţific studenţesc în cadrul căruia şi-au început activitatea mulţi distinşi matematicieni. A obţinut Premiul Stoilow al Academiei, diferite ordine şi medalii, este membru de onoare al Academiei Române şi Doctor Honoris Causa al Universităţii din Craiova.

Domnul prof. dr. *Gheorghe Bucur*, elogiind personalitatea doamnei profesor, a menţionat că, spre regret, se pare că memoria matematicii româneşti este slabă, cei tineri ştiu prea puţin despre Istoria matematicii în România. Dar doamna profesor *Cabiria Andreian Cazacu* a scris despre profesorii săi, *Simion Stoilow*, *Alexandru Ghika*, şi alţii, dar şi despre profesorii profesorilor săi, cât şi despre unii contemporani pe care matematica românească i-a pierdut prea devreme, ca *Dumitru Ivaşcu* şi *Martin Jurchescu*. A beneficiat de o zestre ştiinţifică excepţională şi a restituit din plin, adăugând importante contribuţii creatoare. Doamna profesor ştie să asculte cu atenţie interlocutorii, să sintetizeze esenţialul, este exemplară în a-i mobiliza pe cei cu care lucrează şi are capacitatea deosebită de a se bucura şi de succesele altora.

Domnul prof. dr. *Mihai Cristea*, omagiind personalitatea doamnei profesor *Cabiria Andreian Cazacu*, a prezentat apoi conferinţa intitulată „Modulul cu pondere“, domeniu în care doamna profesor a adus importante contribuţii.

Elogiind pe doamna profesor, domnul director al Institutului de Matematică al Academiei (I.M.A.R.), dr. *Vasile Brânzănescu* a menţionat, printre altele, că doamna profesor lucrează şi în prezent cu aceeaşi strălucire şi efervescenţă; din anul 2000 şi până acum are peste 11 lucrări publicate.

În expunerea sa, domnul dr. *Gheorghe Gussi*, fost director I.M.A.R., a menţionat că, pentru o anumită problemă discutată la Universitatea Antipolis (Franţa), nu se întrevedea rezolvarea: atunci a întrebat-o pe doamna profesor. Dumneaei a rezolvat problema pe baza teoriei lui *Nevanlinna*.

Domnul prof. dr. *Petru T. Mocanu*, membru de onoare al Academiei Române, elogiind pe doamna profesor, a amintit un frumos episod academic din perioada pregătirii doctoratului (sub îndrumarea lui *Gheorghe Călugăreanu*). Acesta era prieten cu *Stoilow* şi era în comisie la susţinerea tezei *Cabiriei Andreian Cazacu*. Profesorul *Călugăreanu* i-a sugerat să vină la Bucureşti şi să asiste la susţinerea tezei. A fost foarte impresionat şi exemplul l-a mobilizat! A mai reţinut de la doamna profesor grija permanentă pentru informare; la toate şedinţele de comunicări ştiinţifice dumneaei îşi nota cele expuse.

Deşi netrecut în prealabil în program, dar fiind prezent în sală, a fost invitat să ia cuvântul şi un oaspete străin, dl. prof. *Heinrich Begehr* de la Freie Universität din Berlin.

La sfârşit au vorbit doamnele conf. dr. *Victoria Stanciu* şi lector drd. *Carmen Boloşteanu*, ambele discipole ale doamnei prof. dr. *Cabiria Andreian Cazacu*.

În încheiere şi ca răspuns, a luat cuvântul sărbătorita, doamna profesor *Cabiria Andreian Cazacu*. Ne-a vorbit, ca întotdeauna, cu multă graţie, căldură, optimism şi cu un zâmbet încurajator. Reţinem, printre altele, una din frazele finale: „A avut fericirea să se bucure de atenţia unor mari matematicieni români, cât şi străini ca *R. Nevanlinna*, *L. V. Ahlfors*, *M. Lavrentiev*, *L. I. Volkovîskii*, *B. Şabat*, *I. N. Vekua*, *G. Fichera*, *Alex. Dinghas*.“ A evocat sprijinul părinţilor şi al soţului, profesor doctor inginer *Mircea Dimitrie Cazacu* de la Universitatea Politehnica Bucureşti, care în mai bine de jumătate de veac a creat acea atmosferă de înţelegere, armonie şi dragoste de muncă atât de prielnică activităţii ştiinţifice.

Adevarată sărbătoare a matematicii româneşti, Simpozionul s-a bucurat de mare atenţie, prin prezenţa unui însemnat număr de matematicieni de prestigiu (printre care şi foşti studenţi ai doamnei profesor): cadre didactice din facultate şi din alte instituţii de învăţământ universitar, cercetători, ingineri.

În incheierea acestei scurte relatări, îi urăm din toată inima doamnei profesor *Cabiria Andreian Cazacu* multă sănătate, voie bună, noi realizări în continuare şi multă fericire !

Andrei Vernescu

Revista de matematică mehedinţeană

Cu ocazia Adunării generale a S. S. M. R. desfăşurată în luna ianuarie a.c., domnul prof. dr. *Gheorghe Căiniceanu*, redactorul şef al publicaţiei şi preşedintele filialei S. S. M. R din localitate, ne-a înmânat ultimul număr ce a văzut lumina tiparului (nr. 7 – decembrie 2007) al publicaţiei mehedinţene.

După trecerea a cinci ani de la apariţia primului număr, aşa cum mărturiseşte în „Cuvântul înainte din partea colectivului redacţional" profesorul *Gheorghe Căiniceanu* – revista „se străduieşte să completeze lista numeroaselor publicaţii din domeniu cu producţii şi rezultate ale mehedinţenilor". Remarcăm aceeaşi modestie şi bun simţ care au caracterizat, în decursul timpului, colegiul redacţional al publicaţie. Trebuie să adăugăm, totuşi că în aceşti cinci ani scurşi, revista a căpătat mai multă consistenţă, şi-a definit un format propriu, reuşind să regrupeze în jurul ei pe toţi cei interesaţi în propăşirea matematicii mehedinţene, în special profesori tineri şi elevi.

Iată titlurile câtorva materiale inserate în acest număr: „Demonstraţia în geometrie" (*V. Săceanu*), „Probleme de extremum rezolvate prin metoda inegalităţilor algebrice" (*I. Constantin*), „Consideraţii metodice privind predarea teoremelor de medie în învăţământul liceal" (*A. Mandreşi*). De asemenea, trebuie să remarcăm interesantele note matematice publicate în cadrul rubricii „Cercul de matematică", precum şi continuarea prezentării unor personalităţi originare de pe plaiurile mehedinţene şi care şi-au creat sau sunt pe cale să-şi creeze un nume în matematica românească.

În fine, vom mai remarca din nou – cum am mai făcut-o şi cu alte ocazii – faptul că revista oferă o informaţie completă asupra manifestărilor cu caracter matematic (concursuri, şcoli de vară etc.) desfăşurate în judeţ în ultima vreme, precum şi a activităţii filialei S. S. M. R. Mehedinţi.

Dan Radu

Argument

Editată de catedra de matematică a Colegiului Naţional Gheorghe Şincai din Baia Mare, revista constituie una din numeroasele iniţiative ale şcolilor româneşti cu tradiţie din ţara noastră, menite a ţine treaz interesul elevilor pentru matematică, într-o vreme când – prin planurile de învăţământ şi prin programe – se încearcă marginalizarea acesteia, încadrarea ei ca un „oarecare" obiect de studiu, printre celelalte unelte. Demersul entuziaştilor profesori de la Colegiului Naţional Gh. Şincai se dovedeşte cu atât mai meritoriu, cu cât publicaţia dovedeşte o perenitate demnă de invidiat, ea ajungând la al zecelea număr (în ritmul de publicare de un număr anual).

Doamna profesoară *Dana Heuberger* ne-a expediat ultimele două numere apărute (nr. 9/2007, nr. 10/2008). Domnia sa specifică, în scrisoarea de trăsură, că – pe parcursul acestor zece ani – în revistă au apărut 57 de articole şi note matematice, precum şi 494 de probleme originale.

Este notabil faptul că materialele teoretice inserate în fiecare număr au o pondere destul de mare (circa jumătate din spaţiul editorial) şi sunt semnate de nume prestigioase din matematica preuniversitară românească. Iată titlul câtorva note şi articole publicate în aceste două numere: „Identităţi combinatoriale deduse prin numărare" (*V. Pop*), „Euler şi numărul π" (*D. Miheţ*), „Clase de şiruri pentru care termenul general nu se poate reprezenta sub formă raţională" (*N. Muşuroia*), „Acţiuni ale grupurilor pe mulţimi" (*D* şi *C. Chiteş*), „O demonstraţie elementară a inegalităţii lui Huygens" (*V. Pop* şi *C. Cioclu*), „Relaţia lui Sylvester în rezolvarea unor probleme cu numere complexe" (*D. Jinga*) etc.

Urăm revistei băimărene viaţă lungă şi noi realizări în demersul întrepins, spre beneficiul noilor generaţii de elevi şi profesori.

Dan Radu

Revista de Matematică din Galaţi

Ca de obicei, domnul profesor *Romeo Zamfir* ne-a expediat ultimul număr apărut (nr. 30/2008) al revistei gălăţene, editată sub patronajul I. Ş. J. Galaţi şi al Fundaţiei „Vasile Alecsandri“ din localitate.

Revista şi-a cucerit, de-acum, un loc bine precizat în peisajul publicaţiilor de profil din ţara noastră.

Ea debutează cu o amănunţită dare de seamă asupra ediţiei a VII-a a Concursului interjudeţean de matematică „Cristian S. Calude“, semnată de d-l prof. *R. Zamfir* – redactorul şef adjunct al publicaţiei. Statisticile prezentate, listele laureaţilor concursului probează cu prisosinţă preocuparea organizatorilor privind buna organizare şi desfăşurare a acestuia.

Cele două materiale teoretice inserate în acest număr sunt „On some conics related to a triangle“ (*E. Kulanin* şi *Myakishev*) şi „Locuri geometrice“ (*A. Udma*). Credem că spaţiul editorial acordat materialelor teoretice (articole, note matematice etc.) ar trebui să fie, totuşi, ceva mai mare, pentru a nu transforma revista într-o culegere de probleme cu apariţie periodică. Aceasta, cu atât mai mult cu cât revista şi-a asigurat, de-a lungul timpului, un corp de colaboratori valoros, mulţi dintre ei având state vechi de publicişti în domeniul matematicilor elementare.

Dan Radu

Revista de matematică a elevilor şi profesorilor din judeţul Caraş-Severin

Domnul profesor *Lucian Dragomir* – redactorul şef al publicaţiei şi preşedintele filialei locale a S. S. M. R. – ne-a expediat ultimul număr apărut (nr. 22 – an IV – 2007) al revistei reşiţene.

Vom spicui, mai jos, câteva titluri ale unor interesante note apărute în acest număr: „Sume şi produse prietene“ (*C. Mortici*), „Pătrate perfecte“ (*L. Dragomir*), „Extreme cu permutări“ (*N. Stăniloiu*), „Drepte de tip Simson“ (*P. Neagoe).*

De asemenea, problemele propuse se remarcă printr-o deosebită bogăţie şi varietate, revista reuşind să-şi constituie un corp de colaboratori valoroşi şi cunoscuţi atât dintre personalităţile locale, cât şi din alte zone ale ţării.

Un fapt pozitiv ce trebuie remarcat, pe care l-am observat şi la alte reviste locale, este publicarea unor liste complete ale membrilor filialei respective. Este îmbucurător acest lucru, deoarece el demonstrează, pe de o parte preocuparea profesorilor din zonă pentru matematică, iar pe de altă parte, faptul că S. S. M. R. este un organism viu, cu o viaţă proprie interesantă şi activă.

Dan Radu

Revista de matematică Grigore Moisil

Iată un nou venit printre publicaţiile de profil, destinate învăţământului matematic preuniversitar. Revista apare la Alexandria, sub egida filialei locale a S. S. M. R., avându-l ca preşedinte al colegiului redacţional pe profesorul *Marius Burtea*, care este şi preşedintele filialei locale a S.S.M.R.

Revista are o apariţie semestrială, nouă parvenindu-ne nr. 2 din primul an de apariţie (2007). Scopul revistei este clar şi succint definit de ideea (inserată pe copertă) aparţinând regretatului matematician şi om de cultură care a fost *Grigore Moisil*: „Învăţând matematică, înveţi să gândeşti“.

Revista urmează tiparul clasic al publicaţiilor de gen, conţinând o serie de scurte articole şi note matematice, probleme propuse şi rezolvate pentru ciclul primar, gimnazial şi liceal, probleme de concurs, probleme distractive etc.

Vom cita câteva dintre titlurile materialelor publicate în acest număr: „Pledoarie pentru studiul surselor originale“ (*P. Enache*), „Despre valoarea numărului π“ (*A. E. Udma*), „Identităţi. Identitatea lui Hermite. Consecinţe“ (*Şt. Niţu*), „Variante atipice de raţionament inductiv“ (*I. Anghelescu*), „Generalizarea teoremei catetei şi a înălţimii“ (*M. Burtea*) etc.

Sperăm ca revista să-şi continue apariţia, definindu-şi – în timp – propria personalitate şi înscriindu-se cu succes, printre publicaţiile de gen destinate elevilor şi profesorilor de matematică din învăţământul preuniversitar.

Dan Radu

Carpathian Journal of Mathematics

Publicată de Departamentul de Matematică şi Ştiinţa Calculului al Universităţii de Nord din Baia Mare, revista a ajuns la volumul 23 (nr. 1-2/2007).

Este vorba, de bună seamă, de o revistă de cercetare ştiinţifică, aşa încât ne vom abţine de la a face comentarii pe marginea materialelor publicate, ele purtând – în exclusivitate – răspunderea autorilor. Vom cita, totuşi, câteva titluri, care ni s-au părut mai interesante, cu menţiunea că această selecţie are un caracter pur subiectiv şi, întrucâtva, aleatoriu: „A biased discussion of fixed point theory“ (*B. E. Rhoades*), „On assymptotic behaviours for linear skey-evolution semiflows in Banach spaces“ (*M. Megan*, *C. Stoica*, *L. Buliga*), „Approximate fixed point theorems for weak contractions on metric spaces“ (*M. Păcurar*, *R. V. Păcurar*), „On the asimptotic behaviour of the number of maximum points of a simple random wolk“ (*E. Păltănea*) etc.

Dan Radu

RECENZII

ION CUCUREZEANU, Pătrate şi cuburi de numere întregi, Editura GIL, Zalău, 2007

Profesorul *Ion Cucurezeanu* este unul dintre reputaţii noştri specialişti în Teoria numerelor, cu o exemplară activitate publicistică în ţară şi în străinătate, concretizată în numeroase articole şi cărţi apărute de-a lungul timpului. Lucrările sale ocupă un loc aparte în Teoria numerelor, vizând, îndeobşte, probleme elementare ca enunţ, dar profunde şi deosebit de bogate în idei, acel gen de probleme care au constituit totdeauna motorul dezvoltării teoriei, furnizând adevărate delicii celor împătimiţi de raţionamentul pur şi cristalin, de logica şi analiza care conduc la rezultatul matematic, de multe ori spectaculos şi inedit.

Prezenta lucrare, purtând numărul 10 în cadrul colecţiei „Biblioteca GIL“ a editurii, reuneşte un număr de 231 probleme selectate de autor cu multă acribie dintr-un domeniu destul de special al teoriei numerelor, după cum chiar titlul volumului o mărturiseşte.

Prin calitatea materialului selectat, prin stilul clar, simplu şi concis al expunerii, credem că lucrarea poate sta alături de altele clasice în domeniu, cum ar fi celebra „250 Problems in Elementary Number Theory“ a lui *N. Sierpinsky* (P. W. N. Warzawa, 1970). Apropierea nu este cu nimic forţată din niciun punct de vedere, cele două cărţi având în comun aceeaşi dragoste a autorilor pentru domeniul ales, aceeaşi cunoaştere profundă a resorturilor intime ale Teoriei numerelor, precum şi informaţia vastă ce a condus la elaborarea lor.

Trebuie să mai subliniem şi faptul că volumul este o micromonografie în ceea ce priveşte subiectul abordat şi că, după câte avem cunoştinţă, reprezintă o premieră în literatura de specialitate. Din acest punct de vedere regretăm că autorul nu a inserat în volum o bibliografie mai cuprinzătoare, care i-ar fi permis cititorului interesat să-şi dezvolte informaţia şi studiul; dar această carenţă va putea fi înlăturată la o viitoare ediţie care, cu siguranţă, nu va întârzia să apară.

O mare calitate a lucrării o constituie bagajul minim de cunoştinţe pe care le presupune din partea cititorului, ea putând fi abordată chiar de elevii de gimnaziu care au o bună şi solidă cunoaştere a aritmeticii, precum şi un spirit format al raţionamentului matematic. Desigur, selecţia conţine un mare număr de probleme clasice – care nu puteau lipsi – dar şi numeroase probleme aparţinând autorului şi care au un caracter inedit.

În concluzie, considerăm prezentul volum ca fiind unul dintre cele mai prestigioase publicate de editura GIL în ultimii ani şi îl recomandăm cu căldură profesorilor şi elevilor, ca şi specialiştilor în domeniu, pentru care matematica nu a încetat să fie un miracol şi o delectare.

Dan Radu

DAN SCHWARZ şi GABRIEL POPA, Probleme de numărare Editura GIL, Zalău, 2006

Cartea de faţă se ocupă cu probleme de numărare, tematică ce se dovedeşte, de multe ori, a fi o piatră de încercare pentru participanţii la concursurile şcolare. O lucrare de acest tip a lipsit până acum din literatura matematică din ţara noastră.

Interesul cititorului pentru prezenta lucrare este stârnit de abordarea metodică şi sistematică a problematicii anunţate precum şi de prezenţa unor probleme uşoare sau cunoscute abordate prin metode sau procedee care deschid perspective pentru abordarea altor chestiuni. Problemele de combinatorică sunt caracterizate de natura lor atipică, ce impune din partea rezolvitorilor ingeniozitate, flexibilitate şi perseverenţă în căutarea soluţiei, iar lucrarea de faţă oferă posibilitatea exersării acestui tip de probleme pe baza unor probleme bine alese.

Conţinutul cărţii este structurat pe două direcţii, cuprinzând probleme pentru clasele V-VI, respectiv VII-VIII, astfel:

Clasele V-VI: Cap. I – Folosirea unui contor de numărare;
Cap. II – Folosirea periodicităţii;
Cap. III – Regula sumei;
Cap. IV – Principiul includerii şi excluderii;
Cap. V - Regula produsului;
Cap. VI – Evaluare + Exemplu.

Clasele VII-VIII: Cap. VII – Numărarea recurentă;
Cap. VIII – Numărarea în două moduri;
Cap. IX – Stabilirea unei corespondenţe bijective.

Lucrarea, ce cuprinde 64 de pagini, se încheie cu o listă care conţine numele autorilor sau sursele problemelor, urmată de o substanţială bibliografie.

Cartea de faţă este una care va stârni cu siguranţă interes şi va fi bine primită. O recomandăm călduros.

Radu Miculescu

PANTELIMON GEORGE POPESCU, IOAN V. MAFTEI, JOSE LUIS DIAZ BARRERO, MARIAN DINCĂ, Inegalităţi matematice
Editura DIDACTICĂ ŞI PEDAGOGICĂ, Bucureşti, 2007

Volumul se adaugă la lunga listă a cărţilor apărute în decursul timpurilor şi destinate acestui domeniu vechi şi veşnic nou al inegalităţilor matematice. Este drept că acest uriaş teritoriu este străbătut de numeroase drumuri bătătorite de iluştri matematicieni (*Cauchy*, *Schwarz*, *Hölder*, *Minkovski*, *Bernoulli*, *Cebâşev*, *Jensen*, *Erdös*, *Mordell*, *Hardy*, *Polya*, *Littlewood*, *Szegö* etc. etc.), dar conţine încă numeroase zone neexplorate în care mai vechii sau mai noii cercetători pot descoperi fapte şi rezultate inedite, de multe ori spectaculoase. În fond, folosind o formulare puţin forţată, dar nu departe de adevăr, „matematica este mai mult ştiinţa inegalităţilor decât a egalităţilor"!

Prezentul volum conţine şase capitole, după cum urmează:
Cap. I – Inegalităţi algebrice clasice;
Cap. II – Inegalităţi geometrice clasice;
Cap. III – Modele geometrice trigonometrice;
Cap. IV – Inegalităţi generatoare;
Cap. V – Funcţii convexe / concave;
Cap. VI – Triunghi median, triunghi dual.

Această lucrare este rodul colaborării – întinsă pe parcursul a câţiva ani – a celor patru autori. Ea este o sinteză de clasic şi nou, prezentând o serie de idei novatoare în domeniu, ce au drept scop obţinerea de noi rezultate, dintre care unele s-ar putea să ajungă – cu timpul – clasice. Nu în ultimul rând, trebuie menţionat şi faptul că unele rezultate clasice sunt rafinate prin metode şi mecanisme de investigaţie inedite.

O bună parte a rezultatelor conţinute în volum au un caracter original, ele făcând obiectul unor lucrări publicate de autori în ţară şi străinătate.

După cum spune prof. univ. dr. *Octavian Stănăşilă* în „Prefaţa lucrării", „această lucrare este un fapt de cultură şi va avea un ecou nu numai în cercul restrâns al celor care cred în spiritul inepuizabil al căutătorilor de frumuseţe, fie ea mai ascunsă şi mai puţin atinsă de pragmatism".

Dan Radu

VIRGIL NICULA şi COSMIN POHOAŢĂ, Diviziune armonică

Editura GIL, Zalău, 2007

Cartea în discuţie se adresează elevilor din clasele VII-X . Autorii s-au străduit ca problemele alese să fie accesibile elevilor de clasa a VII-a, care au înclinaţie spre geometrie.

Lucrarea se întinde pe şase capitole (aici găsindu-se şi o listă de notaţii standard):

Cap. 1 – Măsură algebrică (1.1. – Rigla. Probleme rezolvate, 1.2. – Măsură algebrică. Probleme rezolvate);

Cap. 2 – Diviziune armonică (pe o dreaptă) (2.1. – Definiţie. Exemple, 2.2. – Caracterizarea unei diviziuni armonice, 2.3. – Probleme rezolvate);

Cap. 3 – Fascicul armonic (3.1. – Definiţie. Proprietăţi, 3.2. – Probleme rezolvate);

Cap. 4 – Pol şi polară (în raport cu un cerc) (4.1. – Definiţie. Proprietăţi, 4.2. – Probleme rezolvate);

Cap. 5 – Addenda (5.1. – Evaluarea raportului în care un punct împarte un segment, 5.2. – Caracterizarea perpendicularităţii a două drepte, 5.3. – Cercuri remarcabile asociate unui triunghi);

Cap. 6 – Probleme propuse (6.1. – Enunţuri, 6.2. – Soluţii).

Deşi cartea, ce se întinde pe 107 pagini, are doi autori, prefaţa (nesemnată) pare a fi scrisă doar de unul dintre ei. Recenzentul nu a reuşit să-şi dea seama care este acela.

Recomandăm prezenta lucrare cu multă căldură tuturor pasionaţilor de geometrie, menţionând în final claritatea expunerii, precum şi condiţiile editoriale deosebite.

Radu Miculescu

GHEORGHE CRĂCIUN şi colaboratorii, Duelul matematic,

Editura TIPARG, Piteşti, 2007

Prezentul volum este rezultatul colaborării unui grup destul de numeros de autori din care fac parte: *Ioana Crăciun*, *Magdalena Georgescu*, *Luminiţa Corneci*, *Ion Bilciurescu*, *Emilian Deaconescu*, *Cătălin Scăiceanu*, *Sergiu Cristea* şi *Florin Cîrjan*.

El reuneşte un număr destul de mare de teste destinate învăţământului primar (clasele II-IV) şi gimnazial (clasele (V-VIII). Obiectul testelor îl formează peste 70 de probleme, atent selectate de autori şi menite să permită verificarea cunoştinţelor de matematică ce fac obiectul programelor pentru aceste clase.

Desigur, problemele inserate în volum sunt de toate categoriile, plecând de la cele mai simple şi mergând până la cele cu caracter mai dificil (dar nu foarte dificile). Multe dintre ele aparţin autorilor, dar ne face impresia că majoritatea au făcut obiectul unor concursuri de matematică, fie ele olimpiade, fie concursuri interjudeţene. Aceasta conferă un plus de atractivitate pentru volum, el fiind extrem de util pentru elevii din clasele primare şi gimnaziale ce pregătesc diverse astfel de concursuri.

Dan Radu

IURIE BOREICO şi MARINEL TELEUCĂ, Invarianţi şi jocuri

Editura GIL, Zalău, 2007

Elevii care se pregătesc pentru concursuri, profesorii care caută o sursă de întrebări inedite, iubitorii de probleme de matematică vor găsi în această carte ceea ce doresc.

Lucrarea conţine probleme rezolvate, probleme propuse, toate aparţinând unor teme frecvente în problemele de combinatorică. Probleme despre jocuri, folosirea invarianţilor în diferite contexte, analizarea existenţei de strategii de realizare a unei anumite situaţii, chestiuni simple de dificultăţi diferite şi gradate de la simplu la complicat sunt selectate în principal din problemistica rusească dar şi din cea a altor concursuri de pe plan mondial.

Cartea are un cuprins vast, de şapte capitole, anume:

Cap. 1. – Introducere (1.1. – Idei principale, 1.2. – Exerciţii propuse – Introducere);

Cap. 2. – Resturi (2.1. – Paritate, 2.2. – Exerciţii propuse-paritate, 2.3. – Dame, şah, domino şi altele, 2.4. – Paritatea în geometrie, 2.5. – Alte resturi, 2.6. – Exerciţii propuse – resturi);

Cap. 3. – Colorări (3.1. – Colorări în două culori, 3.2. – Exerciţii propuse – colorări în două culori, 3.3. – Colorări în mai multe culori, 3.4. – Exerciţii propuse – colorări în mai multe culori);

Cap. 4. – Alţi invarianţi (4.1. – Expresii algebrice, 4.2. – Exerciţii propuse – invarianţi algebrici, 4.3. – Invarianţi universali, 4.4. – Semiinvarianţi, 4.5. – Exerciţii propuse – semiinvarianţi);

Cap. 5. - Probleme pentru consolidare (5.1. – Probleme diverse, 5.2. – Exerciţii propuse – probleme diverse);

Cap. 6. – Jocuri (6.1. – Introducere, 6.2. – Jocuri închise, 6.3. – Exerciţii propuse-jocuri închise, 6.4. – Simetria, 6.5. – Exerciţii – strategia simetriei, 6.6. – Poziţii câştigătoare, 6.7. – Exerciţii – poziţii câştigătoare, 6.8. – Metoda analizei retrograde, 6.9. – Exerciţii – analiză retrogradă, 6.10. – Jocuri diverse);

Cap. 7. – Soluţii şi indicaţii (7.1. – Introducere, 7.2. – Paritate, 7.3. – Alte resturi, 7.4. – Colorări în două culori, 7.5. – Colorări în mai multe culori, 7.6. – Invarianţi algebrici, 7.7. – Semiinvarianţi, 7.8. – Probleme diverse, 7.9. – Jocuri închise, 7.10. – Strategia simetriei, 7.11. – Poziţii câştigătoare, 7.12. – Analiză retrogradă, 7.13 – Bibliografie).

Trebuie să remarcăm poziţionarea totalmente stranie a bibliografiei. Mai mult, aceasta conţine doar cinci titluri, coordonatele acestora fiind foarte vagi, fără a se menţiona editura şi anul apariţiei.

Lucrarea de faţă, având o prefaţă semnată de *Mihail Bălună* şi întinzându-se pe 58 de pagini este un instrument util pe care-l recomandăm cu căldură.

Radu Miculescu

POŞTA REDACŢIEI

Adrian Corduneanu şi **Gheorghe Costovici** – Catedra de Matematică, Universitatea Tehnică Gh. Asachi din Iaşi. Am primit la Redacţie articolul dumneavoastră cu titlul „Suma unor serii de puteri". Îl vom supune atenţiei Colegiului Redacţional.

Alisa Hârjabă – Colegiul Naţional Costache Negri din Târgu Ocna şi *Cristina Elena Huţeanu*, Universitatea Ştefan cel Mare din Suceava. Nota dumneavoastră intitulată „Metode de demonstraţie a unor tipuri speciale de inegalităţi" se află în atenţia Colegiului Redacţional care va decide asupra oportunităţii publicării ei.

Constantin Ababei – Şcoala Mihai Eminescu din Roman. Materialul cu titlul „Unitatea matematicii elementare " expediat de dumneavoastră va fi supus atenţiei Colegiului Redacţional care va decide în ce măsură este publicabil sau nu.

Ovidiu Pop – Satu Mare. Am primit problema dumneavoastră. Vom discuta în ce măsură este publicabilă.

Gheorghe Szöllösy – str. Avram Iancu, nr. 28E, Sighetu-Marmaţiei. Cele două probleme expediate de dumneavoastră vor fi supuse atenţiei Colegiului Redacţional.

Jose Luis Diaz-Barrero – Universidad Politechnica de Catalunya, Barcelona, Spain. We confirm the reception of the problem you sent to us. It follows to be submitted to the attention of the Editorial Board.

Dan Radu