GAZETA MATEMATICĂ
SERIA A
REVISTĂ DE CULTURĂ MATEMATICĂ

ANUL XXV(CIV) **Nr. 2 / 2007**

Interviu cu profesorul Dorin P. Popescu, Preşedintele S.S.M.R., cu ocazia împlinirii vârstei de 60 de ani

Mircea Trifu. *Stimate domnule profesor, în urmă cu ceva vreme, mai precis în 21 martie, aţi împlinit 60 de ani de viaţă. Universitatea din Constanţa v-a omagiat în mod deosebit, acordându-vă titlul de Doctor Honoris Causa. Vă adresez cu acest prilej, din partea cititorilor revistei urările cuvenite. Este pentru dumneavoastră această vârstă un motiv de bilanţ, un fel de ... să tragem linie şi să adunăm?*

Dorin Popescu. Vă mulţumesc pentru urare. Vârsta pe care tocmai am depăşit-o este, dacă nu vrem să-i spunem de bilanţ, una de privit înapoi cu oarecare gravitate, cu multă înţelegere şi destulă îngăduinţă.

M. T. *Cine anume atunci, în anii de început, în şcoală, v-a făcut să alegeţi matematica?*

D.P. Nu a fost o alegere uşoară, aş spune dimpotrivă. Părinţii mei, amândoi învăţători, mama venind chiar dintr-o familie veche de învăţători, mi-ar fi dorit o pregătire mai degrabă umanistă. În clasa a V-a însă, cu profesorul de matematică *Nicolae Zugravu*, am reuşit să obţin premiul I la Olimpiada micilor matematicieni pe fosta regiune Ploieşti. Cunoscutul profesor *Ioan Grigore* mi-a înmânat personal premiul.

M. T. *Profesorul Nicolae Zugravu are în prezent 77 de ani, este pensionar şi se plânge de dureri reumatice ...*

D.P. L-am invitat să participe la susţinerea tezei mele de doctorat, în anul 1974. N-a putut veni, cum n-a putut veni nici la Constanţa. Cu vremea nu te mai încumeţi la drum lung... Mi-a trimis însă o scrisoare emoţionantă. Pe *Nicolae Zugravu* l-am avut profesor numai un an de zile. Succesorul lui avea mai puţină metodă, aşa că în gimnaziu am fost nevoit să învăţ mai mult singur.

M. T. *Deşi aveaţi liceu în localitatea natală, aţi urmat liceul la Buzău...*

D.P. În Pătârlagele era, cum s-ar numi azi, un liceu tehnic, eu aveam probleme de „dosar“, aşa că m-am „refugiat“ la Buzău, unde nu prea se ştia cine sunt. Şi apoi, am fost singurul candidat care, la admitere, am rezolvat integral subiectul de matematică. Aşa că am fost declarat *admis*.

M. T. *Liceul din Buzău era unul de prestigiu în zonă ...*

D.P. La matematică l-am avut pe cunoscutul profesor *Ion. Păunel.* Nu ne-am înţeles, avea un stil milităros care nu se potrivea cu felul meu de a fi. Mai degrabă m-am apropiat de profesorul de fizică, cu care am câştigat premiul I pe regiune la Olimpiada de fizică. Mă îndreptam cu paşi repezi spre Politehnică, care era la „modă" pe vremea aceea. În ultimul moment m-am răzgândit şi am dat examen de admitere la Facultatea de Matematică din Bucureşti. Era în anul 1964.

M. T. *Aţi ajuns pe drumul cel bun, cum s-ar zice...*

D.P. Nu încă. La început, teoriile prezentate la facultate mi s-au părut prea abstracte şi fără motivaţie. Mă gândeam să renunţ şi să mă transfer la Politehnică, la Electronică. A intervenit însă colegul de cameră şi prietenul meu, *George Georgescu*, în prezent profesor şi el, la facultatea noastră, care a reuşit să mă intereseze cu ceva topologie după *Bourbaki*. Tot el m-a dus la un seminar de teoria categoriilor, susţinut de tânărul, pe atunci, cercetător *Nicolae Popescu*, de la Institutul de Matematică. Începusem chiar să am câteva rezultate pe care le-am publicat.

M. T. *Dintre profesorii pe care i-aţi avut în facultate, cine v-a influenţat în mod deosebit?*

D.P. Aş aminti în primul rând pe profesorul *N. Boboc*, care preda impecabil şi cu folos pentru studenţi. Domnia sa ne atenţiona că important este să înveţi matematica şi abia apoi ce rezultate ai şi, în special, ce aplicaţii au rezultatele tale. Eu, aplecat spre teoria categoriilor, am neglijat alte domenii, nereuşind să îmi fac o bună cultură matematică. După absolvirea facultăţii, în anul 1969, am fost oprit ca preparator la catedra de algebră, condusă pe atunci de profesorul *Gh. Galbură*. Am devenit apoi asistent. În anul 1979 am trecut cercetător la INCREST. Cea mai mare parte a rezultatelor mele le-am obţinut după părăsirea Universităţii. La INCREST era linişte şi o atmosferă propice pentru cercetare.

M. T. *Între timp aţi susţinut teza de doctorat, aţi primit premiul pentru cercetare oferit de Uniunea Matematicienilor din Balcani, în 1973, şi premiul Academiei Române, în 1979. Rezultatele obţinute v-au asigurat, la 33 de ani, un loc important printre matematicienii români şi recunoaştere internaţională. Aţi putut participa la întâlniri ştiinţifice importante.*

D.P. Am beneficiat timp de 6 luni, în anul 1980, de o bursă NSF, obţinută printr-un dificil concurs, la Institutul de Studii Avansate de la Princeton, S.U.A., unde am cunoscut mari matematicieni, printre care şi pe *M. Artin*. Mai apoi plecările în afară, chiar şi în ţările din Est, s-au făcut cu tot mai mare dificultate.

M. T. *În compensaţie, în ţară aţi început organizarea şcolilor naţionale de algebră, până acum 15 la număr.*

D.P. Am început la Iaşi, în anul 1985, împreună cu *Nicolae Radu* şi *Mirela Ştefănescu*, sub conducerea ştiinţifică a lui *S. Bărcănescu*. Din 1990, împreună cu *Mirela Ştefănescu* şi *Viviana Ene* ne-am „mutat" la Universitatea Ovidius din Constanţa. Mă ocupam deja de o problemă nouă pentru mine, module maximale *Cohen-Macaulay*. Am reuşit să-l am ca partener pe excelentul profesor *J. Herzog*, care m-a ajutat să obţin o bursă Humboldt, de care am beneficiat abia în 1990, la 43 de ani.

M. T. *Începând cu acest an, aţi fost prezent, ca invitat sau folosind burse, granturi sau contracte, în mari universităţi şi institute de cercetare prestigioase din U.S.A., Austria, Canada, Marea Britanie, Germania, Italia, Japonia, Franţa, Norvegia, Olanda, Spania, Pakistan, Polonia, Ungaria. Aţi reuşit să vă faceţi cunoscute rezultatele. Sunteţi autorul a peste 80 de articole în reviste ştiinţifice de renume* *şi a unor monografii unanim apreciate. Ce se „ascunde“ în spatele acestor rezultate remarcabile?*

D.P. Trebuie să mărturisesc că mi-a trebuit ceva timp să înţeleg şi să fac matematică. Dacă am reuşit aceasta s-a datorat faptului că nu m-am oprit din muncă, depăşind pas cu pas dificultăţile.

M. T. *De la Institut v-aţi întors din nou la Universitate...*

D.P. Am revenit în anul 1991, când profesorul *Nicolae Radu* mi-a propus un post de conferenţiar, având convingerea că pot fi valorificate cunoştinţele mele. Din păcate m-am înşelat. După mine, acestea ar putea intra în componenţa unui curs eventual opţional. În afară de aceasta, aici nu există bani suficienţi, şi, deci, nici o politică educaţională coerentă pentru o solidă pregătire matematică a tinerilor.

M. T. *Aveţi, totuşi, elevi ...*

D.P. Dreptul de a conduce doctoranzi l-am primit târziu şi doar *Viviana Ene* şi *Marius Vlădoiu* şi-au dat, oficial, doctoratul cu mine. Sunt mândru de ei şi mă bucur de rezultatele lor. În prezent am şase doctoranzi în ţară şi doi în străinătate.

M. T. *Din anul 2004 sunteţi Preşedintele Societăţii de Ştiinţe Matematice din România. Care au fost principalele strădanii în această funcţie?*

D.P. Pentru mine această funcţie este o posibilitate de împlinire a datoriei pe care o aveam faţă de comunitatea matematică românească. Încerc, în timpul mandatului meu, să refac legătura, ruptă cu destulă vreme în urmă, între învăţământul preuniversitar şi cel universitar.

M. T. *Domnule profesor, cu ce gânduri am putea încheia acest interviu?*

D.P. În cei 60 de ani de viaţă am reuşit să învăţ matematică, să fac matematică, să predau matematică. Am cunoscut o mulţime de oameni interesanţi de la care am învăţat multe şi cărora le datorez multe. Am fost foarte norocos că i-am întâlnit.

Interviu realizat de **Mircea Trifu**

Metoda funcţiilor generatoare (I)

de Liviu I. Nicolaescu

Abstract

We survey, from a modern point of view, but relying only on high-school mathematics, some classical applications of the very versatile method of generating functions.

Key words: generating functions, finite difference equations, recurrence relations, *Stirling*, *Catalan* and *Bernoulli* numbers, *Lagrange* inversion formula, translation invariant differential operators, *Bernoulli* and *Laguerre* polynomials, *Euler-MacLaurin* formula

M.S.C.: 05A15, 11B73, 13F25, 13J05, 30B10

1. Introducere

În rândurile care urmează dorim să prezentăm cititorului o tehnică remarcabil de eficace în abordarea multor probleme din combinatorică. Metoda este veche de câteva sute de ani şi a fost folosită de clasici ai matematicii ca *Newton*, *Bernoulli*, *Euler*, *Gauss* şi *Riemann* pentru a demonstra rezultate surprinzătoare.

Probabil că prima manifestare a acestei metode este formula binomului lui *Newton*, care spune că numărul

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

este coeficientul lui t^k în polinomul $(1+t)^n$, adică

$$(1+t)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k.$$

În limbaj modern, putem spune că funcţia $(1+t)^n$ este funcţia generatoare a numerelor:

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{n}.$$

Din acest motiv, aceste numere se mai numesc şi *coeficienţi binomiali.* Faptul că funcţia generatoare $(1+t)^n$ are o formă aşa de simplă, conduce la o multitudine de consecinţe pentru coeficienţii binomiali.

Metoda funcţiilor generatoare are la bază o idee foarte simplă. Unui şir de numere reale $a_0, a_1, \ldots$, îi asociem o expresie de forma:

$$\underline{a}(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots ,$$

pe care o numim funcţia sau seria generatoare a acestui şir. Putem gândi o astfel de serie ca un polinom de grad infinit. O astfel de expresie se numeşte serie *formală* de puteri pentru că nu ne interesează convergenţa ei.

De foarte multe ori aceste serii au forme foarte simple care ne permit să tragem concluzii despre şirul original $\{a_n\}_{n\geq 0}$, mai greu de obţinut pe alte căi.

În prima parte a lucrării discutăm seriile formale şi operaţiile pe care le putem efectua cu ele. Ilustrăm aceste idei pe multe situaţii concrete care apar în probleme de combinatorică şi algebră.

În cea de a doua parte a lucrării discutăm şiruri de polinoame de o singură variabilă. Această parte a lucrării este puţin mai dificilă. Deşi rezultatele sunt vechi de câteva sute de ani, le abordăm dintr-un punct de vedere foarte modern, iniţiat acum două-trei decenii. Nivelul de abstractizare este ceva mai ridicat şi probabil că cititorul va trebui să se adapteze la un mod de gândire radical diferit de cel întâlnit în matematica de liceu, deşi nivelul de cunoştinţe nu depăşeşte matematica de liceu.

De aceea încurajăm foarte mult cititorul să rezolve exerciţiile pe care le-am presărat de-a lungul prezentării. Sunt probleme clasice, interesante în sine, dar care vor ajuta şi la asimilarea acestui nou punct de vedere. Aceste probleme sunt comparabile ca nivel de dificultate cu unele probleme de olimpiadă, faza naţională sau internaţională.

Pentru mai multe informaţii privind acest subiect recomandăm [1, 2, 4, 5] care ne-au servit ca ghid în organizarea acestei lucrări.

1. Serii formale şi serii convergente de puteri

Definiţia 1.1. O *serie formală de puteri cu coeficienţi reali este o expresie de forma*:

$$\underline{a}(t) = \sum_{n \geq 0} a_n t^n = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots .$$

Mai sus, t este o variabilă formală. Mulţimea seriilor formale de puteri se notează cu $\mathbb{R}[[t]]$. □

Să observăm că există nişte operaţii naturale pe această mulţime. Putem aduna două serii

$$(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots) + (b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \cdots) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots ,$$

unde

$$c_n = a_n + b_n, \qquad \forall\, n \geq 0.$$

Putem, de asemenea, înmulţi două serii formale ca şi cum am înmulţi două polinoame

$$(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots) \times (b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \cdots) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots ,$$

unde

$$c_0 = a_0 b_0, \;\; c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0, c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0,$$

şi, în general

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}, \quad \forall\, n \geq 0.$$

Aceste operaţii sunt comutative, asociative, distributive etc. În limbaj modern, spunem că $\mathbb{R}[[t]]$ este un inel comutativ cu unitate.

Pentru a opera cu seriile formale de puteri este convenabil să introducem notiunea de *jet*.

Definiţia 1.2. *Pentru orice întreg nenegativ k şi pentru orice serie formală*

$$\underline{a}(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots \in \mathbb{R}[[t]],$$

definim k-jetul lui $\underline{a}$ ca fiind polinomul de grad cel mult k,

$$J_k \underline{a}(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_k t^k. \qquad \square$$

Jeturile unei serii sunt importante datorită următorului fapt elementar.

Teorema 1.3. **[Principiul separării formale]**. *Fie $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}[[t]]$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente.*

(a) $\underline{u} = \underline{v}$.

(b) $J_k \underline{u} = J_k \underline{v}, \;\; \forall\, k \geq 0.$ □

Remarca 1.4. Credem că ar trebui să explicăm cititorului motivul pentru care rezultatul de mai sus se numeşte principiul separării. Motivul este simplu.

Rezultatul de mai sus spune că putem distinge (sau separa) două serii $\underline{u}$, $\underline{v}$ uitându-ne la jeturile lor. Mai precis, putem decide dacă $\underline{u} \neq \underline{v}$ *într-un număr finit de paşi*, în sensul că trebuie să existe un întreg pozitiv, astfel încât $J_k\underline{u} \neq J_k\underline{v}$.

Teorema de mai sus este un caz foarte special al unui rezultat fundamental în algebră, numit teorema de intersecţie a lui *Krull*. □

Propoziţia 1.5. *Să presupunem că* $\underline{u}(t) = u_0 + u_1 t + \cdots \in \mathbb{R}[[t]]$ *este o serie formală de puteri cu proprietatea că* $u_0 \neq 0$*, adică* $J_0(\underline{u}(t)) \neq 0$*. Atunci există o unică serie formală* $\underline{v}(t) \in \mathbb{R}[[t]]$ *cu proprietatea că*

$$\underline{u}(t)\underline{v}(t) = 1. \tag{1.1}$$

Vom nota $\underline{v}(t) := \dfrac{1}{\underline{u}(t)}$ şi vom spune că $\underline{v}$ este *inversa multiplicativă* a seriei $\underline{u}(t)$.

Demonstraţie. O serie $\underline{v}(t) = v_0 + v_1 t + v_2 t^2 + \cdots$ satisface (1.1) dacă şi numai dacă satisface următorul şir de egalităţi:

$$u_0 v_0 = 1,\ \ u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \cdots + u_n v_0 = 0, \quad \forall\, n \geq 1.$$

Prin urmare, coeficienţii v_n satisfac relaţia de recurenţă

$$v_0 = \frac{1}{u_0},\ \ v_n = -\frac{1}{u_0}\big(\, u_1 v_{n-1} + \cdots + u_n v_0\,\big). \tag{1.2}$$

Aşadar seria $\underline{v}(t)$, ai cărei coeficienţi sunt definiţi în mod unic de (1.2), satisface ecuaţia (1.1). □

Remarca 1.6. Rezultatul de mai sus se poate reformula în limbaj modern spunând că elementele $\underline{u}(t) \in \mathbb{R}[[t]]$ cu proprietatea că $J_0(\underline{u}(t)) \neq 0$ sunt elemente inversabile ale inelului $\mathbb{R}[[t]]$. Este uşor de văzut că acestea sunt *toate* elementele inversabile ale acestui inel. □

Definiţia 1.7. *O serie de puteri*

$$\underline{a}(t) = \sum_{n \geq 0} a_n t^n$$

se numeşte convergentă dacă există un număr real pozitiv r *astfel încât, pentru orice număr* $t \in (-r, r)$*, şirul de numere reale*

$$\sigma_n \underline{a}(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n,$$

este convergent. Vom nota cu $\sigma_\infty \underline{a}(t)$ *limita şirlui* $\sigma_n \underline{a}(t)$ *şi o vom numi suma seriei. De asemenea, vom nota cu* $\mathbb{R}\{t\}$ *submulţimea lui* $\mathbb{R}[[t]]$ *constând din serii convergente.* □

Exerciţiul 1.8. (a) Seria geometrică

$$\underline{g}(t) := 1 + t + t^2 + \cdots$$

este convergentă pentru orice $|t| < 1$, iar suma ei este $\dfrac{1}{1-t}$.

(b) Seria

$$\underline{e}(t) := 1 + \frac{1}{1!}t + \frac{1}{2!}t^2 + \cdots$$

este convergentă pentru orice număr real t, iar suma ei este e^t. □

Are loc următorul rezultat a cărui demonstraţie o lăsăm cititorului ca un exerciţiu.

Teorema 1.9. (a) *Suma şi produsul a două serii convergente este o serie convergentă.*

(b) *O serie de puteri*

$$\underline{a}(t) = \sum_{n\geq 0} a_n t^n$$

este convergentă dacă şi numai dacă există un număr real pozitiv c astfel încât

$$|a_{n+1}| \leq c|a_n|, \qquad \forall\, n \geq 0.$$

(c) *Dacă seria $\underline{a}(t)$ este convergentă pentru $t \in (-r, r)$, atunci suma ei este o funcţie infinit diferenţiabilă $f : (-r, r) \to \mathbb{R}$, iar coeficienţii a_n sunt descrişi de formula MacLaurin*

$$a_n := \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dt^n}\Big|_{t=0} f(t).$$ □

Partea (a) a teoremei de mai sus se poate reformula spunând că submulţimea $\mathbb{R}\{t\}$ este un subinel al lui $\mathbb{R}[[t]]$. De multe ori, când avem de a face cu o serie convergentă $\underline{a}(t)$ a cărei sumă este o funcţie $f(t)$, în loc să folosim notaţia mai precisă

$$\sigma_\infty \underline{a}(t) = f(t),$$

vom folosi notaţia mai simplă

$$\underline{a}(t) = f(t).$$

Astfel, în loc să scriem

$$\sigma_\infty(1 + t + t^2 + \cdots) = \frac{1}{1-t},$$

vom scrie

$$1 + t + t^2 + \cdots = \frac{1}{1-t}.$$

Exerciţiul 1.10. Fie α un număr real. Folosind Teorema 1.9., arătaţi că seriile

$$p_\alpha(t) = 1 + \frac{\alpha}{1!}t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}t^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}t^3 + \cdots$$

şi

$$L(t) = \sum_{n\geq 1}\frac{t^n}{n}$$

sunt convergente, iar sumele lor sunt

$$p_\alpha = (1+t)^\alpha, \;\; L(t) = \log(1+t),$$

unde log este logaritmul natural. □

Pe mulţimea $\mathbb{R}[[t]]$ putem defini operaţia de derivare formală $D : \mathbb{R}[[t]] \to \mathbb{R}[[t]]$, dată de

$$D(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots) = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + \cdots .$$

Propoziţia 1.11. *Operaţia de derivare formală este liniară, adică*

$$D(\lambda \underline{a} + \mu \underline{b}) = \lambda D\underline{a} + \mu D\underline{b}, \quad \forall\, \underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}[[t]], \quad \text{şi} \quad \forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$

şi satisface regula lui Leibniz, anume:

$$D(\underline{a} \cdot \underline{b}) = (D\underline{a})\underline{b} + \underline{a}(D\underline{b}), \quad \forall\, \underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}[[t]]. \qquad \square$$

Exerciţiul 1.12. Demonstraţi propoziţia de mai sus folosind principiul separării formale. □

Are loc următorul rezultat.

Teorema 1.13. *Dacă seria formală $\underline{a}(t) \in \mathbb{R}[[t]]$ este convergentă şi are suma $s(t)$, atunci şi seria formală $D\underline{a}(t)$ este convergentă, iar suma ei este $\dfrac{ds}{dt}$.* □

Demonstraţia necesită unele noţiuni mai avansate de analiză şi de aceea nu o prezentăm. Cititorul curios poate consulta orice tratat de analiză reală, ca de exemplu [3, Capitolul XII].

Exerciţiul 1.14. Seria $\underline{a}(t) = 1 + t + t^2 + \cdots$ converge la $\dfrac{1}{1-t}$. Prin urmare derivata formală

$$D\underline{a}(t) = 1 + 2t + 3t^2 + \cdots$$

este convergentă, iar suma ei este

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{1-t} = \frac{1}{(1-t)^2}.$$

Mai general, seria formală $D^k \underline{a}(t)$ este convergentă, iar suma ei este $\dfrac{k!}{(1-t)^{k+1}}$. Această ultimă egalitate se poate rescrie sub forma

$$k!t^0 + 2 \cdot 3 \cdots kt + \cdots + (n+1)\cdots(n+k-1)t^n + \cdots = \frac{k!}{(1-t)^{k+1}}.$$

Împărţind prin $k!$, deducem

$$\frac{1}{(1-t)^{k+1}} = 1 + \binom{k+1}{k} t + \cdots + \binom{n+k}{k} t^n + \cdots . \tag{1.3}$$

Formula de mai sus se poate obţine şi din Exerciţiul 1.10, alegând $\alpha = -(k+1)$.

Să observăm acum că

$$\frac{1}{(1-t)^{k+1}} = \Big(\sum_{m \geq 0} t^m\Big)^{k+1} = \prod_{j=0}^{k} \Big(\sum_{m_j \geq 0} t^{m_j}\Big).$$

Coeficientul lui t^n din produsul de mai sus este egal cu coeficientul lui t^n al seriei din partea stângă a egalităţii (1.3). Acest coeficient este $\binom{n+k}{k}$.

Pe de altă parte, coeficientul t^n din produsul de mai sus are o interpretare combinatorică. El este egal cu numărul de monoame de forma

$$t^{m_0} \cdot t^{m_1} \cdots t^{m_k},$$

cu proprietatea că $m_0 + \cdots + m_k = n$. Putem reformula acest lucru mult mai intuitiv.

Avem $(k+1)$ cutii etichetate cu numerele $0, 1, \ldots, k$. Dorim să aflăm în câte moduri putem distribui n bile *identice* în aceste $(k+1)$ cutii *distincte*. O distribuţie este dată de colecţia ordonată de numere $(m_0, m_1, \ldots, m_k)$, unde m_j este numărul de bile din cutia j. Ajungem astfel la un rezultat combinatoric binecunoscut: numărul de distribuţii de n bile *identice* în $(k+1)$ cutii *diferite* este egal cu $\binom{n+k}{k}$. $\square$

2. Funcţii generatoare

Putem în fine introduce personajul principal al acestei lucrări.

Definiţia 2.1. *Funcţia generatoare a unui şir* $\{a_n\}_{n\geq 0}$ *este seria formală*

$$\mathbf{Fg}(a_n; t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots .$$

Funcţia generatoare de tip exponenţial a unui şir $\{a_n\}_{n\geq 0}$, *este funcţia generatoare a şirului* $\left\{\frac{a_n}{n!}\right\}_{n\geq 0}$. *Vom nota funcţia generatoare de tip exponenţial prin* $\mathbf{Fg}_{\exp}$, *astfel că*

$$\mathbf{Fg}_{\exp}(a_n; t) = \mathbf{Fg}\left(\frac{a_n}{n!}; t\right). \qquad \square$$

Exerciţiul 2.2. (a) Dacă $a_n = 1$, pentru orice $n \geq 0$, atunci

$$\mathbf{Fg}(a_n; t) = 1 + t + t^2 + \cdots = \frac{1}{1-t} \quad \text{şi} \quad \mathbf{Fg}_{\exp}(a_n; t) = \mathrm{e}^t.$$

Mai general, pentru orice număr real r, avem egalităţile:

$$\mathbf{Fg}(r^n; t) = 1 + rt + r^2t^2 + \cdots = \frac{1}{1-rt} \qquad \text{şi} \qquad \mathbf{Fg}_{\exp}(r^n; t) = \mathrm{e}^{rt}.$$

(b) Pentru orice şiruri $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$, şi pentru orice număr real c, au loc egalităţile

$$\mathbf{Fg}(a_n + b_n; t) = \mathbf{Fg}(a_n; t) + \mathbf{Fg}(b_n; t), \quad \mathbf{Fg}(ca_n; t) = c\mathbf{Fg}(a_n; t).$$

$\square$

Exerciţiul 2.3. Arătaţi că

$$\sum_{n\geq 0} c_n \frac{t^n}{n!} = \Big(\sum_{j\geq 0} a_j \frac{t^j}{j!}\Big) \cdot \Big(\sum_{k\geq 0} b_k \frac{t^k}{k!}\Big)$$

dacă şi numai dacă

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k b_{n-k}. \qquad \square$$

Exerciţiul 2.4. Să considerăm un şir $\{a_n\}_{n\geq 0}$ a cărui funcţie generatoare este

$$\underline{a}(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots .$$

Atunci funcţia generatoare a şirului de sume parţiale

$$s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$$

este

$$s(t) = \frac{1}{1-t}\underline{a}(t). \qquad \square$$

Observaţiile foarte simple de mai sus ne permit deja să tragem nişte concluzii remarcabile.

Exerciţiul 2.5 [Numerele lui Fibonacci]. Să considerăm şirul lui *Fibonacci* definit de condiţiile iniţiale $F_0 = F_1 = 1$ şi de relaţia de recurenţă

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad \forall\, n \geq 0. \tag{2.1}$$

Să notăm cu $F(t)$ funcţia generatoare a şirului lui *Fibonacci*. Dacă înmulţim (2.1) cu t^{n+2} obţinem:

$$F_{n+2}t^{n+2} = t(F_{n+1}t^{n+1}) + t^2(F_n t^n).$$

Să sumăm egalitatea de mai sus după $n = 0, 1, 2, \ldots$. Obţinem

$$F_2t^2 + F_3t^3 + F_4t^4 \cdots = t(F_1t + F_2t^2 + F_3t^3 \cdots) + t^2(F_0 + F_1t + F_2t^2 + \cdots).$$

Egalitatea de mai sus se poate rescrie astfel

$$F(t) - (F_0 + F_1 t) = t(F(t) - F_0) + t^2 F(t),$$

ceea ce este echivalent cu $F(t) - (1 + t) = (t + t^2)F(t) - t$, adică echivalent cu $F(t)(1 - t - t^2) = 1$.

Deducem din cele de mai sus următoarea egalitatea surprinzătoare:

$$F(t) = \frac{1}{1 - t - t^2}.$$

Recunoaştem la numitor ecuaţia caracteristică a recurenţei lui *Fibonacci*.

Putem descompune funcţia raţională de mai sus în fracţii simple. Notăm cu r_1, r_2 rădăcinile ecuaţiei caracteristice

$$r^2 - r - 1 = 0.$$

Are loc egalitatea

$$1 - t - t^2 = (1 - r_1 t)(1 - r_2 t).$$

Dorim să determinăm A şi B astfel încât

$$\frac{1}{1-t-t^2} = \frac{1}{(1-r_1t)(1-r_2t)} = \frac{A}{1-r_1t} + \frac{B}{1-r_2t} = \frac{A(1-r_2t)+B(t-r_1t)}{1-t-t^2},$$

pentru orice t, deci obţinem

$$\begin{cases} A+B &= 1 \\ r_2A+r_1B &= 0. \end{cases}$$

Determinantul acestui sistem este $r_1 - r_2$, de unde rezultă că

$$A = \frac{r_1}{r_1-r_2}, \quad B = \frac{r_2}{r_2-r_1}.$$

Prin urmare

$$F(t) = \frac{r_1}{r_1-r_2}\frac{1}{1-r_1t} + \frac{r_2}{r_2-r_1}\frac{1}{1-r_2t} = \frac{r_1}{r_1-r_2}\Big(\sum_{n\geq 0} r_1^n t^n\Big) + \frac{r_2}{r_2-r_1}\Big(\sum_{n\geq 0} r_2^n t^n\Big).$$

Rezultă de aici binecunoscuta formulă

$$F_n = \frac{r_1^{n+1}}{r_1-r_2} + \frac{r_2^{n+1}}{r_2-r_1}.$$ □

Exerciţiul 2.6. [Relaţiile lui Newton]. Polinoamele simetrice elementare în n variabile $r_1, \ldots, r_k$ sunt date de relaţiile:

$$c_0 = 1, \;\; c_1(r_1,\ldots,r_n) = r_1 + \cdots + r_n, \;\; c_k(r_1,\ldots,r_n) = \sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq n} r_{i_1}\cdots r_{i_k}.$$

Este binecunoscut faptul că aceste expresii satisfac relaţiile lui *Viète*

$$C(t) = (1-r_1t)(1-r_2t)\cdots(1-r_nt) = c_0 - c_1t + c_2t^2 + \cdots + (-1)^n c_n t^n.$$

Aşa numita teoremă fundamentală a polinoamelor simetrice spune că orice polinom simetric S în variabilele $r_1, \ldots, r_n$ se poate exprima ca un polinom în variabilele $c_1, \ldots, c_n$:

$$S(r_1,\ldots,r_n) = \bar{S}(c_1,\ldots,c_n).$$

Mai mult, dacă S are coeficienţii întregi, atunci şi $\bar{S}$ are coeficienţii întregi.

De exemplu,

$$r_1^2 + r_2^2 + \cdots + r_n^2 = c_1^2 - 2c_2. \tag{2.2}$$

Acum câteva sute de ani *Isaac Newton* a descris un procedeu foarte elegant de a exprima polinoamele simetrice

$$p_k(r_1,\ldots,r_n) = r_1^k + r_2^k + \cdots + r_n^k, \;\; k \geq 0,$$

ca polinoame în variabilele c_i. Astfel, egalitatea (2.2) se poate rescrie ca

$$p_2 = c_1^2 - 2c_2.$$

Chiar şi cazul următor, al polinomului p_3, pare a fi destul de complicat.

Newton a avut inspiraţia să descrie polinoamele p_r nu pe rând, unul câte unul, ci toate deodată, folosind funcţia lor generatoare,

$$P(t) = p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + \cdots ,$$

căreia i-a găsit o descriere foarte simplă. Iată argumentul lui *Newton*.

Să observăm, în primul rând, că

$$P(t) = n + (r_1 + \cdots + r_n)t + (r_1^2 + \cdots + r_2^2)t^2 + \cdots =$$

$$= (1 + r_1 t + r_1^2 t^2 + \cdots) + \cdots + (1 + r_n t + r_n^2 t^2) = \frac{1}{1 - r_1 t} + \cdots + \frac{1}{1 - r_n t}.$$

Prin urmare,

$$P(t) - n = \sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{1}{1 - r_k t} - 1 \Big) = \sum_{k=1}^{n} \frac{r_1 t}{1 - r_1 t}.$$

Derivând polinomul $C(t)$, obţinem

$$\frac{d}{dt} C(t) = \frac{d}{dt} \prod_{k=1}^{n} (1 - r_k t) =$$

$$= -r_1(1-r_2 t)\cdots(1-r_n t) - r_2(1-r_1 t)(1-r_3 t)\cdots(1-r_n t) - \cdots - r_n(1-r_1 t)\cdots(1-r_{n-1} t),$$

de unde deducem

$$\frac{C'(t)}{C(t)} = -\sum_{k=1}^{n} \frac{r_1}{1 - r_1 t}, \quad \text{deci} \quad t\frac{C'(t)}{C(t)} = P(t) - n.$$

Acum putem rescrie ultima egalitate sub forma

$$-tC'(t) = C(t)(P(t) - n).$$

Dacă ne reamintim că

$$C(t) = 1 - c_1 t + c_2 t^2 - \cdots , \;\; tC'(t) = -c_1 t + 2c_2 t^2 - 3c_3 t^3 + \cdots ,$$

şi

$$P(t) - n = p_1 t + p_2 t^2 + \cdots ,$$

deducem că

$$c_1 t - 2c_2 t^2 + 3c_3 t^3 - \cdots = (1 - c_1 t + c_2 t^2 - \cdots)(p_1 t + p_2 t^2 + \cdots).$$

Relaţiile lui *Newton* se obţin identificând coeficienţii lui t^k în cele două părţi ale egalităţii de mai sus. Avem astfel:

$$p_1 = c_1, \;\; p_2 - p_1 c_1 = -2c_2, \;\; p_3 - p_2 c_1 + p_1 c_2 = 3c_3,$$

$$p_k - p_{k-1}c_1 + \cdots + (-1)^{k-1}p_1c_{k-1} = (-1)^{k+1}kc_k, \quad \forall\, k \le n \tag{2.3a}$$

$$p_k - p_{k-1}c_1 + \cdots + (-1)^{n}p_{k-n}c_n = 0, \quad \forall\, k > n. \tag{2.3b}$$

De exemplu, avem

$$p_3 = p_2c_1 - p_1c_2 + 3c_3 = c_1(c_1^2 - 2c_2) - c_1c_2 + 3c_3 = c_1^3 - 3c_1c_2 + 3c_3. \qquad \square$$

Exerciţiul 2.7. Descrieţi p_4 ca un polinom în variabilele c_1, c_2, c_3, c_4. $\square$

Exerciţiul 2.8. Să presupunem că sunt date n mulţimi finite $A_1, \ldots, A_n$. Notăm

$$I_n := \{1, 2, \ldots, n\}, \quad A := \cup_{i \in I_n} A_i.$$

Pentru orice submulţime $S \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$, notăm cu $r(S)$ cardinalul mulţimii

$$D_S = \big\{ a \in A \mid a \in A_s, \text{ pentru orice } \ s \in S, \text{ şi } \ a \notin A_k, \text{ pentru orice } \ k \notin S \,\big\},$$

iar cu $R(S)$ cardinalul mulţimii

$$A_S := \bigcap_{j \in S} A_j.$$

(a) Folosind principiul includerii-excluderii, demonstraţi că

$$r(S) = \sum_{T \supseteq S} (-1)^{|T|-|S|} R(T).$$

(b) Demonstraţi că

$$\sum_{S \subset I_n} r(S) x^{|S|} = \sum_{T \subset I_n} R(T)(x-1)^{|T|}, \text{ pentru orice } \ x \in \mathbb{R}.$$

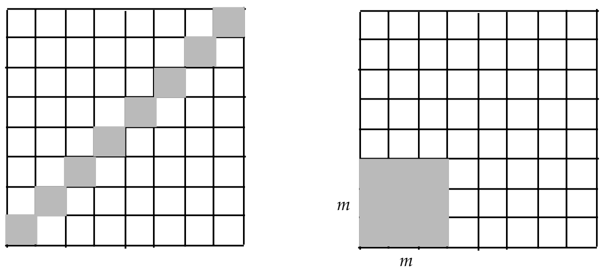


Figura 1. *Regiuni interzise pe o tablă de şah de tip $n \times n$*

Exerciţiul 2.9. Să considerăm o tablă de şah de tip $n \times n$. Numim *distribuţie neagresivă* de turnuri pe această tablă o distribuţie de n turnuri încât nu există două turnuri pe aceeaşi linie sau coloană. Definim o *regiune* a tablei de şah ca fiind o submulţime a mulţimii tuturor celor n^2 pătrate (vezi fig. 1). Pentru o regiune A a tablei de şah şi orice întreg $k \ge 0$, introducem următoarele notaţii:

• $r_k(A) :=$ numărul de distribuţii neagresive cu proprietatea că exact k turnuri se găsesc în regiunea A.

• $R_k(A)$:= numărul de distribuţii neagresive cu proprietatea că cel puţin k turnuri se găsesc în regiunea A.

• $r_A(x) = \sum_{k\geq 0} r_k(A)x^k$, $R_A(x) = \sum_{k\geq 0} R_k(A)x^k$. Observaţi că $r_A(0)$ este numărul de distribuţii neagresive cu proprietatea că nici unul din turnuri nu se află în regiunea „interzisă" A. Polinomul $r_A(x)$ se numeşte *polinomul turnurilor asociat regiunii A*.

(a) Arătaţi că pentru orice regiune A a tablei de şah are loc egalitatea

$$r_A(x) = R_A(x-1),\ \ \forall\, k \geq 0.$$

(b) Calculaţi $r_A(x)$ când A este fie mulţimea vidă, fie una din regiunile colorate cu gri în figura 1. □

3. Ecuaţii cu diferenţe

Să considerăm un şir de numere reale $\{a_n\}_{n\geq 0}$. Să notăm cu $\underline{a}(t) := \mathbf{Fg}(a_n; t)$ funcţia generatoare a acestui şir. Putem considera *şirul diferenţelor* dat de

$$(\Delta a)_n = a_{n+1} - a_n,\ \ n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Putem să ne gândim la şirul $\big\{(\Delta a)_n\big\}$ ca fiind derivata şirului $\{a_n\}$. Dorim să exprimăm funcţia generatoare a diferenţelor finite cu ajutorul funcţiei generatoare a şirului iniţial. Să notăm cu $\Delta\underline{a}(t)$ seria generatoare a şirului de diferenţe finite.

Să observăm că

$$(1-t)\underline{a}(t) = (1-t)(a_0+a_1t+a_2t^2+\cdots) = a_0+(a_1-a_0)t+(a_2-a_1)t^2+\cdots = a_0+t\Delta\underline{a}(t).$$

Deducem că

$$\Delta\underline{a}(t) = \frac{1-t}{t}\underline{a}(t) - \frac{1}{t}a_0 = q(t)\underline{a}(t) - \frac{1}{t}a_0, \tag{3.1}$$

unde $q(t)$ este funcţia raţională $\dfrac{1-t}{t}$.

Putem defini inductiv „derivatele de ordin superior":

$$(\Delta^{k+1}a)_n := \big(\Delta(\Delta^k a)\big)_n.$$

De exemplu,

$$(\Delta^2 a)_n = (\Delta a)_{n+1} - (\Delta a)_n = (a_{n+2} - a_{n+1}) - (a_{n+1} - a_n) = a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n.$$

Notăm cu $\Delta^k\underline{a}(t)$ funcţia generatoare a şirului $\Delta^k a$. Aplicând (3.1) iterativ deducem:

$$\Delta^k\underline{a}(t) = q\Delta^{k-1}\underline{a}(t) - \frac{1}{t}(\Delta^{k-1}a)_0 =$$

$$= q^2\Delta^{k-2}\underline{a}(t) - \frac{1}{t}\Big\{\, q(\Delta^{k-2}a)_0 + (\Delta^{k-1}a)_0 \,\Big\} =$$

$$\cdots = q^k\underline{a} + \frac{1}{t}\Big\{\, q^{k-1}a_0 + q^{k-2}(\Delta a)_0 + \cdots + (\Delta^{k-1}a)_0 \,\Big\}.$$

Are loc deci identitatea

$$\Delta^k \underline{a}(t) = q^k \underline{a}(t) - \frac{1}{t}\sum_{j=0}^{k-1} q^{k-1-j}(\Delta^j a)_0, \quad \text{unde} \quad q := \frac{1-t}{t}. \tag{3.2}$$

Propoziţia 3.1.

$$(\Delta^k a)_n = \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{n-j} a_{n+j}, \quad \forall\, n,k \geq 0. \tag{3.3}$$

Demonstraţie. Din identitatea (3.2) deducem

$$t^k \Delta^k \underline{a}(t) = \underbrace{(1-t)^k \underline{a}(t)}_{\mathbf{I}} - \underbrace{\sum_{j=0}^{k-1} (1-t)^{k-1-j} t^j (\Delta^j a)_0}_{\mathbf{II}}.$$

Termenul $(\Delta^k a)_n$ este coeficientul lui t^{k+n} în seria $t^k \Delta^k \underline{a}(t)$. Observând că **II** este un polinom de grad mai mic decât k, deducem că $(\Delta^k a)_n$ trebuie să fie egal cu coeficientul lui t^{k+n} în **I**. Folosind binomul lui *Newton*, deducem că acest coeficient este egal cu expresia din partea dreaptă a egalităţii (3.3). □

Definiţia 3.2. *Spunem că un şir $\{a_n\}_{n\geq 0}$ satisface o ecuaţie cu diferenţe omogene de ordin k dacă există nişte constante reale $c_0, c_1, \ldots, c_k$, $c_k \neq 0$, astfel încât*

$$c_k(\Delta^k a)_n + c_{k-1}(\Delta^{k-1} a)_n + \cdots + c_1(\Delta a)_n + c_0 a_n = 0, \quad \forall\, n \geq 0. \tag{3.4}$$

□

Dacă şirul $\{a_n\}_{n\geq 0}$, cu funcţia generatoare $\underline{a}(t)$, satisface ecuaţia (3.4), atunci rezultă, din (3.2), că seria $\underline{a}(t)$ satisface ecuaţia

$$0 = \sum_{\ell=0}^{k} c_\ell \Big(q^\ell \underline{a}(t) - \frac{1}{t}\sum_{j=0}^{\ell-1} q^{\ell-1-j}(\Delta^j a)_0 \Big), \quad \text{unde} \quad q = \frac{1-t}{t}.$$

Înmulţim ambele părţi ale egalităţii de mai sus cu t^k şi deducem

$$0 = \sum_{\ell=0}^{k} c_\ell \Big(t^{k-\ell}(1-t)^\ell \underline{a}(t) - t^{k-\ell}\sum_{j=0}^{\ell-1} t^j (1-t)^{\ell-1-j}(\Delta^j a)_0 \Big).$$

Prin urmare

$$\Big(\sum_{\ell=0}^{k} c_\ell t^{k-\ell}(1-t)^\ell \Big)\underline{a}(t) = \sum_{\ell=1}^{k} c_\ell t^{k-\ell} \sum_{j=0}^{\ell-1} t^j (1-t)^{\ell-1-j}(\Delta^j a)_0.$$

Să observăm că termenul din partea dreaptă a egalităţii de mai sus este un polinom $r(t)$ de grad mai mic decât k ai cărui coeficienţi sunt complet şi unic determinaţi de „derivatele iniţiale“

$$a_0, (\Delta a)_0, \ldots, (\Delta^{k-1} a)_0.$$

Ajungem la următoarea concluzie.

Corolarul 3.3. *Dacă şirul* $\{a_n\}_{n\geq 0}$ *satisface ecuaţia cu diferenţe* (3.4), *atunci funcţia lui generatoare* $\underline{a}(t)$ *este o funcţie raţională de forma*

$$\underline{a}(t) = \frac{r(t)}{c_k(1-t)^k + c_{k-1}t(1-t)^{k-1} + \cdots + c_0 t^k},$$

unde gradul numărătorului $r(t)$ *este mai mic decât gradul numitorului.* □

Exerciţiul 3.4. (a) Arătaţi că pentru orice polinom de grad k

$$u(t) = u_k t^k + u_{k-1}t^{k-1} + \cdots u_0, \quad u_k \neq 0,$$

există constantele $c_0, \ldots, c_k$, unic determinate de egalitatea

$$u_k t^k + u_{k-1}t^{k-1} + \cdots u_0 = c_k(1-t)^k + c_{k-1}t(1-t)^{k-1} + \cdots + c_0 t^k.$$

(b) Arătaţi că un şir de numere reale $\{a_n\}$ satisface o relaţie de recurenţă de forma

$$u_k a_{n+k} + u_{k-1}a_{n+k-1} + \cdots + u_0 a_n = 0, \quad \forall\, n \geq 0, \tag{3.5}$$

dacă şi numai dacă satisface o ecuaţie cu diferenţe de forma (3.4). Deduceţi că un şir $\{a_n\}$ satisface o relaţie de recurenţă de forma (3.5) dacă şi numai dacă funcţia lui generatoare are forma

$$\underline{a}(t) = \frac{r(t)}{u_k t^k + u_{k-1}t^{k-1} + \cdots u_0},$$

unde gradul lui r este mai mic decât k. □

Exerciţiul 3.5. Arătaţi că următoarele afirmaţii sunt echivalente.

(a) Şirul $\{a_n\}$ satisface ecuaţia cu diferenţe

$$(\Delta^{k+1}a)_n = 0, \quad \forall\, n \geq 0.$$

(b) Există constantele $c_0, c_1, \ldots, c_k$, astfel încât

$$a_n = \sum_{j=0}^{k} c_j \binom{n}{j} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} c_{n-k}, \text{ pentru orice } \ n \geq 0.$$

(c) Există constantele $d_0, d_1 \ldots, d_k$, astfel încât

$$a_n = \sum_{j=0}^{k} d_j n^j, \quad \forall\, n \geq 0.$$ □

Exerciţiul 3.6. Să considerăm şirul $\{a_n\}_{n\geq 0}$ care satisface relaţia de recurenţă

$$a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n\,, \quad \forall\, n \geq 0.$$

Arătaţi că el satisface ecuaţia cu diferenţe

$$(\Delta^2 a)_n - 3(\Delta a)_n + 2a_n = 0, \quad \forall\, n \geq 0.$$ □

Exerciţiul 3.7. Pentru orice întregi $0 < k \leq n$, notăm cu $f_{n,k}$ numărul de submulţimi de cardinal k ale mulţimii $\{1, \ldots, n\}$, cu proprietatea că nu conţin nici o pereche de numere consecutive. Arătaţi că

$$f_{n,k} = \binom{n-k+1}{k}$$

şi că

$$\sum_{k=0}^{n} f_{n,k} = F_{n+2},$$

unde $\{F_n\}$ este şirul lui *Fibonacci.* □

4. Formula de inversiune a lui Lagrange

Pentru a formula rezultatul principal al acestei secţiuni trebuie să facem câteva observaţii preliminare.

Definim o *serie Laurent formală* ca fiind o expresie de forma

$$a_k t^{-k} + a_{-k+1} t^{-k+1} + a_{-1} t^{-1} + a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots .$$

O serie *Laurent* formală este cu alte cuvinte suma dintre o serie formală de puteri şi un polinom în t^{-1}. Notăm cu $\mathbb{R}[[t, t^{-1}]$ mulţimea seriilor *Laurent* formale.

Să observăm că putem aduna şi înmulţi două serii formale ca şi cum ar fi polinoame, iar mulţimea $\mathbb{R}[[t, t^{-1}]$ devine inel comutativ cu unitatea când este înzestrată cu operaţiile de adunare şi înmulţire.

Operatorul de derivare formală D se extinde în mod evident şi la seriile *Laurent.* Propoziţia 1.11 se extinde şi la cazul seriilor *Laurent.* În particular, D satisface regula lui *Leibniz* şi pentru produsul a două serii *Laurent.*

Dacă $\underline{a}(t)$ este o serie *Laurent* formală, iar k este un întreg, vom nota cu $[t^k]\underline{a}$ coeficientul lui t^k în dezvoltarea lui $\underline{a}$. Coeficientul lui t^{-1} în $\underline{a}(t)$ se numeşte *reziduul* seriei *Laurent* $\underline{a}$ şi îl vom nota cu $\operatorname{Res}\underline{a}$.

Propoziţia 4.1. *Dacă* $\underline{a}(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots \in \mathbb{R}[[t]]$ *este o serie formală de puteri, atunci*

$$a_n = [t^n]\underline{a}(t) = \frac{1}{n!}[t^0](D^n \underline{a}), \quad \forall\, n \geq 0.$$ □

Definiţia 4.2. *Spunem că o serie Laurent* $\underline{u}$ *este* $O(k)$, *unde* k *este un întreg, şi scriem* $\underline{u} = O(k)$, *dacă ea are forma*

$$\underline{u}(t) = t^k \underline{a}(t), \;\; \underline{a}(t) \in \mathbb{R}[[t]].$$ □

Cu alte cuvinte,

$$\underline{u}(t) = O(k) \quad \text{dacă şi numai dacă} \quad \underline{u}(t) = u_k t^k + u_{k+1} t^{k+1} + \cdots .$$

De exemplu, faptul că o serie *Laurent* $\underline{a}$ este o serie formală de puteri, adică nu apar puteri negative ale lui t, se poate scrie $\underline{a} = O(0)$.

Putem reformula principiul separării formale, folosind notaţia O, astfel:

Teorema 4.3. **[Principiul separării formale în notaţia O].** *Fie* $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}[[t]]$. *Atunci*

$$\underline{u} = \underline{v} \quad \textit{dacă şi numai dacă } \underline{u}(t) - \underline{v}(t) = O(k), \quad \forall\, k \geq 0. \qquad \square$$

Să observăm că dacă

$$\underline{v}(t) = v_1 t + v_2 t^2 + \cdots = O(1),$$

iar $\underline{u}(t) = u_0 + u_1 t + u_2 t^2 + \cdots = O(0)$ este o serie formală oarecare, atunci putem defini *compunerea* lor astfel:

$$\underline{u} \circ \underline{v}(t) := u_0 + u_1(v_1 t + v_2 t^2 + \cdots) + u_2(v_1 t + v_2 t^2 + \cdots)^2 + \cdots =$$

$$= u_0 + (u_1 v_1)t + (u_1 v_2 + u_1 v_1^2 + u_2 v_1^2)t^2 + \cdots .$$

Coeficientul lui t^k în $\underline{u} \circ \underline{v}$ este descris de un *polinom* universal în variabilele $u_1, \ldots, u_k$, $v_1, \ldots, v_k$.

Teorema 4.4. **[Derivarea compunerii].** *Fie* $\underline{u} \in \mathbb{R}[[t]]$ *şi* $\underline{v} \in \mathbb{R}[[t]]$, *astfel încât* $\underline{v} = O(1)$. *Atunci*

$$D(\underline{u} \circ \underline{v}) = \big((D\underline{u}) \circ \underline{v} \big) \cdot (D\underline{v}). \tag{4.1}$$

$\square$

Exerciţiul 4.5. Să presupunem că $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}[[t]]$, iar $\underline{v} = O(1)$.

(a) Arătaţi că, pentru orice întreg pozitiv k, are loc egalitatea

$$J_k(\underline{u} \circ v) - (J_k u) \circ v = O(k+1), \tag{4.2}$$

unde reamintim că J_k este notaţia pentru k-jet.

(b) Demonstraţi egalitatea (4.1), folosind (4.2) şi principiul separării formale.

$\square$

Exemplul 4.6. **[Puterile întregi ale unei serii Laurent].** Să presunem că $\underline{v}(t) = O(1)$. Atunci, pentru orice întreg $k > 0$, putem defini seria $(1 + \underline{v})^{[-k]}$ ca fiind compunerea

$$(1 + v)^{[-k]} := \underline{u} \circ \underline{v}(t), \text{ unde } \underline{u}(t) = (1+t)^{-k} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \binom{n+k-1}{k-1} t^n.$$

Lăsăm cititorului să verifice, folosind principiul separării formale, că, pentru orice întreg pozitiv k, are loc egalitatea

$$(1 + \underline{v})^{[-k]} \cdot (1 + \underline{v})^k = 1,$$

adică faptul că seria $(1+\underline{v})^{[-k]}$ este inversa seriei $(1+\underline{v})^k$ în inelul $\mathbb{R}[[t]]$. Din această cauză vom scrie $(1 + \underline{v})^{-k}$ în loc de $(1 + \underline{v})^{[-k]}$.

Mai general, dacă $c \neq 0$, putem defini

$$(c + \underline{v})^{[-k]} := c^{-k}(1 + c^{-1}\underline{v})^{[-k]}.$$

În particular, deducem că dacă $\underline{u} = u_0 + u_1 t + u_2 t^2 + \cdots \in \mathbb{R}[[t]]$ este o serie formală astfel încât $J_0 \underline{u} = u_0 \neq 0$, atunci putem defini $\underline{u}(t)^n$ ca o serie formală, pentru *orice întreg* n. În plus, au loc egalităţile

$$\underline{u}^n \cdot \underline{u}^{-n} = 1, ; \forall \ n \in \mathbb{Z}.$$

Dacă mai sus alegem $n > 0$, şi apoi derivăm, folosind regula lui *Leibniz*, deducem

$$(D\underline{u}^n)\underline{u}^{-n} + \underline{u}^n(D\underline{u}^{-n}) = 0,$$

de unde

$$\underline{u}^n(D\underline{u}^{-n}) = -n\underline{u}^{n-1}(D\underline{u})\underline{u}^{-n} = -n\underline{u}^{-1}(D\underline{u}).$$

Înmulţind ambele părţi ale ultimei egalităţi cu $\underline{u}^{-n}$, obţinem

$$D\underline{u}^{-n} = -n\underline{u}^{-n-1}(D\underline{u}).$$

Am demonstrat astfel următorul fapt:

$$D\underline{u}^m = m\underline{u}^{m-1}(D\underline{u}), \tag{4.3}$$

pentru orice $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, unde $\underline{u} \in \mathbb{R}[[t]]$, astfel încât $J_0 \underline{u} \neq 0$.

Să observăm că dacă $\underline{u}(t)$ este o serie *Laurent* formală, atunci o putem descrie ca un produs

$$\underline{u}(t) = t^k(q_0 + q_1 t + \cdots),$$

unde k este un întreg, iar $q_0 \neq 0$. Dacă n este un întreg, putem defini $\underline{u}^n$ prin egalitatea

$$\underline{u}^n := t^{nk}(q_0 + q_1 t + \cdots)^n.$$

Egalitatea (4.3) se extinde şi la acestă situaţie mai generală. □

Definiţia 4.7. *O serie*

$$\underline{u} = u_1 t + u_2 t^2 + \cdots = O(1)$$

se numeşte inversabilă funcţional (sau, pe scurt, f-inversabilă), dacă există o serie

$$\underline{v} = v_1 t + v_2 t^2 + \cdots = O(1),$$

astfel încât

$$\underline{u} \circ \underline{v}(t) = \underline{v} \circ \underline{u}(t) = t.$$

Vom folosi notaţia

$$\underline{v}(t) = \underline{u}^{\langle -1 \rangle}(t),$$

şi vom spune că $\underline{v}(t)$ este inversa funcţională a seriei $\underline{u}(t)$. □

Exerciţiul 4.8. [**Teorema funcţiilor implicite formale**]. Arătaţi că o serie $\underline{u}(t) = O(1)$ este f-inversabilă dacă şi numai dacă $[t]\underline{u} \neq 0$, adică coeficientul lui t în $\underline{u}$ nu este zero. În acest caz $\underline{u}$ admite o *unică* inversă funcţională. □

Remarca 4.9. Să presupunem că $\underline{u}(t)$ este o serie formală care admite o inversă funcţională $\underline{v}$. Atunci seria $\underline{u}$ este convergentă dacă şi numai dacă seria

$\underline{v}$ este convergentă. Acest fapt este cunoscut în analiză sub numele de teorema *funcţiilor real analitice implicite.* $\square$

Dorim să rezolvăm următoarea problemă:

Dacă $\underline{u}(t) = u_1 t + u_2 t^2 + \cdots$ *este o serie* f*-inversabilă (adică* $u_1 \neq 0$*), să se descrie coeficienţii seriei inverse în funcţie de coeficienţii seriei* $\underline{u}(t)$.

Problema de mai sus se poate rezolva prin metoda coeficienţilor nedeterminaţi, dar calculul coeficienţilor inversei $\underline{u}^{\langle -1 \rangle}$ devine oribil de complicat. Formula de inversiune a lui *Lagrange* descrie în esenţă un algoritm de calcul al coeficienţilor seriei inverse care de multe ori produce rezultate interesante. În demonstraţia acestui algoritm vom avea nevoie de următorul fapt elementar, dar fundamental.

Lema 4.10. [**Teorema formală a reziduurilor**]. (a) *Dacă* $\underline{a}(t)$ *este o serie Laurent, atunci reziduul derivatei* $D\underline{a}$ *este zero, adică*

$$\mathrm{Res} D\underline{a} = 0. \qquad \square$$

(b) *Dacă seria* $\underline{u} \in \mathbb{R}[[t]]$ *este* f*-inversabilă, atunci are loc egalitatea*

$$\mathrm{Res} \underline{u}^{-1} D\underline{u} = 1.$$

Demonstraţie. Partea (a) rezultă din observaţia că monomul t^{-1} nu este derivata nici unei serii *Laurent*. Pentru a demonstra partea (b), scriem $\underline{u}$ sub forma

$$\underline{u} = u_1 t + u_2 t^2 + \cdots = t \underbrace{(u_1 + u_2 t + \cdots)}_{r},$$

unde $u_1 \neq 0$, deoarece $\underline{u}$ este f-inversabilă. Atunci

$$\underline{u}^{-1} = t^{-1} r^{-1} \ \text{ şi } D\underline{u} = r + tDr, \ \text{ de unde } \ \underline{u}^{-1} D\underline{u} = t^{-1} + r^{-1} Dr.$$

Să observăm că $r^{-1} Dr \in \mathbb{R}[[t]]$ şi deci $\mathrm{Res} r^{-1} Dr = 0$, de unde

$$\mathrm{Res} \underline{u}^{-1} D\underline{u} = \mathrm{Res}(t^{-1} + r^{-1} Dr) = \mathrm{Res} t^{-1} = 1. \qquad \square$$

Teorema 4.11. [**Formula de inversiune a lui Lagrange**]. *Fie*

$$u(t) = u_1 t + u_2 t^2 + \cdots \in \mathbb{R}[[t]]$$

o serie f*-inversabilă, adică* $u_1 \neq 0$*. Notăm cu* $s(t) = s_1 t + s_2 t^2 + \cdots$ *inversa ei funcţională. Dacă scriem* $u(t)$ *sub forma*

$$u(t) = t\, r(t), \quad r(t) = u_1 + u_2 t + u_3 t^2 + \cdots,$$

atunci

$$n s_n = n[t^n] s(t) = \mathrm{Res} u^{-n} = [t^{n-1}] r(t)^{-n}.$$

Demonstraţie. Să scriem

$$s(t) = \sum_{m \geq 1} s_m t^m.$$

Atunci are loc egalitatea

$$t = s(u(t)) = \sum_{m \geq 1} s_m u^m.$$

Derivând, obţinem

$$1 = \sum_{m \geq 1} m s_m u^{m-1} Du.$$

Înmulţind cu u^{-n}, deducem

$$u^{-n} = \sum_{m \geq 1} m s_m u^{m-1-n} Du.$$

Să observăm că dacă $m \neq n$, atunci

$$u^{m-1-n} Du = \frac{1}{m-n} Du^{m-n},$$

şi, din teorema formală a reziduurilor, obţinem

$$\mathrm{Res} u^{m-1-n} Du = 0, \quad \forall\, m \neq n.$$

Deducem că

$$\mathrm{Res} u^{-n} = n s_n \mathrm{Res} u^{-1} Du.$$

Folosind partea (b) a teoremei formale a reziduurilor, găsim că

$$n s_n = \mathrm{Res} u^{-n} = \mathrm{Res}(t^{-n} r^{-n}) = [t^{-1}]\big(\, t^{-n} r(t)^{-n} \,\big) = [t^{n-1}] r(t)^{-n}. \qquad \Box$$

Exerciţiul 4.12. Să presupunem că seria $u(t) \in \mathbb{R}[[t]]$ este f-inversabilă şi să notăm

$$v := u^{\langle -1 \rangle}.$$

Folosind tehnica de demonstraţie a Teoremei 4.11, arătaţi că

$$[t^n] v^k = \frac{k}{n} [t^{n-k}] \Big(\frac{t}{u} \Big)^n = \frac{k}{n} [t^{-k}] u^{-n}. \tag{4.4}$$

În particular, dacă $u(t)$ are forma

$$u(t) = \frac{t}{f(t)}, \text{ unde } \; f(t) = f_0 + f_1 t + \cdots \in \mathbb{R}[[t]], \;\; \text{astfel încât} \;\; f_0 \neq 0,$$

atunci

$$[t^n] v^k = \frac{k}{n} [t^{n-k}] f(t)^n. \tag{4.5}$$

$\Box$

Exemplul 4.13. Formula de inversiune se poate înţelege cel mai bine dacă o ilustrăm pe un exemplu. Să presupunem că o serie formală de puteri $s(t)$ satisface o ecuaţie de forma

$$s = t(1 + as)^{\ell},$$

unde ℓ este un întreg, iar $a \neq 0$ un număr real. Dacă definim

$$u(t) := t(1+at)^{-\ell},$$

deducem că

$$u(s(t)) = t,$$

adică s este inversa funcţională a seriei u. Putem scrie

$$s = s_1 t + s_2 t^2 + \cdots ,$$

iar formula de inversiune a lui *Lagrange* ne spune că

$$s_n = \frac{1}{n}[t^{n-1}](1+at)^{n\ell}.$$

Dacă $\ell > 0$, atunci deducem, din formula binomului lui *Newton*, că

$$s_n = \frac{1}{n}\binom{n\ell}{n-1}a^{n-1} = \frac{1}{n\ell+1}\binom{n\ell+1}{n}a^{n-1}. \tag{4.6}$$

Dacă $\ell < 0$, atunci, din egalitatea (1.3), deducem

$$(1+at)^{-n|\ell|} = \sum_{m\geq 0}(-1)^m\binom{m+n|\ell|-1}{m}a^m t^m,$$

şi, prin urmare,

$$s_n = \frac{1}{n}\binom{n+n|\ell|-2}{n-1}(-a)^{n-1} = \frac{1}{n(|\ell|+1)-1}\binom{n(|\ell|+1)-1}{n}(-a)^{n-1}. \tag{4.7}$$

□

Exemplul 4.14. Seria de puteri

$$u(t) = t - \frac{1}{1!}t^2 + \frac{1}{2!}t^3 - \frac{1}{3!}t^4 + \cdots = te^{-t}$$

este inversabilă. Inversa ei este seria formală

$$r(t) = r_1 t + r_2 t^2 + \cdots ,$$

unde

$$r_n = \frac{1}{n}[t^{n-1}]e^{nt} = \frac{n^{n-1}}{n!}.$$

Exemplul acesta este foarte interesant, deoarece seria $u(t)$ apare în combinatorică în problema numărării arborilor, adică a grafurilor conexe care nu au cicluri. □

Exemplul 4.15. [Numerele lui Catalan]. Pentru orice întreg $n \geq 1$, vom nota cu C_n numărul posibilităţilor de descompunere a unui poligon convex cu $n+2$ vârfuri *etichetate*, în n triunghiuri, cu ajutorul a $(n-1)$ diagonale care nu se intersectează. Astfel de triangulări se vor numi *triangulări simple*. Numerele C_n se numesc numerele lui *Catalan*. Figura 2 arată că $C_1 = 1$ şi $C_2 = 2$.

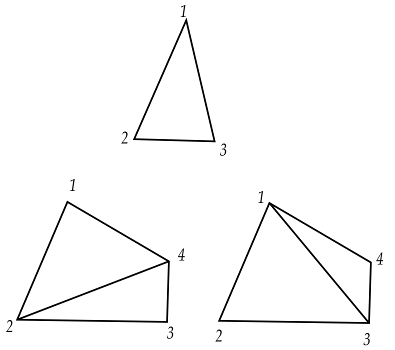


Figura 2. *Triangulări ale unui poligon convex cu ajutorul diagonalelor*

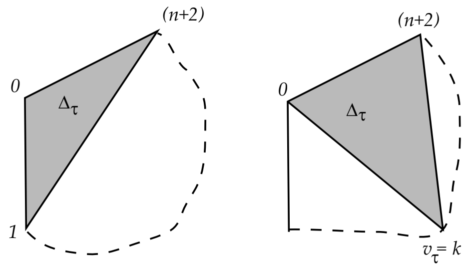


Figura 3. *Triunghiul* $\Delta_{\boldsymbol{\tau}}$

Să construim funcţia generatoare

$$C(t) = C_1 t + C_2 t^2 + \cdots .$$

Dorim să găsim o relaţie de recurenţă pentru numerele lui *Catalan* pe care să o putem exprima în termeni de funcţii generatoare. Vom nota cardinalul unei mulţimi A cu $|A|$.

Fixăm $n \geq 2$. Numărul C_{n+1} este numărul de triangulări simple ale unui poligon convex $\mathcal{P}$ cu $(n+3)$ vârfuri $0, 1, \ldots, (n+2)$. Notăm cu $\mathcal{T}$ mulţimea acestor triangulări. Pentru orice triangulare $\boldsymbol{\tau} \in \mathcal{T}$, latura $[0, (n+2)]$ a poligonului $\mathcal{P}$ aparţine exact unui singur triunghi al triangularii $\boldsymbol{\tau}$. Notăm acest triunghi cu $\Delta_{\boldsymbol{\tau}}$, iar cu $v_{\boldsymbol{\tau}}$ vârful lui $\Delta_{\boldsymbol{\tau}}$ diferit de 0 şi $(n+2)$ (vezi figura 3). Este evident că

$$v_{\boldsymbol{\tau}} \in \{1, 2, \ldots, n+1\}.$$

Pentru orice $k \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$, notăm

$$\mathcal{T}_k := \{\boldsymbol{\tau} \in \mathcal{T};\ \ v_{\boldsymbol{\tau}} = k\}.$$

Are loc egalitatea

$$|\mathcal{T}| = \sum_{k=2}^{n+1} |\mathcal{T}_k|.$$

Distingem două cazuri.

Cazul 1. $k = 1$ sau $k = n+1$. Fie $\boldsymbol{\tau} \in \mathcal{T}_k$. În acest caz triunghiul $\Delta_{\boldsymbol{\tau}}$ are o singură latură, care este diagonală a lui $\mathcal{P}$. Această diagonală împarte $\mathcal{P}$ în două părţi: triunghiul $\Delta_{\boldsymbol{\tau}}$ şi un poligon cu $(n+2)$ vârfuri. Deducem că, în acest caz,

$$|\mathcal{T}_k| = C_n.$$

Cazul 2. $2 \leq k \leq n$. În acest caz, diagonalele $[0, k]$ şi $[k, (n+2)]$ împart $\mathcal{P}$ în două poligoane convexe: un poligon $\mathcal{P}'$ cu $(k+1)$ vârfuri, anume $0, \ldots, k$, şi un poligon $\mathcal{P}''$ cu $(n+3-k)$ vârfuri, anume $k, \ldots, (n+2)$. Rezultă că

$$|\mathcal{T}_k| = C_{k-1} C_{n+1-k}.$$

Deducem, din discuţia de mai sus, că

$$C_{n+1} = 2C_n + \sum_{k=2}^{n} C_{k-1}C_{n+1-k} = 2C_n + \sum_{j=1}^{n-1} C_j C_{n-j}, \quad \forall\, n \geq 2.$$

Înmulţind egalitatea de mai sus cu t^{n+1} şi apoi sumând după $n \geq 2$, deducem identitatea

$$\sum_{n\geq 2} C_{n+1}t^{n+1} = 2t\sum_{n\geq 2} C_n t^n + t\sum_{n\geq 2}\Big(\sum_{j=1}^{n-1} C_j C_{n-j}\Big)t^n,$$

pe care o putem rescrie sub forma

$$C(t) - t - 2t^2 = C(t) - C_1 t - C_2 t^2 = 2t\big(\,C(t) - C_1 t\,\big) + tC(t)^2,$$

de unde

$$C(t) - t = 2tC(t) + tC(t)^2,$$

deci

$$C(t) = t\big(\,1 + C(t)\,\big)^2.$$

Suntem exact în situaţia descrisă în Exemplul 4.13, cazul $\ell = 2$, $a = 1$. Deducem, din (4.6),

$$C_n = \frac{1}{2n+1}\binom{2n+1}{n} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}. \qquad \square$$

Exerciţiul 4.16. Fie P şi Q două puncte laticiale în plan, adică $P, Q \in \mathbb{Z}^2$. Un *drum laticial* de lungime n de la P la Q este un şir de puncte

$$P_0, P_1, \ldots, P_n \in \mathbb{Z}^2,$$

cu următoarele proprietăţi:

- $P_0 = P$, $P_n = Q$.
- Pentru orice $k \in \{1, \ldots, n\}$, avem fie $P_k = P_{k-1} + (1, 0)$, fie $P_k = P_{k-1} + (0, 1)$.

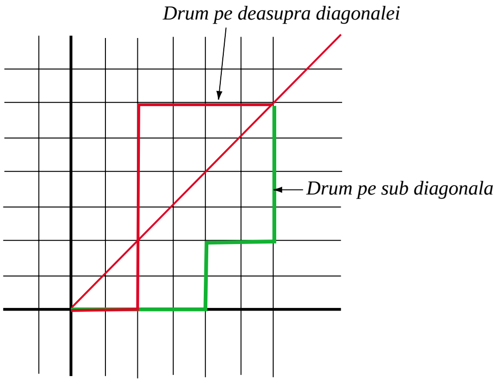


Figura 4. *Drumuri laticiale*

Cu alte cuvinte, de-a lungul unui drum, paşii au lungime 1 şi sunt îndreptaţi fie către est, fie către nord. Să notăm cu $T(Q, P)$ numărul de drumuri laticiale de la P la Q care nu trec deasupra diagonalei $y = x$ (vezi figura 4). Arătaţi că dacă

$$P = (0, 0), \quad Q = (n, n),$$

atunci

$$T(Q, P) = C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}. \qquad \square$$

(*va urma*)

Bibliografie

[1] * * * *Enciclopedia electronică a şirurilor de numere întregi*, se poate consulta pe Internet la adresa
http://www.research.att.com/ njas/sequences/index.html?language=romanian)

[2] M. Aigner, *Combinatorial Analysis*, Springer-Verlag, 1979.

[3] G.M. Fihtenholţ, *Curs de Calcul Diferenţial şi Integral*, vol.II, Editura Tehnică, Bucureşti, 1964.

[4] R. Stanley, *Enumerative Combinatorics. vol.I*, Cambridge University Press, 1986

[5] H. S. Wilf, *Generating functionology* (se poate consulta pe Internet la adresa
http://www.math.upenn.edu/ wilf/DownldGF.html)

Department of Mathematics,
University of Notre Dame,
Notre Dame, IN 46556-4618.
e-mail: nicolaescu.1@nd.edu
http://www.nd.edu/ lnicolae/

Une nouvelle inégalité qui simplifie essentiellement la démonstration de la formule de Stirling[1)]

Andrei Vernescu

Abstract

In this note the author surveys some results about generalized *Euler*'s constants and makes some historical remarks concerning this topic.

Key words: *Euler*'s (generalized) constants, *Stieltjes* constants.
M.S.C.: 01-99, 40A25

1. Considérons la formule de Stirling sous sa forme la plus simple:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n \mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n}} = 1^{2)}. \tag{1}$$

Pour obtenir la démonstration de cette formule on parcourt d'habitude deux étapes:

(a) On établit que la suite de terme général

$$a_n = \frac{n!}{n^n \mathrm{e}^{-n}\sqrt{n}} = \frac{n!}{n^{n+1/2}\mathrm{e}^{-n}}{}^{3)} \tag{2}$$

[1)] Această lucrare a fost prezentată la Al Şaptelea Colocviu Franco-Român de Matematici Aplicate, Craiova, 2004, în cadrul Sesiunii speciale de inegalităţi şi aplicaţii (a se vedea G.M.-A nr. 4/2004, pp. 403-404). (N.R.)

[2)] Des formes plus raffinées de l'évaluation de $n!$, ramenant, toutes à (1), se trouvent dans Mitrinović [8]. Il existe, biensûr, aussi un développement asymptotique pour $n!$ (e.g. Knuth [5], [9]). (N.A.)

[3)] L'inclusion du facteur $\sqrt{2\pi}$ au dénominateur de a_n ne modifie pas la démonstration; seulement que la limite du point (b) sera 1 au lieu de $\sqrt{2\pi}$. Cette inclusion est anticipative, donc non naturelle. (N.A.)

est convergente, ayant une limite a, finie et differente de zéro.

(b) Tenent compte que, dans les conditions du point (a), on a l'identité $a = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n^2}{a_{2n}}$, on établit, à l'aide de la formule de Wallis:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \ldots \cdot 2n \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (2n-1) \cdot (2n+1)} = \frac{\pi}{2},$$

que $a = \sqrt{2\pi}$.

*

L'obtention du point (a) se fait, dans beaucoup de textes (par exemple [4] et [16]) tenant compte de l'inégalité:

$$\frac{2}{2n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{2n+1}{2n(n+1)}, \tag{3}$$

qui, itérée de n à $n+k$, donne:

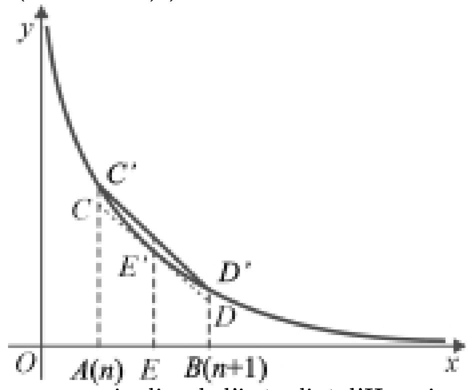
$$1 < \frac{a_n}{a_{n+k}} < \exp\left(\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+k}\right)\right),$$

ce qui, pour $k \to \infty$, conduit à $a > 1$ et prouve le point (a).

L'inégalité (3), qui améliore l'inégalité de Neper:

$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n},$$

s'obtient en [4] et [16] par quelques considérations géométriques liées à l'aire engendrée par la courbe d'équation $y = \dfrac{1}{x}$, $x \in [n, n+1]$ (voir la figure).



En réalité, cette inégalité représente un cas particulier de l'inégalité d'Hermite-Hadamard (nomée parfois aussi l'inégalité de Jensen-Hadamard) pour les fonctions continues et convexes $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$

$$\varphi\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \frac{1}{b-a} \int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x \le \frac{\varphi(a) + \varphi(b)}{2}.$$

(Dans notre cas on a: $a = n$, $b = n+1$, $\varphi(x) = \dfrac{1}{x}$) (voir [10], [11] , [16]).

Dans [17] j'ai établi une preuve élémentaire de (3), c'est à dire une preuve indépendente de l'utilisation des dérivées et des intégrales.

Le but du present travail est de donner une démonstration élémentaire pour le point (a), plus simple que celle de Dan Romik, de son travail [15], *„Stirling's Approximation for $n!$: the Ultimate Short Proof?"*, et aussi plus simple que celle de [1] et [7].

2. Passons à la démonstration. Soit:

$$\Omega_n = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n}. \tag{4}$$

On a l'inégalité élémentaire

$$\Omega_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}\,^{1)}. \tag{5}$$

Nous utiliserons la remarque suivante: Soit $(x_n)_n$ une suite strictement croissante à termes strictement positifs. Alors on a

$$x_n > \frac{x_n^2}{x_{2n}}. \tag{6}$$

Prenons maintement $x_n = \dfrac{\mathrm{e}^n n!}{n^n}$. Evidemment $x_n > 0$, pour tout $n = 1, 2, 3, \ldots$ et, de la relation

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\mathrm{e}}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n},$$

tenent compte que $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < \mathrm{e}$ (à cause du caractère strictement croissant de la suite $(e_n)_n$, $e_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$), on trouve $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} > 1$, donc $x_{n+1} > x_n$, c'est à dire que la suite $(x_n)_n$ est strictement croissante.

On peut donc lui appliquer l'inégalité (6) et on trouve après quelques calculs élémentaires qui ne contienent que des simplifications:

$$x_n > \frac{1}{\Omega_n}. \tag{7}$$

Tenent compte de (5), on trouve

$$x_n > \sqrt{2n+1}, \tag{8}$$

c'est à dire

$$\frac{\mathrm{e}^n n!}{n^n} > \sqrt{2n+1},$$

d'où

$$\frac{\mathrm{e}^n n!}{n^n \sqrt{n}} > \frac{\sqrt{2n+1}}{\sqrt{n}} = \sqrt{2+\frac{1}{n}},$$

---

1) D'une manière plus éxacte on a les inégalités de Wallis $\dfrac{1}{\sqrt{\pi(n+1/2)}} < \Omega_n < \dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}$, de Kazarinoff $\dfrac{1}{\sqrt{\pi(n+1/2)}} < \Omega_n < \dfrac{1}{\sqrt{\pi(n+1/4)}}$ (voir [8], [3]) et de M. le Professeur L. Panaitopol $\dfrac{1}{\sqrt{\pi(n+1/4+1/32n)}} < \Omega_n < \dfrac{1}{\sqrt{\pi(n+1/4)}}$ (voir [12], [20]). (N.A.)

donc, en définitif:

$$a_n > \sqrt{2} \tag{9}$$

(avec a_n de (2)).

La suite $(a_n)_n$ est strictement décroissante à cause de la relation

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\mathrm{e}}{\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1/2}} < 1, \tag{10}$$

qui provient du fait que la suite de terme général

$$\mathrm{e}_n(1/2) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1/2}$$

est décroissante[1)], donc le terme général est plus grand que la limite.

D'autre part, la suite $(a_n)_n$ est bornée inférieurement. Donc, d'une théorème célèbre, elle est convergente. Passent à la limite dans (9), on obtient:

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \geq \sqrt{2}. \tag{11}$$

Donc, on a obtenu le point (a) d'une manière plus simple que celle habituelle, exposée dans l'introduction. Le but de note travail est accompli.

3. La suite de la démonstration de la formule de Stirling découle en éfectuent les calculs du point (b).

Tenent compte du fait que la formule de Wallis possède aussi une démonstration élémentaire (voir Yaglom [21] ainsi que [17]), on peut conclure que la formule de Stirling possède aussi une démonstration tout à fait élémentaire.

Bibliographie

[1] C. R. Blyth, P. K. Pathak, *A Note on easy proof of Stirling's theorem*, AMM, **93**(1986), pp. 376-379.

[2] I. Gavrea, *Şirul* $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1/2}$ *este descrescător* (addenda dans [14]).

[3] D. K. Kazarinoff, *On Walli's formula*, Edinburgh Math. Notes **40**(1956), pp. 19-21.

[4] G. Klambauer, *Aspects of Calculus*, Springer Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo, 1986.

[5] D. E. Knuth, *The Art of Computer Programming*, volume I, Fundamental Algorithms, Third Edition, Addison Wesley Longman, U.S.A.

[6] A. Lupaş, *Asupra şirului* $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1/3}$, $n = 1, 2, \ldots$ (addenda dans [14]).

[7] G. Marsaglia, J. C. W. Marsaglia, *A New Derivation of Stirling's Approximation to* $n!$, A.M.M. **97**(1990), pp. 826-829.

[8] D. S. Mitrinović, P. M. Vasić, *Analytic Inequalities*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1970.

1) Pour la démonstration, voir [2], [6], [13], [14], [19]. (N.A.)

[9] V. Namias, *A simple Derivation of Stirling's Asymptotic Series*, AMM **93**(1986), pp. 25-29.

[10] C. P. Niculescu, *Fundamentele Analizei Matematice. Analiza pe dreapta reală*, Editura Academiei Române, 1996.

[11] C. P. Niculescu, *Analiza matematică pe dreapta reală. O abordare contemporană*, Editura Universitaria Craiova 2002.

[12] L. Panaitopol, *O rafinare a formulei lui Stirling*, G.M. **90** (1985), pp. 329-332.

[13] G. Pólya, G. Szegö, *Problems and Theorems in Analysis*, Springer Verlag, Berlin Heidelberg, New York, 1978.

[14] T. Popoviciu, *Despre alura unor şiruri care tind către numărul e*, Studii şi cercetări matematice, Tom **1** (1975), pp. 87-110.

[15] D. Romik, *Stirling's Approximation for n!: the Ultimate Short Proof?*, AMM **107** (2000), pp. 556-557.

[16] Gh. Sireţchi, *Calcul diferenţial şi integral*, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1985.

[17] A. Vernescu, *Deducerea elementară a formulei lui Stirling*, Gazeta Matematică – perfecţionare metodică şi metodologică în matematică şi informatică **3**(1982) nr. 3-4, pp. 152-156.

[18] A. Vernescu, *În jurul numărului „e"*, în Buletin matematic în sprijinul pregătirii concursurilor şcolare, vol. I, Târgovişte 1987, pp. 163-181.

[19] A. Vernescu, *Analiză matematică (Şiruri de numere reale, Limite de Funcţii, Funcţii continue)*, vol. I, ediţiile III-IV – Editura Pantheon, Bucureşti 2000, 2001.

[20] A. Vernescu, *The Natural Proof of the Inequalities of Wallis Type*, Libertas Mathematica, Tomus **24** (2004), pp. 183-190.

[21] A. M. Yaglom, I.M. Yaglom, *Problemes nonélémentairs résolus élémentairement* (en roumain), Editura Tehnică, Bucureşti, 1983.

Université Valahia,
118, Bd. Unirii, Târgovişte

Angle Bisectors in a Triangle: A problem Solving Approach

BY NATHANIEL HALL, BOGDAN SUCEAVĂ AND KIM UYEN TRUONG

Abstract

The present work includes a mini casebook on angle bisectors in triangles, comprising problems and solutions, some of them real gems. Their solutions display techniques involving the power of the point with respect to a circle, congruence of angles, and metric relations (such as the angle bisector theorem). The article is written mainly for students preparing for mathematical competitions as well as all readers interested in problem-solving techniques.

Key words: angle bisectors, metric relations, problem-solving techniques.
M.S.C.: 51M04, 97C30

Many interesting results in geometry involve angle bisectors, and proofs of these results use a variety of interesting techniques. This paper is a mini casebook on angle bisectors in triangles, comprising six problems and their solutions. These problems are gems, and their solutions display techniques involving the power of the point with respect to a circle, congruence of angles, and metric relations (such as the angle bisector theorem). We believe that this article will be of interest to students preparing for mathematical competitions as well as all readers interested in problem-solving techniques. One of the difficulties in approaching a plane geometry problem is to choose a method that uses on a precise and effective technique. What should we use and when? Does the geometric structure itself suggest a method?

Some of the notation we use is the following: The lines through points A and B will be denoted AB, the segment joining them $[AB]$, the distance between them $|AB|$, and the ray starting at A through M will be denoted $\overrightarrow{AM}$. Given a line l and a point P not on l, the foot of the perpendicular from P to l is also known as the *projection* of P onto l. The measure of $\sphericalangle A$ in degrees will be denoted by $\mathrm{m}(\sphericalangle A)$.

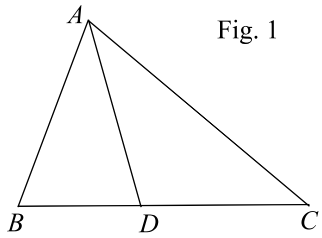


Fig. 1

A well-known fact about angle bisectors that we will assume is that the angle bisector is the set of points that are equidistant from the sides of the angle.

The angle bisector theorem states that if D is the point at which the bisector of $\sphericalangle BAC$ meets $[BC]$, then

$$\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{|AB|}{|AC|}.$$

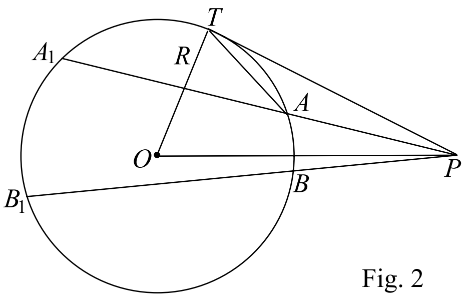


Fig. 2

Another concept that we will use is the power of the point with respect to a circle. Suppose that point P lies in the exterior of circle c of radius r and center O, and let AA_1 and BB_1 be two secants of c passing through P (see Fig. 2). Let PT be a tangent to c from P.

Then the power of the point P with respect to circle c is, by definition, $\rho_c(P) = |OP|^2 - r^2$. By the Pythagorean Theorem in ΔPOT, we have $|PO|^2 - r^2 = |PT|^2$. Since $\Delta PAT \sim \Delta PTA_1$, we have $\dfrac{|PA|}{|PT|} = \dfrac{|PT|}{|PA_1|}$, or $|PT|^2 = |PA| \cdot |PA_1|$. Since this is true for every secant of c passing through P, it follows that $\rho_c(P) = |PB| \cdot |PB_1| = |PA| \cdot |PA_1| = |PO|^2 - r^2 = |PT|^2$.

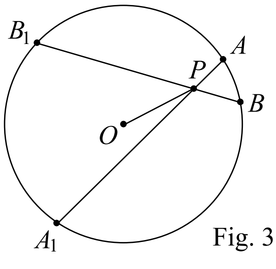


Fig. 3

If the point P is in the interior of c, the power of the point P with respect to c is defined to be $\rho_c(P) = r^2 - |PO|^2$. It is easy to show that $\rho_c(P) = r^2 - |PO|^2 = |PA| \cdot |PA_1| = |PB| \cdot |PB_1|$, for any secants AA_1 and BB_1 passing through P (see Fig. 3).

The problems. Each of our six problems is followed by a hint. However, we encourage readers to attempt to find a solution before reading the hint. (Relevant figures appear in the Solutions.) The first problem is a classic textbook problem (see, for example, *Ionescu-Ţiu* [8]).

Problem 1. *Prove that in any ΔABC, the midpoints of sides $[AB]$ and $[BC]$ and the foot of perpendicular from B on the angle bisector of $\sphericalangle A$ are collinear.*

Hint: Join the midpoint of side $[AB]$ to the point of intersection of the angle bisector AA' and the perpendicular from B to AA'. Try to prove that this segment passes through the midpoint of side $[BC]$.

Problem 2. ([12]) *Let P be a point in the interior of ΔABC. Let D, E, F be the feet of the perpendiculars from P to BC, CA, and AB, respectively. If each of the three quadrilaterals $AEPF$, $BFPD$, $CDPE$ has an inscribed circle tangent to all four sides, then P is the incenter of ΔABC.*

Hint: It is sufficient to show that P lies on one of the angle bisectors.

Our next problem, due to *Laurenţiu Panaitopol* [10], connects the angle bisector with a concept more common in algebra and analysis than in geometry, namely, one-to-one functions.

Problem 3. *Let ΔABC be such that $|AB| \neq |AC|$. Let M be a point on the segment $[BC]$ with ray $\overrightarrow{AM}$ intersecting the circumcircle of ΔABC a second time in M'. Prove the following:*

(i) *The function $f : [BC] \to \mathbb{R}$ defined by $f(M) = AM \cdot AM'$ is injective.*

(ii) *If $AM \cdot AM' = AB \cdot AC$, then $\overrightarrow{AM}$ is the bisector of $\sphericalangle A$.*

Hint: For (i), use directly the definition of an injective function and the power of a point with respect to a circle. You will also have to think about the sum of opposite angles in a cyclic quadrilateral. For part (ii), start by computing $AM \cdot AM'$ for the angle bisector $\overrightarrow{AM}$, then use the injectivity proven in (i).

We would like to explore in more detail the use of power of a point with respect to a circle. Our next example is from a 1930 book by *Aubert* and *Papelier*, ([4], p.39) where the problem is presented in a context that suggests an analytic solution.

Problem 4. *Let ΔABC be an acute triangle and let X be a point on the bisector of angle $\sphericalangle A$, in the interior of the triangle. The circle (AXB) intersects AC in D, and circle (AXC) intersects AB in E. Prove that $|BE| = |CD|$.*

Hint: The power of a point with respect to a circle is the tool that helps in the proof, since circles are involved. We may need to use also the angle bisector theorem.

Our next example is essential for our discussion, and we will give two proofs, the first using angle measures, the second the power of a point. These two concepts constitute the common ground of all of our examples. This problem was first posed by the second author (Problem 11006, *Amer. Math. Monthly*, vol.**110** (2003), p. 340).

Problem 5. *Consider the acute triangle ABC. Denote by T the intersection* *of the angle bisector of $\sphericalangle BAC$ with the circumcircle of ΔABC. The projections of A and T on BC are respectively G and K, the projections of B and C on AT are respectively H and L. Prove that:*

(i) *the points G, H, K, L lie on a circle,*

(ii) $KH \parallel AC, GL \parallel BT, GH \parallel TC$, *and* $LK \parallel AB$,

(iii) *If E is the midpoint of AB, then the center of the circle determined by G, H, K, L lies on the circumscribed circle to the triangle GEK.*

Hint: For the solution by using measures of the angles, try to understand all the angles in the picture and try to see why it is important that AT is bisector of $\sphericalangle BAC$. In a second approach think about writing powers of various points with respect to several circles that appear in the problem. In this figure there is not only the circumcircle of ΔABC, but there are several cyclic quadrilaterals there, each one with its own circle.

Our sixth problem has been posed by the second author (Problem 10983 from *Amer. Math. Monthly*, vol.**109** (2002), p. 922).

Problem 6 *Let T be the projection of the orthocenter H of an acute triangle ABC on the line bisecting the angle from A. Denote P the projection of T on BC, M the midpoint of BC and A' the intersection between BC and the line bisecting $\sphericalangle BAC$.*

(i) *Prove that TA' bisects $\sphericalangle MTP$;*

(ii) *Prove that $TM \parallel AO$, where O is the circumcenter of the triangle ABC.*

Hint: Think about an auxiliary construction: draw the exterior bisector of the angle A. Another way to solve the problem is to use metric relations: angle bisector theorem, law of sines and various trigonometric formulas for circumradius and distances between points of interest in a triangle. We will include in Appendix the reference for this solution. However, one can avoid tedious computations by considering a natural extension of the figure.

The solutions. In this section we present the solutions to the problems proposed above.

Solution to Problem 1: Connect the midpoint D of side $[AB]$ with the point F, which is the intersection of the angle bisector $\overrightarrow{AA'}$ with the perpendicular from B to AA'. We need to prove that DF passes through the midpoint E of the side BC. In the right triangle ΔAFB, $|DF|$ is the length of the median corresponding to hypothenuse $[AB]$, so it is half of $|AB|$.

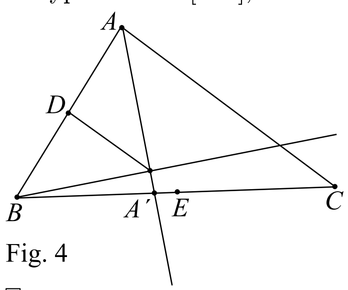


Fig. 4

Therefore ΔADF is isosceles and $\sphericalangle BAF \cong \sphericalangle AFD$. From hypothesis, $\sphericalangle BAF \cong \sphericalangle CAF$, so $\sphericalangle CAF \cong \sphericalangle AFD$, and hence $DF \| AC$. Since DF passes through the midpoint of $[AB]$, it must be the midline in ΔABC, therefore DF must pass through the midpoint of $[BC]$.

□

Solution to Problem 2: Denote by X the centre of the circle (q) inscribed in $BDPF$, and by T, U, V, S the projections of X on BC, PD, PF, and respectively AB. We will show that $|PF| = |PD| = |PE|$, and this is the central result needed to prove that P is the incenter of ΔABC.

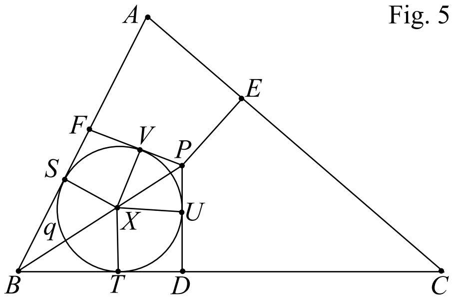


Fig. 5

Without loss of generality, it is sufficient to prove that $|PF| = |PD|$.

The quadrilaterals $FVXS$ and $UDTX$ are rectangles (each one of them has three right angles by construction). Furthermore, they are squares, since each has two pairs of adjacent congruent sides: $|FS| = |FV|$ (tangents from F to (q),) $|UD| \cong |DT|$ (tangents from D to (q),) and respectively $|SX| = |VX| = |UX| = |TX|$ are all radii of incircle (q). The two squares have sides of the same length (radius of (q)), thus

$$|FP| = |FV| + |VP| = |UD| + |PU| = |PD|.$$

As a consequence, $\Delta FBP \cong \Delta BDP$ (since the hypothenuse $[BP]$ is common, $\mathrm{m}(\sphericalangle BFP) = \mathrm{m}(\sphericalangle PDB) = \dfrac{\pi}{2}$ and $|FP| = |PD|$). Therefore, P lies on the bisector $\overrightarrow{BP}$ of $\sphericalangle B$.

Similarly, AP and CP are bisectors of $\sphericalangle BAC$ and $\sphericalangle BCA$ respectively. In conclusion, P is the incenter of ΔABC. $\square$

Solution to Problem 3: (i) Suppose for proof by contradiction that there exists M_1 and M_2 on $[BC]$ such that $M_1 \neq M_2$ and $f(M_1) = f(M_2)$.

This means $|AM_1| \cdot |AM_1'| = AM_2 \cdot AM_2'$. Regarding this relation as a power of a point with respect to a circle, it results that $M_1M_1'M_2M_2'$ is a cyclic quadrilateral. We use this fact to write the following relations

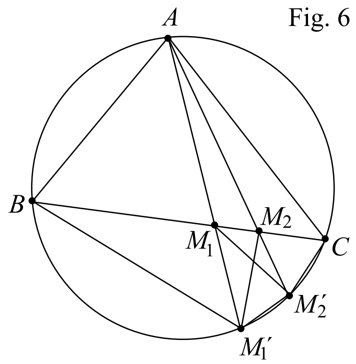


Fig. 6

$$\mathrm{m}(\sphericalangle M_1'M_1M_2) = 180^o - \mathrm{m}(\sphericalangle B) - \mathrm{m}(\sphericalangle BAM_1'),$$

and

$$\mathrm{m}(\sphericalangle M_1'M_2'M_2) = \mathrm{m}(\sphericalangle C) + \mathrm{m}(\sphericalangle BM_2'M_1') = \mathrm{m}(\sphericalangle C) + \mathrm{m}(\sphericalangle BAM_1').$$

Therefore, the measures of the angles $\sphericalangle B$ and $\sphericalangle C$ are equal, which contradicts the hypothesis $|AB| \neq |AC|$. Thus f is one-to-one.

(ii) Let AM be the bisector of $\sphericalangle BAC$. Therefore ΔABM_1 and $\Delta AM_1'C$ are similar, thus

$$\frac{|AM_1|}{|AC|} = \frac{|AB|}{|AM_1'|},$$

or $|AM_1| \cdot |AM_1'| = |AB| \cdot |AC|$. Since f is injective, this property characterizes the unique point on the segment $[BC]$ that satisfies this metric relation. Therefore, if the point Q on $[BC]$ satisfies $f(Q) = |AB| \cdot |AC|$, then $\overrightarrow{AQ}$ must be the angle bisector of $\sphericalangle A$. □

Solution to Problem 4: Denote by N the intersection of the circle (ABX) with the line BC and by M the intersection of circle (ACX) with BC. Suppose, for example, that N and M are in the exterior of segment $[BC]$. If either M or N is in the interior of $[BC]$, the problem is solved similarly.

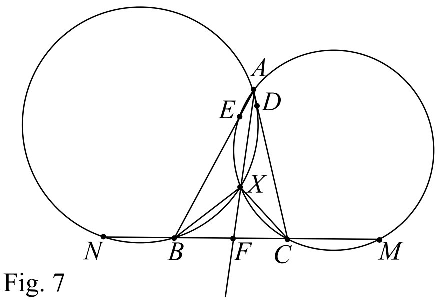


Fig. 7

We denote the length of the sides of ΔABC by $|AB| = c$, $|AC| = b$ and $|BC| = a$.

The power of the point B with respect to circle (AXC) is $\rho(B) = |BE| \cdot |AB| = |BC| \cdot |BM|$. Writing the known quantities in terms of lengths of sides: $|BE| \cdot c = a(a + |CM|)$, and, if we solve for $|BE|$, we get

$$|BE| = \frac{a}{c}(a + |CM|).$$

Writing the power of the point C with respect to the circle (ABX), we obtain, similarly, as above

$$|CD| = \frac{a}{b}(a + |BN|).$$

We need to prove that $|BE| = |CD|$, or

$$\frac{a}{c}(a + |CM|) = \frac{a}{b}(a + |BN|), \tag{1}$$

which is equivalent to

$$ba + b \cdot |CM| = ca + c \cdot |BN|. \tag{2}$$

Our problem is reduced to prove the relation [2]. We can use the power of the point F with respect to both circles, keeping in mind that F lies on their radical axis (see [6], pp. 31-34). Actually, the power of F with respect to the circle (AXC) must be equal to the power of F with respect to the circle (ABX), or $\rho(F) = |FN| \cdot |FB| = |FC| \cdot |FM|$. From a consequence of the angle bisector theorem, we know that

$$|FC| = \frac{ab}{b+c} \quad |FB| = \frac{ac}{b+c}.$$

Therefore, by the angle bisector theorem

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|FB|}{|FC|} = \frac{|FM|}{|FN|},$$

and from the first and last ratio we have $c \cdot |FN| = b \cdot |FM|$. Thus

$$b\left(\frac{ab}{b+c} + |CM|\right) = c\left(\frac{ac}{b+c} + |BN|\right).$$

This is equivalent to

$$ab^2 + b(b+c) \cdot |CM| = ac^2 + c(b+c) \cdot |BN|,$$

and factoring out

$$a(b-c)(b+c) = (c \cdot |BN| - b \cdot |CM|)(b+c).$$

Simplifying by $b+c$ (this quantity cannot be zero) we get:

$$ab - ac = c \cdot |BN| - b \cdot |CM|,$$

which is exactly the relation [2] that we needed to prove. $\square$

For Problem 5 we present two solutions. The method of the second solution is different than the proof published in *Amer. Math. Monthly*, January 2005, pp. 90-91.

First solution to Problem 5: (i) Let P be the intersection of AT with BC. The quadrilateral $ABGH$ is cyclic (since $m(\sphericalangle BHA) = \mathrm{m}(\sphericalangle AGB) = \frac{\pi}{2}$).

Therefore $\mathrm{m}(\sphericalangle HGP) = \mathrm{m}(\sphericalangle BAH)$. Similarly, from the cyclic quadrilateral $CKLT$ one gets $m(\sphericalangle KCT) = \mathrm{m}(\sphericalangle PLK)$ and since $\mathrm{m}(\sphericalangle KCT) = \mathrm{m}(\sphericalangle BAT)$ the conclusion is $m(\sphericalangle HGK) = \mathrm{m}(\sphericalangle HLK)$, therefore $GLKH$ is cyclic.

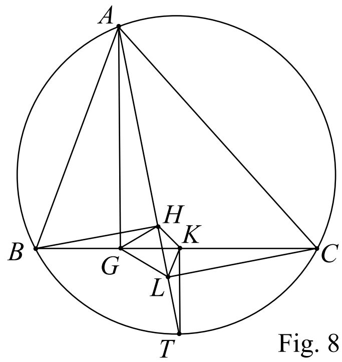


Fig. 8

(ii) The quadrilateral $AGLC$ is cyclic since $m(\sphericalangle AGC) = m(\sphericalangle ALC) = \frac{\pi}{2}$, therefore $\mathrm{m}(\sphericalangle GLA) = \mathrm{m}(\sphericalangle GKH)$ and thus $\mathrm{m}(\sphericalangle GKH) = \mathrm{m}(\sphericalangle BCA)$ or $HK \parallel AC$.

To see that $GL \parallel BT$, let's look first to the cyclic quadrilateral $BTKH$. We have $\mathrm{m}(\sphericalangle BTH) = \mathrm{m}(\sphericalangle BKH)$. Using (i), in the quadrilateral $KHGL$ we have $\mathrm{m}(\sphericalangle BKH) = \mathrm{m}(\sphericalangle HLG)$. Therefore $\mathrm{m}(\sphericalangle HLG) = \mathrm{m}(\sphericalangle ATB)$, so $GL \parallel BT$.

We now prove that $HG \parallel TC$. By (i), $\mathrm{m}(\sphericalangle GHL) = \mathrm{m}(\sphericalangle GKL)$. From the cyclic quadrilateral $KLTC$ we have $\mathrm{m}(\sphericalangle LTC) + \mathrm{m}(\sphericalangle LKC) = \pi$. But $\mathrm{m}(\sphericalangle LKB) + \mathrm{m}(\sphericalangle LKC) = \pi$, so $\mathrm{m}(\sphericalangle GHL) = \mathrm{m}(\sphericalangle GKL) = \mathrm{m}(\sphericalangle LTC)$. Therefore $HG \parallel TC$.

Since $\mathrm{m}(\sphericalangle ABC) = \mathrm{m}(\sphericalangle ATC)$, the above arguments yield also $\mathrm{m}(\sphericalangle ABC) = \mathrm{m}(\sphericalangle BKL)$, therefore $AB \parallel KL$.

(iii) Let us denote by O' the center of the circle $(GHKL)$. We remark first that

$$\mathrm{m}(\sphericalangle GLK) = \mathrm{m}(\sphericalangle BCA) + \frac{1}{2}\mathrm{m}(\sphericalangle BAC).$$

In the circle centered in O' we have $\mathrm{m}(\sphericalangle KO'G) = 2m(\sphericalangle KLG)$, therefore

$$\mathrm{m}(\sphericalangle KO'G) = 2\left[\mathrm{m}(\sphericalangle BCA) + \frac{\mathrm{m}(\sphericalangle BAC)}{2}\right] = 2m(\sphericalangle BCA) + \mathrm{m}(\sphericalangle BAC).$$

On the other hand $\mathrm{m}(\sphericalangle KEG) = \mathrm{m}(\sphericalangle ABC) - \mathrm{m}(\sphericalangle ACB)$ therefore, adding term by term these last two relations, we obtain

$$\mathrm{m}(\sphericalangle KO'G) + \mathrm{m}(\sphericalangle KEG) = \mathrm{m}(\sphericalangle ABC) + \mathrm{m}(\sphericalangle BCA) + \mathrm{m}(\sphericalangle BAC) = \pi.$$

Therefore the points K, O', G, E lie on the same circle. (As a matter of fact, this is the Euler's circle of the triangle ABC.) □

Second solution to Problem 5: Writing the power of P with respect to the circle $(KLTC)$ we get

$$\rho_1(P) = |PK| \cdot |PC| = |PT| \cdot |PL|,$$

and the power of P with respect to the circle $(ABGH)$

$$\rho_2(P) = |PG| \cdot |PB| = |PH| \cdot |PA|.$$

Multiplying these two equalities term by term and using the fact that $|PB| \cdot |PC| = |PT| \cdot |PA|$, we get

$$|PK| \cdot |PG| = |PL| \cdot |PH|,$$

i.e. $KLGH$ is a cyclic quadrilateral. This proves (i).

To see (ii), we need to prove, for example, that

$$\frac{|PK|}{|PT|} = \frac{|PH|}{|PA|}$$

or $|PK| \cdot |PA| = |PT| \cdot |PH|$. This relation can be proved if we use, in addition to the above considerations, the power of P with respect to the circle $(AGLT)$

$$\rho_3(P) = |PL| \cdot |PA| = |PG| \cdot |PT|.$$

□

Our solution for Problem 6 is different from the one published in *Amer. Math. Monthly*, vol **111** (2004), pp. 726-728, since it is based on an auxiliary construction, a natural extension of our figure, suggested by the fact that $\overrightarrow{AA'}$ is the angle bisector.

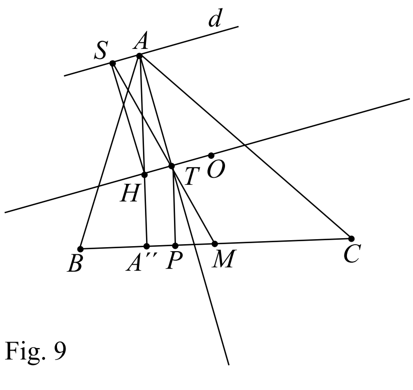


Fig. 9

Solution to Problem 6: (i) Consider the line d through A perpendicular to the line $\overrightarrow{AA'}$ bisecting $\sphericalangle A$. Project H onto d and denote this point S. The quadrilateral $ATHS$ is a rectangle. To establish the notations, let's denote by A'', B'' and respectively C'' the feet of the altitudes in the triangle ABC.

Let's prove for the beginning that M, T and S are on the same line. The quadrilateral $AB''HC''$ is cyclic and $[AH]$ is a diameter in its circumcircle.

The points S and T lie also on this circle, since they form a right angle on the circumcircle. The diagonal in the rectangle $ATHS$, $[ST]$, is also a diameter.

The point T is the midpoint of the arc $B''HC''$, since AT bisects $\sphericalangle BAC$. Then the diameter $[TS]$ is perpendicular to $[B''C'']$ at its midpoint.

The quadrilateral $BCB''C''$ is cyclic, and its circumcenter is M, its diameter is $[BC]$. Therefore $[B''C'']$ is the common chord to the circles $(AC''B'')$ and $(BCB''C'')$. Thus, the line perpendicular to $B''C''$ at its midpoint will pass through the two centers, and one of them is M.

In this context, we see that $\mathrm{m}(\sphericalangle A'TP) = \mathrm{m}(\sphericalangle TAH)$, and from the rectangle $\mathrm{m}(\sphericalangle TAH) = \mathrm{m}(\sphericalangle STA)$, and as opposite angles $\mathrm{m}(\sphericalangle STA) = \mathrm{m}(\sphericalangle MTA')$. Therefore TA' bisects $\sphericalangle MTP$.

(ii) We have seen that TM is perpendicular to $B''C''$, which is one of the sides in the triangle $A''B''C''$. It is known that AO is perpendicular to $B''C''$. Therefore $TM \parallel AO$. □

Comment. We now summarize the geometric arguments we have encountered in these solutions. First of all, we have seen proofs based on standard reasoning with measures of angles (as the first proof of Problem 5 and the proof of Problem 6) and proofs based on the power of the point (Problem 4). The interplay of these methods is by no means a surprise, since the angle bisector has a dual nature (bisects the angle and is the set of the points equidistant from the sides, thus characterized by a metric condition). The connection with these metric relations allows other important metric methods to play a role in the proofs. We see this in the proofs using the power of the point with respect to a circle. (See the second solution of Problem 5, and the solution of Problem 4.) In Problem 3, we have a very interesting interplay between angles and metric properties, perhaps one of the simplest and most informative examples one may find to illustrate the consequence of using these two methods.

The classical viewpoint on these geometric structures presented by *Coxeter* and *Greitzer*, in [6], or *Lalescu*, in [2], is the common ground of many of our textbooks (see, for example, *Posamentier*, [11], pp. 88-96.) Recently, the problem-solving viewpoint has been well represented in the literature. For example, in *Andreescu* and *Gelca*, [1], there is a thorough discussion of the power of a point with respect to a circle. This discussion extends the classical viewpoint presented in *Coxeter* and *Greitzer*, [6], pp.27-31. Other interesting geometric structures are discussed from the problem solving viewpoint by *Andreescu* and *Savchev* in [2], and by *Andreescu* and *Enescu* in [3]. For example, in [2], pp. 88-92, *Andreescu* and *Savchev* discuss auxiliary constructions, (as we did in Problem 6) and, in [3], *Andreescu* and *Enescu* collect a group of problems on quadrilaterals with an inscribed circle (we had to use this concept in Problem 2).

Bonus problems. In our final section, we propose a few problems whose solutions may use the methods discussed in the present note.

Problem 7. *Let ΔABC a triangle such that $AB \neq AC$. The angle bisector of $\sphericalangle BAC$ intersects (BC) in D. The circle through the points A, D and midpoint M of (BC) intersects (AB) in P and (AC) in Q. Then $(BP) \cong (CQ)$.*

Hint: Write the powers of the points B and C with respect to the circle

(ADM). The proof is similar to the one of Problem 4.

Problem 8. (*C. Gidea*, E:8859, Gazeta matematică, XCII, 1986.) *Let A, B, C be three points on a circle with center in O and A', B', C' their diametral opposites, such that B is on the arc AC and $\sphericalangle AOC$ is acute. Then prove that:*

(i) If $AC' \cap BC = \{M\}$ and $A'C \cap B'C' = \{N\}$, then the points M, O, N are collinear.

(ii) If $(MC) \cong (A'C)$, then MA' is the bisector of the angle CMC'.

The next example is a classic. It has been assigned to the International Olympiad 1987. There are similarities between its proof and Problems 4 and 5 presented above.

Problem 9. *Let the bisector of angle A in acute triangle ABC cross BC at L and meet the circumcircle of the triangle at N. From L, let perpendiculars LK and LM be drawn to sides AB and AC, respectively. Prove that the quadrilateral $AKNM$ and triangle ABC have the same area.*

For a solution, see for example [7], pp.192.

References

[1] T. Andreescu and R. Gelca, *Mathematical Olympiad Challenges*, Birkhäuser, 2000.

[2] T. Andreescu and S. Savchev, *Mathematics Miniatures*, Math. Assoc. Amer., 2002.

[3] T. Andreescu and B. Enescu, *Mathematical Olympiad Treasures*, Birkhäuser, 2003.

[4] P. Aubert and G. Papelier, *Exercices de géométrie analytique,* Vuibert, Paris, 1930.

[5] A. Berele and J. Goldman, *Geometry: Theorems and Constructions,* Prentice Hall, 2000.

[6] H. S. M. Coxeter and S. L. Greitzer, *Geometry Revisited*, Yale University Press, 1967.

[7] R. Honsberger, *From Erdös to Kiev, Problems of Olympiad Caliber,* Math. Assoc. Amer., 1996.

[8] C. Ionescu-Ţiu, *Plane and space geometry for admission in college*, (in Romanian) Tehnical Publishing House, Bucharest, 1976.

[9] T. Lalescu, *Geometry of Triangle* (in Romanian), Apollo Publishing House, Craiova, Romania, 1993 (original French edition, 1937).

[10] L. Panaitopol, *Methods in Teaching Mathematics*, class notes, University of Bucharest, 1995-1996.

[11] A. S. Posamentier, *Advanced Euclidean Geometry*, Key College Publ., 2002.

[12] Stanley Rabinowitz, Problem 2902, *Crux Mathematicorum,* vol. **30** (2004), pag. 39.

Graduate Instructor
Dep. of Mathematics,
California State
University, Fullerton,
CA 92834-6850, U.S.A.

Assistant Professor
Dep. of Mathematics,
California State
University, Fullerton,
CA 92834-6850, U.S.A.

Alumna
Dep. of Mathematics,
California State
University, Fullerton,
CA 92834-6850, U.S.A.

Asupra structurii grupurilor abeliene finite

DE NICOLAE ANGHEL

Abstract

In this note we present a direct elementary proof to a classical result regarding the structure of finite abelian groups as products of descending cyclic groups.

Key words: finite groups, abelian groups, cyclic groups, classification theorem.
M.S.C.: 20K01, 20K25

Un rezultat clasic în teoria grupurilor abeliene finite afirmă că, până la un izomorfism, orice grup abelian finit netrivial este caracterizat în mod unic de un şir de numere naturale $m_1 \geq m_2 \geq \cdots \geq m_p \geq 2$, cu proprietatea $m_p \big| m_{p-1} \big| \dots \big| m_2 \big| m_1$. În general există două nivele de demonstraţie pentru acest rezultat [1, 2]:

1) *Teoria elementară a grupurilor.* Demonstraţiile uzuale în acest context, deşi elementare, par ocolitoare datorită folosirii descompunerii în factori primi a numerelor naturale.

2) *Teoria avansată a algebrelor comutative.* Demonstraţiile de acest tip sunt o consecinţă a teoremei factorilor invarianţi şi ca atare devin inaccesibile matematicianului începător.

O nouă demonstraţie, în spiritul punctului 2), dar la nivelul punctului 1), poate apărea deci interesantă. Scopul acestui articol este de a prezenta o astfel de demonstraţie. Se poate spune chiar că după însuşirea câtorva concepte de bază din teoria grupurilor privitoare la ordinul unui element, grupuri ciclice, grupuri factor şi sume directe interne, demonstraţia propusă va fi pe înţelesul liceanului pasionat de matematică.

Fie G un grup abelian finit. Conform uzanţelor, operaţia de grup în G va fi notată aditiv prin $+$, iar elementul neutru prin 0. Dacă n este un număr natural, subgrupul *n-anulator* al lui G, notat ${}^nG$, se defineşte prin ${}^nG := \{g \in G | ng = 0\}$. *Exponentul* $e(G)$ al lui G este atunci cel mai mic număr natural cu proprietatea ${}^nG = G$. Este uşor de văzut că ordinul fiecărui element din G este un divizor al lui $e(G)$ şi că există elemente de ordin $e(G)$ în G. Rezultă aşadar că $e(G)$ este un divizor al ordinului lui G, $|G|$.

Subgrupurile n-anulatorii au două proprietăţi simplu de demonstrat şi care vor juca un rol major în cele ce urmează.

a) *Grupurile abeliene finite izomorfe au n-anulatori izomorfi.*

b) *n-anulatorul unei sume directe de grupuri abeliene finite este egal cu suma directă a n-anulatorilor respectivelor grupuri.*

Pentru a termina această introducere vom nota prin $\langle g \rangle$ subgrupul ciclic al lui G generat de $g \in G$ şi prin $|g|$ ordinul acestui subgrup. O submulţime $F \subseteq G$ se va numi *n-directă* dacă toate elementele lui F au ordin n şi $\sum_{f \in F} \langle f \rangle$ e o sumă directă internă în G. De exemplu, orice submulţime cu un singur element $F = \{f\}$ este $|f|$-directă. Evident orice submulţime n-directă poate fi extinsă la una maximală. Submulţimile $e(G)$-directe maximale vor fi inspectate mai atent în următoarele două leme.

Lema A. *O submulţime $e(G)$-directă F a unui grup abelian finit G de exponent $e(G)$ este maximală dacă şi numai dacă* $e\left(G/\underset{f\in F}{\oplus}\langle f\rangle\right) < e(G)$.

Demonstraţia Lemei A decurge imediat din simpla observaţie că pentru un element $h \in G$ de ordin $e(G)$, suma $\langle h\rangle + \left(\underset{f\in F}{\oplus}\langle f\rangle\right)$ este una directă internă în G dacă şi numai dacă clasa lui h în grupul factor $G/\underset{f\in F}{\oplus}\langle f\rangle$ are ordinul $e(G)$.

Lema B. D*acă G este un grup abelian finit netrivial, atunci pentru orice submulţime $e(G)$-directă maximală F există un subgrup H al lui G, $e(H) < e(G)$, cu proprietatea*

$$G = \underset{f\in F}{\oplus}\langle f\rangle \oplus H.$$

Demonstraţie. Vom face demonstraţia prin inducţie după $|G|$. Pentru valori mici ale lui $|G|$, $|G| = 2, 3$, afirmaţia este evidentă pentru că atunci G este un grup ciclic şi automat $H = 0$.

Să presupunem acum că pentru un N fixat, $N \geq 4$, afirmaţia este adevărată pentru grupuri de ordin strict mai mic decât N şi că G este un grup abelian de ordin N. Fie F o submulţime $e(G)$-directă maximală în G. Pentru simplitate să notăm prin n exponentul grupului factor $G/\underset{f\in F}{\oplus}\langle f\rangle$. Atunci n este un divizor al lui $e(G)$ şi, conform Lemei A, $n < e(G)$. Este evident că mulţimea $\left\{\frac{e(G)}{n}f \,\middle|\, f\in F\right\}$ este o submulţime n-directă a grupului ${}^nG$ şi, prin urmare, $e\left({}^nG\right) = n$. Vom extinde acum $\left\{\frac{e(G)}{n}f \,\middle|\, f\in F\right\}$ până la o submulţime n-directă maximală în ${}^nG$, prin adăugarea, să spunem, unei mulţimi $D \subseteq {}^nG$. Cum $|{}^nG| < |G|$, conform ipotezei de inducţie există un subgrup $L \subset {}^nG$, $e(L) < e({}^nG) = n$, cu proprietatea:

$$ {}^nG = \left(\underset{f\in F}{\oplus}\left\langle \frac{e(G)}{n}f\right\rangle \oplus \underset{d\in D}{\oplus}\langle d\rangle\right) \oplus L. \tag{3}$$

Demonstraţia va fi completă dacă arătăm că

$$G = \underset{f\in F}{\oplus}\langle f\rangle \oplus \left(\underset{d\in D}{\oplus}\langle d\rangle \oplus L\right).$$

Fie $g \in G$. Cum $e\left(G/\underset{f\in F}{\oplus}\langle f\rangle\right) = n$, avem $n[g] = [0]$, unde parantezele pătrate $[\cdot]$ reprezintă clase în $G/\underset{f\in F}{\oplus}\langle f\rangle$. În consecinţă, $ng \in \underset{f\in F}{\oplus}\langle f\rangle$. Afirmăm că există un element $v \in \underset{f\in F}{\oplus}\langle f\rangle$ cu proprietatea $n(g-v) = 0$. Într-adevăr, există numere naturale $0 \leq \lambda_f < e(G)$, $f \in F$, astfel încît $ng = \sum_{f\in F}\lambda_f f$. Deci

$$0 = e(G)g = \frac{e(G)}{n}(ng) = \sum_{f\in F}\left(\frac{e(G)}{n}\lambda_f\right)f,$$

şi cum suma $\underset{f\in F}{\oplus}\langle f\rangle$ este una directă, pentru fiecare $f\in F$, avem $\left(\dfrac{e(G)}{n}\lambda_f\right)f=0$. Dar $|f|=e(G)$ şi, prin urmare, $e(G)$ este un divizor al lui $\dfrac{e(G)}{n}\lambda_f$, ceea ce este echivalent cu faptul că pentru orice $f\in F$, n este un divizor al lui λ_f. Deci $n(g-v)=0$, unde $v=\sum\limits_{f\in F}\dfrac{\lambda_f}{n}f$. Cu alte cuvinte $g-v\in {}^nG$. Conform egalităţii (3), există elemente $w\in\underset{f\in F}{\oplus}\left\langle\dfrac{e(G)}{n}f\right\rangle$, $t\in\underset{d\in D}{\oplus}\langle d\rangle$ şi $l\in L$, cu proprietatea

$$g-v=w+t+l.$$

Din moment ce $\underset{f\in F}{\oplus}\left\langle\dfrac{e(G)}{n}f\right\rangle\subset\underset{f\in F}{\oplus}\langle f\rangle$, $g=(w+v)+(t+l)$ ne arată că

$$G=\underset{f\in F}{\oplus}\langle f\rangle+\left(\underset{d\in D}{\oplus}\langle d\rangle\oplus L\right). \tag{4}$$

Rămâne de arătat că membrul drept al egalităţii (4) este o sumă directă internă în G. Să presupunem că pentru $v\in\underset{f\in F}{\oplus}\langle f\rangle$, $t\in\underset{d\in D}{\oplus}\langle d\rangle$ şi $l\in L$, avem $v+(t+l)=0$. Atunci, $n(t+l)=0$, deoarece $t+l\in{}^nG$ şi, prin urmare, $nv=0$. Ca mai înainte, se vede că acest fapt este echivalent cu $v\in\underset{f\in F}{\oplus}\left\langle\dfrac{e(G)}{n}f\right\rangle$. Egalitatea (3) implică deci că $v=0$, $t=0$, $l=0$. $\square$

Teorema de Clasificare – Existenţa. *În orice grup abelian finit netrivial G există elemente $g_1,g_2,\dots,g_p$ de ordine respective $m_1,m_2,\dots,m_p\geq 2$, cu proprietatea că $m_p\big|m_{p-1}\big|\dots\big|m_2\big|m_1$ şi $G=\langle g_1\rangle\oplus\langle g_2\rangle\oplus\cdots\oplus\langle g_p\rangle$.*

Demonstraţia constă într-o folosire repetată a lemei B, mai întâi în G, apoi în subgrupul asociat H etc., până când se obţine $H=0$. Elementele $g_1,g_2,\dots,g_p$ sunt pur şi simplu o indexare progresivă a elementelor aparţinând tuturor submulţimilor directe maximale care apar pe parcurs. Este clar că ordinele lor, $e(G)$, $e(H)$ etc., repetate corespunzător, satisfac condiţia de divizibilitate cerută.

Teorema de Clasificare – Unicitatea. *Dacă elementele $g_1,g_2,\dots,g_p$, cu ordine respective $m_1,m_2,\dots,m_p$ şi $h_1,h_2,\dots,h_q$, cu ordine respective $n_1,n_2,\dots,n_q$, satisfac simultan condiţiile teoremei de existenţă, atunci $p=q$ şi $m_1=n_1$, $m_2=n_2$, $\dots$, $m_p=n_p$.*

Demonstraţie. Prin reducere la absurd, să presupunem că cele două şiruri de ordine nu sunt identice. Fie atunci r cel mai mic număr natural cu proprietatea $m_r\neq n_r$, să zicem $m_r>n_r$. Avem $r>1$, deoarece $m_1=n_1=e(G)$. Teorema de existenţă garantează atunci existenţa unor subgrupuri G_1, G_2 şi H_1, H_2 cu proprietăţile $G=G_1\oplus G_2=H_1\oplus H_2$, G_1 este izomorf cu H_1, $e(G_2)=m_r$ şi $e(H_2)=n_r$. În consecinţă, ${}^{n_r}G={}^{n_r}G_1\oplus{}^{n_r}G_2={}^{n_r}H_1\oplus{}^{n_r}H_2$, $|G_2|=|H_2|$ şi $|{}^{n_r}G_2|=|{}^{n_r}H_2|$. Ultimele două egalităţi sînt însă contradictorii, deoarece ${}^{n_r}H_2=H_2$, dar cum $e(G_2)=m_r>n_r$, ${}^{n_r}G_2\subsetneqq G_2$. $\square$

Bibliografie

[1] I. D. Ion, N. Radu *Algebră* Ediţia a IV-a, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, (1991).

[2] S. Lang, *Algebra* 3rd Edition, Springer, NewYork, (2002).

Departamentul de Matematică
Universitatea Texasului de Nord
Denton, TX 76203, S.U.A.
e-mail: anghel@unt.edu

EXAMENE ŞI CONCURSURI

Examenul pentru obţinerea gradului didactic II – sesiunea august 2006 – Universitatea Transilvania din Braşov

DE EUGEN PĂLTĂNEA ŞI EMIL STOICA

În vederea testării nivelului de pregătire al candidaţilor la disciplina matematică, precum şi a cunoştinţelor de metodica predării specialităţii, comisia a optat pentru o proba scrisă cu un conţinut clasic. Au fost propuse trei subiecte: un subiect de algebră (teorie şi metodica predării specialităţii), un subiect de analiză matematică şi respectiv un subiect de geometrie. S-a urmărit ca rezolvările itemilor propuşi să necesite cunoştinţe matematice variate din programele de gimnaziu (aritmetica numerelor întregi, elemente de geometrie sintetică) şi respectiv liceu (clasele de resturi, studiul variaţiei funcţiilor reale, convergenţa şirurilor, limitele de funcţii, calculul integral). Au fost testate şi alte cunoştinţe, specifice programei examenului de gradul II (relaţia de echivalenţă, convergenţa seriilor numerice şi transformările geometrice). Structurarea subiectelor a fost realizată cu respectarea principiului gradării dificultăţii. S-a urmărit de asemenea o repartizare adecvată a punctajului.

În urma verificării lucrărilor, s-au consemnat rezultate sensibil superioare celor înregistrate în anii precedenţi la aceeaşi probă, în centrul universitar Braşov. Aceasta se datorează în principal dificultăţii matematice moderate a probei propuse în acest an, precum şi ameliorării nivelului de pregătire al candidaţilor. Un factor indiscutabil pozitiv îl constituie publicarea consecventă a subiectelor propuse la diverse concursuri sau examene ale profesorilor de matematică în paginile revistei Gazeta Matematică Seria A. Candidaţii au avut astfel la dispoziţie modele recente utile de enunţuri şi rezolvări.

Cele 21 de cadre didactice prezente în examen au obţinut medii cuprinse între 7 şi 9,33. Situaţia statistică a rezultatelor înregistrate este ilustrată de tabelul următor:

	tip unit. de înv. unde desf. activ. did.	
	şcoală generală	lic. teoretic, col. tehnic, gr. şcolar
număr candidaţi	11	10
media pe unitate de înv.	8,15	8,47
media generală	**8,30**	

Conţinutul probei de matematică şi soluţiile problemelor propuse sunt expuse în continuare.

Proba de matematică

1. a) **(1p)** Să se enunţe teorema împărţirii cu rest în mulţimea $\mathbb{Z}$.

b) **(1p)** Să se definească divizibilitatea numerelor întregi şi să se caracterizeze noţiunea utilizând teorema împărţirii cu rest.

c) **(2p)** Să se enunţe şi să se demonstreze criteriul de divizibilitate cu 3 pentru numere naturale reprezentate în baza 10.

d) **(2p)** Să se verifice că, pentru $n \in \mathbb{N}^*$, relaţia " $\equiv_n$ ", definită prin $a \equiv_n b$ dacă $n|(b-a)$, unde $a, b \in \mathbb{Z}$, este o relaţie de echivalenţă pe mulţimea $\mathbb{Z}$.

e) **(3p)** Să se descrie metodica construcţiei inelului $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$, unde $n \in \mathbb{N}^*$, caracterizând elementele sale inversabile.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) = \frac{x^2 \operatorname{arctg} x}{x^2+1}.$$

a) **(3p)** Să se studieze monotonia funcţiei f şi să i se determine imaginea $f(\mathbb{R})$.

b) **(3p)** Fie şirul $(x_n)_{n\geq 0}$, definit prin $x_{n+1} = f(x_n)$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, cu $x_0 > 0$. Să se studieze convergenţa şirului $(x_n)_{n\geq 0}$ şi să se determine natura seriei numerice $\sum\limits_{n\geq 0} x_n$.

c) **(3p)** Fie funcţia $F : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, definită prin:

$$F(x) = \int_1^x (f(t) - f(1/t))\, dt, \quad x > 0.$$

Să se arate că $F(x) \geq 0$, pentru orice $x > 0$ şi să se calculeze $\lim\limits_{x \searrow 0} F(x)$.

3. Fie un triunghi ABC şi P un punct arbitrar situat în planul π al triunghiului. Notăm A', B', C' simetricele punctului P faţă de mijloacele laturilor BC, CA şi respectiv AB ale triunghiului ABC.

a) **(3p)** Să se demonstreze: $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.

b) **(4p)** Să se arate că triunghiurile ABC şi $A'B'C'$ sunt înscrise în acelaşi cerc dacă şi numai dacă P este ortocentrul triunghiului ABC.

c) **(2p)** Dacă P este ortocentrul triunghiului ABC, să se determine o transformare geometrică $T : \pi \to \pi$ cu proprietatea $T(\triangle ABC) = \triangle A'B'C'$.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. La fiecare subiect se acordă **1 punct** din oficiu.

Soluţii.

Subiectul 1. (rezumat)

a) *Teorema împărţirii cu rest în mulţimea* $\mathbb{Z}$ are următorul enunţ:

Pentru oricare $a, b \in \mathbb{Z}$, *cu* $b \neq 0$, *există şi sunt unice numerele întregi* c *şi* r, *numite câtul şi respectiv restul împărţirii lui* a la b, *astfel ca* $a = bc + r$ *şi* $0 \leq r < |b|$.

b) *Divizibilitatea numerelor întregi* reprezintă o relaţie de preordine parţială definită pe mulţimea $\mathbb{Z}$ prin enunţul: *pentru oricare* $a, b \in \mathbb{Z}$, b *divide* a (notaţie uzuală: $b|a$) *dacă există* $c \in \mathbb{Z}$ *astfel ca* $a = bc$. Din teorema împăţirii cu rest în $\mathbb{Z}$ se obţine următoarea caracterizare a divizibilităţii: *pentru oricare* $a, b \in \mathbb{Z}$, *cu* $b \neq 0$, b *divide* a *dacă şi numai dacă restul împărţirii lui* a *la* b *este nul.*

c) Enunţul criteriului este următorul: *un număr natural se divide cu* 3 *dacă şi numai dacă suma cifrelor sale din reprezentarea sa în baza* 10 *se divide cu* 3.

Demonstraţie. Fie $a = \overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0}_{(10)}$. Notăm S suma cifrelor numărului a. Avem $a = S + \sum_{k=1}^{n} a_k(10^k - 1) = S + 9 \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{i=0}^{k-1} 10^i$, de unde obţinem $3|a$ dacă şi numai dacă $3|S$.

d) Este necesar să demonstrăm că relaţia *congruenţa modulo n*, notată prin " $\equiv_n$ ", este *reflexivă*, *simetrică* şi *tranzitivă*.

1) *Reflexivitatea:* $(\forall\ a \in \mathbb{Z})\ \ (a \equiv_n a)$.
Avem $n|(a - a)$, pentru orice $a \in \mathbb{Z}$.

2) *Simetria:* $(\forall\ a, b \in \mathbb{Z})\ \ (a \equiv_n b\ \Rightarrow\ b \equiv_n a)$.
Pentru oricare $a, b \in \mathbb{Z}$, dacă $n|(b - a)$, atunci $n|(a - b)$.

3) *Tranzitivitatea:* $(\forall\ a, b, c \in \mathbb{Z})\ \ (a \equiv_n b\ \wedge\ b \equiv_n c \Rightarrow\ a \equiv_n c)$.
Pentru oricare $a, b, c \in \mathbb{Z}$, dacă $n|(b - a)$ şi $n|(c - b)$, atunci $n|(c - a)$, deoarece avem $c - a = (b - a) + (c - b)$.

e) Relaţia de echivalenţă $\equiv_n$ determină pe $\mathbb{Z}$ partiţia $\mathbb{Z}_{/\equiv_n} := \mathbb{Z}_n = \{\widehat{x}\,|\,x \in \mathbb{Z}\}$, unde $\widehat{x} = \{y \in \mathbb{Z}\,|\,y \equiv_n x\}$ reprezintă *clasa de echivalenţă modulo n* a elementului $x \in \mathbb{Z}$. Conform teoremei împăţirii cu rest, $\mathbb{Z}_n = \{\widehat{0}, \widehat{1}, \cdots, \widehat{n-1}\}$. Pe mulţimea $\mathbb{Z}_n$ se defineşte *adunarea modulo n* prin: $\widehat{x} + \widehat{y} := \widehat{x+y}$, pentru orice $\widehat{x}, \widehat{y} \in \mathbb{Z}_n$ şi respectiv *înmulţirea modulo n* prin: $\widehat{x}\,\widehat{y} := \widehat{xy}$, pentru orice $\widehat{x}, \widehat{y} \in \mathbb{Z}_n$. Corectitudinea definiţiilor operaţiilor algebrice pe mulţimea $\mathbb{Z}_n$ decurge din implicaţia următoare:

$$(\forall\ x, x', y, y' \in \mathbb{Z})\ (x \equiv_n x'\ \wedge\ y \equiv_n y'\ \Rightarrow\ x + y \equiv_n x' + y'\ \wedge\ xy \equiv_n x'y').$$

Se verifică elementar că $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ are o structură de inel comutativ, numit *inelul claselor de resturi modulo n.* Inelul $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ se obţine prin factorizarea ine]-lu]-lui $\mathbb{Z}$ la idealul $n\mathbb{Z} = \{nk\,|\,k \in \mathbb{Z}\}$. Din următoarea proprietatea de divizibilitate (cf. *algoritmului lui Euclid*):

$$\forall\, x, n \in \mathbb{Z}^*\ (x, n) = 1\ \Leftrightarrow\ \exists\, y, k \in \mathbb{Z}^*,\ xy = 1 + nk,$$

se deduce că elementul $\widehat{x}$ este inversabil în $\mathbb{Z}_n$ dacă şi numai dacă numerele întregi x şi n sunt prime între ele. Atunci $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ este un inel cu divizori ai lui 0, dacă n este neprim, respectiv $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ are o structură de corp, dacă n este un număr prim.

Descrierea construcţiei inelului claselor de resturi $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$, $n \in \mathbb{N}^*$, este prevăzută în programa de matematică M_1 a clasei a XII-a. Sunt necesare următoarele noţiuni preliminare: inel şi corp, divizibilitate (în $\mathbb{Z}$), relaţie de echivalenţă şi mulţimea claselor de echivalenţă. Pentru fixarea operaţiilor algebrice din $\mathbb{Z}_n$ se vor utiliza tablele de operaţie. Prezentarea la clasă a definiţiei constructive a inelului $\mathbb{Z}_n$ va fi însoţită de exemplificări sugestive. Se vor caracteriza unităţile inelului $\mathbb{Z}_n$ şi se va analiza cazul când n este număr prim. Se va accentua faptul că $\mathbb{Z}_n$ reprezintă cel mai important exemplu de inel/corp finit.

Subiectul 2.

a) Avem $f'(x) = (x^2 + 2x \operatorname{arctg} x)(x^2+1)^{-2}$, $x \in \mathbb{R}$. Din $x \operatorname{arctg} x \geq 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, deducem că f' este strict pozitivă pe $\mathbb{R}^*$, deci f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$. Cum f este continuă pe $\mathbb{R}$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \dfrac{\pi}{2}$, respectiv $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\dfrac{\pi}{2}$, funcţia f are imaginea $f(\mathbb{R}) = \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

b) Avem $0 < f(x) < \operatorname{arctg} x$ şi $\operatorname{arctg} x < x$, pentru orice $x > 0$, deci $0 < f(x) < x$, oricare ar fi $x > 0$. Rezultă că şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ are termenii strict pozitivi (demonstraţie prin inducţie) şi este strict descrescător. Atunci şirul este convergent cu limita $a \in [0, x_0)$. Prin trecere la limită în relaţia de recurenţă se obţine $a = f(a)$. Se deduce $a = 0$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Apoi $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n \operatorname{arctg} x_n}{x_n^2+1} = 0$. Conform criteriului raportului (*d'Alembert*), seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă.

c) Evident, $F(1) = 0$. Fie $x > 1$. Deoarece f este strict crescătoare pe $(0, \infty)$, are loc inegalitatea $f(t) > f(1/t)$, pentru orice $t \in (1, x]$, de unde $F(x) > 0$. Dacă $x \in (0,1)$, atunci $F(x) = \int_x^1 (f(1/t) - f(t))\, dt > 0$, deoarece $f(1/t) > f(t)$, oricare ar fi $t \in [x, 1)$. Pentru calculul lui $F(x)$ putem utiliza identitatea $\operatorname{arctg} t + \operatorname{arctg} 1/t = \dfrac{\pi}{2}$, oricare ar fi $t > 0$. Astfel obţinem $f(t) - f(1/t) = \operatorname{arctg} t - \dfrac{\pi}{2}(t^2+1)^{-1}$, $t > 0$. Prin integrare (prin părţi) rezultă:

$$F(x) = \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2, \quad x > 0.$$

Ca urmare, $\lim\limits_{x\searrow 0} F(x) = \pi^2/8 - \pi/4 + \ln\sqrt{2}$.

Subiectul 3.

a) Patrulaterele $APBC'$ şi $APCB'$ sunt paralelograme, deci patrulaterul $BCB'C'$ este de asemenea paralelogram. Rezultă $BC \equiv B'C'$. Analog obţinem $CA \equiv C'A'$ şi $AB \equiv A'B'$. Atunci $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ (cazul LLL).

b) Dacă A, B, C, A', B', C' sunt conciclice, atunci $ABA'B'$ este un paralelogram inscriptibil, deci este un dreptunghi. Din $AB' \parallel CP$ şi $AB' \perp AB$, rezultă $CP \perp AB$. Analog obţinem $AP \perp BC$. Rezultă că P este ortocentrul triunghiului ABC.

Reciproc, fie P ortocentrul triunghiului ABC. Din $CP \perp AB, BP \perp AC$ şi $BA'CP$ paralelogram, rezultă $A'B \perp AB$ şi $A'C \perp AC$, deci punctele A, B, C, A' sunt conciclice. Analog deducem că punctele A, B, C, B', respectiv punctele A, B, C, C' sunt de asemenea conciclice. Atunci A, B, C, A', B', C' sunt conciclice.

c) Deoarece A, B, C, A', B', C' sunt conciclice, iar patrulaterele $ABA'B'$ şi $BCB'C'$ sunt dreptunghiuri, segmentele AA', BB' şi CC' sunt diametri în cercul circumscris tringhiului ABC. Considerăm $T : \pi \to \pi$ simetria faţă de centrul O al cercului circumscris triunghiului ABC. Avem $T(A) = A'$, $T(B) = B'$ şi $T(C) = C'$, de unde $T(\triangle ABC) = \triangle A'B'C'$.

Universitatea Transilvania din Braşov,
Facultatea de Matematică şi Informatică,
Str. Iuliu Maniu nr. 50, Braşov
e-mail: epaltanea@unitbv.ro; e.stoica@unitbv.ro

NOTE MATEMATICE

Subalgebre nilpotente din $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$

DE ADRIAN REISNER

Abstract

In this note author presents some properties of nilpotent subalgebras of $\mathcal{L}(S)$, where S is a $\mathbb{K}$-vectorial space ($\mathbb{K}$ being a commutative field).

Key words: nilpotent endomorphism, nilpotent algebras, adopted base for a direct sum of vectorial subspaces

M.S.C.: 15A30, 15A78

Introducere. Definiţii şi notaţii

Fie $\mathbb{K}$ un corp comutativ arbitrar, iar S un $\mathbb{K}$- spaţiu vectorial. Un element $f \in \mathcal{L}(S)$[1)] este *nilpotent* dacă există $s \in \mathbb{N}^*$ astfel încât să avem $f^s = 0$; cel mai mic număr nenul având această proprietate se numeşte *indicele de nilpotenţă* al endomorfismului f. Deci $r \in \mathbb{N}^*$ este indicele de nilpotenţă al endomorfismului f dacă $f^r = 0$ şi $f^{r-1} \neq 0$.

O subalgebră din $\mathcal{L}(S)$ este un subspaţiu vectorial *stabil* pentru compunere. O subalgebră $\mathcal{A}$ din $\mathcal{L}(S)$ este *nilpotentă* dacă există $s \in \mathbb{N}^*$ astfel încât compunerea oricăror s elemente din $\mathcal{A}$ este nulă. Indicele de nilpotenţă r al subalgebrei $\mathcal{A}$ este cel mai mic număr natural cu această proprietate. Subalgebra $\mathcal{A}$ este comutativă dacă avem $f \circ g = g \circ f$, pentru orice $f, g \in \mathcal{A}$.

Ne propunem aici să demonstrăm câteva proprietăţi ale subalgebrelor nilpotente. Vom arăta în particular că toate elementele unei subalgebre nilpotente $\mathcal{A}$ pot fi reprezentate printr-o matrice de aceeaşi formă specifică.

Fiind dată o sumă directă de subspaţii vectoriale $S = S_1 \oplus S_2 \oplus \ldots \oplus S_n$, vom numi *bază adaptată* a acestei sume directe orice bază $\mathcal{B}$ a spaţiului S de forma $\mathcal{B} = \cup \mathcal{B}_i$, unde $\mathcal{B}_i$ este o bază a subspaţiului S_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$. Într-o astfel de bază $\mathcal{B}$, matricea unui element f din $\mathcal{L}(S)$ este de forma:

$$\begin{pmatrix} f_{11}(f) & \ldots\ldots & f_{1n}(f) \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ f_{n1}(f) & \ldots\ldots & f_{nm}(f) \end{pmatrix}.$$

1) Prin $\mathcal{L}(S)$ autorul desemnează, ca de obicei, algebra endomorfismelor spaţiului vectorial $\mathcal{S}$. Compunerea endomorfismelor – ca şi în general a aplicaţiilor – va fi notată prin juxtapunere. Prin $\mathcal{L}(S, S')$ este desemnat spaţiul vectorial al aplicaţiilor liniare dintre spaţiile $\mathcal{S}$ şi $\mathcal{S}'$. (N.R.)

Pentru simplificarea notaţiilor vom scrie f_{ij} în loc de $f_{ij}(f)$ când contextul va permite. Pe de altă parte, o bază adaptată $\mathcal{B}$ fiind aleasă, vom nota cu aceeaşi literă f_{ij} omomorfismul din $\mathcal{L}(S_i, S_j)$ reprezentat de matricea $f_{ij}(f)$, în raport cu bazele $\mathcal{B}_j$ şi $\mathcal{B}_i$: $f_{ij} : S_j \to S_i$; Mat $(f_{ij}; \mathcal{B}_j, \mathcal{B}_i) = (f_{ij}(f))$.

Endomorfisme nilpotente nenule din $\mathcal{L}(\mathbb{K}^2)$

În această secţiune considerăm $S = \mathbb{K}^2$. Avem lema următoare:

Lema 1. *Dacă f este un endomorfism nilpotent, nenul, de indice r, atunci există o bază B a spaţiului S, astfel încât*

$$\text{Mat }(f, B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mai mult, avem $r = 2$.

Demonstraţie. Endomorfismul f nefiind nici nul, nici bijectiv, avem $\text{rg} f = 1$. Din teorema rangului (defectului) rezultă $\text{rg } f + \dim\ker f = \dim S = 2$ şi deducem imediat că $\dim \text{im} f = \dim\ker f = 1$. Urmează că f induce un endomorfism nilpotent, deci nebijectiv pe im f. Însă $\text{im } f \cap \ker f \neq \{0\}$. Avem deci – trecând la dimensiuni – $\text{im } f = \ker f$. În concluzie $f^2 = 0$, i.e. indicele de nilpotenţă al lui f este $r = 2$. Fie $x \in S \setminus \ker f$. Sistemul $\{x, f(x)\}$ este liber, deci formează o bază B a spaţiului S . Matricea endomorfismului f în această bază este de forma $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, ceea ce încheie demonstraţia lemei 1. Observăm că $\det f = \text{tr} f = 0$. Din Lema 1 obţinem:

Teorema 2. *$\mathcal{A}$ fiind o subalgebră nilpotentă nenulă din $\mathcal{L}(S)$, există o bază $\mathcal{B}$ a spaţiului $S = \mathbb{K}^2$, astfel încât*:

$$\text{Mat }(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}, \quad \textit{unde}\, \gamma \in \mathbb{K}, \quad \forall f \in \mathcal{A}.$$

Demonstraţie. Dacă f este un element nenul aparţinând subalgebrei $\mathcal{A}$, fie $\mathcal{B}$ o bază a spaţiului $\mathcal{S}$, astfel încât

$$\text{Mat }(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(vezi lema 1). Cum f este un element oarecare al subalgebrei $\mathcal{A}$, avem $\det f = \text{tr} f = 0$. Matricea Mat $(f, \mathcal{B})$ este de forma

$$\text{Mat }(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix},$$

unde $\alpha^2 + \beta\gamma = 0$. Dar endomorfismul $f + f_0$ este de asemenea un element al subalgebrei $\mathcal{A}$ şi Mat $(f + f_0, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma+1 & -\alpha \end{pmatrix}$, deci avem $\alpha^2 + \beta(\gamma + 1) = 0$. Deducem imediat $\beta = 0$ şi $\alpha = 0$, deci $f = \gamma f_0$. Invers, γf_0 aparţine subalgebrei $\mathcal{A}$ pentru orice $\gamma \in \mathbb{K}$.

Endomorfisme nilpotente nenule din $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$

În această secţiune considerăm $S = \mathbb{K}^n$. Fie f un endomorfism nilpotent, nenul, de indice r şi $S_3 = \text{im} f \ker f$. Acest subspaţiu S_3 este diferit de S (căci, în caz contrar, am avea $S \subseteq \mathrm{im} f$ şi $S \subseteq \ker f$, ceea ce este imposibil, trecând la dimensiuni); de asemenea, S_3 este diferit de $\{0\}$, căci f induce un endomorfism nilpotent pe $\mathrm{im} f \neq \{0\}$, deci f nu este injectiv. Mai mult, avem $S_3 = \mathrm{im} f$ dacă şi numai dacă $r = 2$. Într-adevăr, $S_3 = \mathrm{im} f$ dacă şi numai dacă $\mathrm{im} f \subseteq \ker f$, deci dacă şi numai dacă $f^2 = 0$, de unde deducem aserţiunea, căci $\mathrm{im} f \neq \{0\}$. Considerăm $r \geq 3$ şi notăm:

S_1 un subspaţiu vectorial suplimentar spaţiului $\mathrm{im} f$, în raport cu S ($\mathrm{im} f \oplus S_1 = S$);

S_2 un subspaţiu vectorial suplimentar spaţiului S_3, în raport cu $\mathrm{im} f$ ($S_2 \oplus S_3 = \mathrm{im} f$).

Cu aceste notaţii avem:

Teorema 3. *Pentru $r \geq 3$, şi pentru descompunerea în sumă directă $S = S_1 \oplus S_2 \oplus S_3$, endomorfismul f este reprezentat de o matrice de forma următoare:*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ f_{21} & f_{22} & 0 \\ f_{31} & f_{32} & 0 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

într-o bază adaptată acestei sume directe. Mai mult, matricea f_{22} este nilpotentă cu indicele $r' = r - 2$.

Demonstraţie. Fie $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_3$, unde $\mathcal{B}_i$ este o bază a subspaţiului S_i, $i \in \{1, 2, 3\}$ şi matricea Mat $(f, \mathcal{B}) = (f_{ij})$, $i, j \in \{1, 2, 3\}$, descompusă în blocuri de matrici conform sumei directe $S = S_1 \oplus S_2 \oplus S_3$ ($\mathcal{B}$ este o bază adaptată acestei sume directe). Deoarece S_1 este un supliment al spaţiului $\mathrm{im} f$ – în raport cu S – deducem că $f_{1i} = 0$, pentru $i \in \{1, 2, 3\}$. Cum S_3 este inclus în $\ker f$, avem $f_{i3} = 0$, $i \in \{1, 2, 3\}$, de unde prima parte a teoremei 3.

Pe de altă parte, pentru orice $s \in \mathbb{N}^*$, matricea endomorfismului f^s, în baza $\mathcal{B}$, este de forma

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ * & f_{22}^s(f) & 0 \\ * & * & 0 \end{pmatrix}.$$

Avem, deci, $f_{22}^r(f) = 0$, r fiind indicele de nilpotenţă al endomorfismului f şi deci matricea f_{22} este nilpotentă, cu un indicele $r' \leq r$.

Să determinăm acest indice r'.

Cum $r \geq 3$, deoarece f este nilpotentă de indice r, rezultă $f^r = 0$ şi $f^{r-1}(S) \subseteq S_3$. Deci $f^{r-2}(S_2) = f^{r-1}(S) \subseteq S_3$ şi $f_{22}^{r-2} = 0$. Presupunând că $f_{22}^{r-3} = 0$. deducem $f^{r-3}(S_2) \subseteq S_3$ şi $f^{r-2}(S) = f^{r-3}(\mathrm{im} f) = f^{r-3}(S_2 \oplus S_3)$; dar $f^{r-1}(S) \subseteq f(S_3) = \{0\}$, ceea ce este imposibil, căci $f^{r-1} \neq 0$. În final, indicele de nilpotenţă al matricei f_{22} este $r' = r - 2$.

Exemplificare numerică. Pentru $n = 4$ considerăm endomorfismul f reprezentat prin matricea următoare în baza canonică $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ a spaţiului $\mathbb{K}^4$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aici $r = n = 4$; $\mathrm{im} f = Sp\{e_2, e_3, e_4\}$[1)] şi $\ker f = S_p\{e_2\}$, iar $S_1 = S_p\{e_1\}$, $S_2 = S_p\{e_3, e_4\}$, $S_3 = S_p\{e_2\}$. În baza $\{e_1, e_3, e_4, e_2\}$ – bază adaptată descompunerii în sumă directă $S = S_1 \oplus S_2 \oplus S_3$ – matricea endomorfismului f este

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

matrice de forma (1) – redusa *Jordan* a matricei iniţiale – unde $f_{21} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $f_{31} = (0)$, $f_{32} = (0\ 1)$. Matricea f_{22} este nilpotentă de indice 2, conform teoremei 3.

Subalgebre nilpotente nenule din $\mathcal{L}(\mathbb{K}_n)$

În această secţiune considerăm $S = \mathbb{K}^n$. $\mathcal{A}$ fiind o subalgebră nilpotentă, nenulă, de indice r, din $\mathcal{L}(S)$, notăm cu $I(\mathcal{A})$ subspaţiul vectorial generat de imaginile elementelor lui $\mathcal{A}$, $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ intersecţia nucleelor endomorfismelor din $\mathcal{A}$ şi cu $S_3 = I(\mathcal{A}) \cap \mathcal{K}(\mathcal{A})$.

Cu aceste notaţii avem:

Propoziţia 4. a) $I(\mathcal{A}) \neq S$, $S_3 \neq S$, $S_3 \neq \{0\}$.

b) *Mai mult,* $S_3 = I(\mathcal{A})$ *dacă şi numai dacă* $r = 2$.

Demonstraţie. a) Dacă r este indicele de nilpotenţă al subalgebrei $\mathcal{A}$, putem alege $r - 1$ elemente din $\mathcal{A}$, $A_1, A_2, \ldots, A_{r-1}$ astfel încât produsul $A = A_1 A_2 \ldots A_{r-1} \neq 0$ şi să avem, pentru orice $B \in \mathcal{A}$: $AB = BA = 0$. Deci $\mathrm{im} B \subseteq \ker A$, pentru orice $B \in \mathcal{A}$; din însăşi definiţia subspaţiului $I(\mathcal{A})$, deducem că $I(\mathcal{A}) \subseteq \ker A \subset S$. La fel $\mathrm{im} A \subset \ker B$, pentru orice $B \in \mathcal{A}$; deci $\mathrm{im} A \subseteq \mathcal{K}(\mathcal{A})$. Dar $A \in \mathcal{A}$, ceea ce implică $\mathrm{im} A \subseteq I(\mathcal{A})$. În final, avem $\{0\} \subset \mathrm{im} A \subset S_3$ (incluziunile fiind stricte).

b) Avem $S_3 = I(\mathcal{A})$ dacă şi numai dacă $\mathrm{im} B \subseteq \mathcal{K}(\mathcal{A})$, pentru orice $B \in \mathcal{A}$, deci dacă şi numai dacă $\mathrm{im} B \subseteq \ker C$, oricare ar fi $B, C \in \mathcal{A}$. Deducem imediat aserţiunea b).

Considerăm atunci $r \geq 3$ şi notăm:

S_1 un subspaţiu vectorial suplimentar spaţiului $I(\mathcal{A})$ – în raport cu S:

$$I(\mathcal{A}) \oplus S_1 = S;$$

S_2 un subspaţiu vectorial suplimentar spaţiului S_3 - în raport cu $I(\mathcal{A})$:

$$S_2 \oplus S_3 = I(\mathcal{A}).$$

Prin urmare avem $S = S_1 \oplus S_2 \oplus S_3$. Alegem o bază adaptată $\mathcal{B}$ pentru această sumă directă; ţinând seama de propoziţia 4 şi de definiţiile subspaţiilor S_i,

[1)] Prin $Sp\{\ldots\ldots\}$ este desemnat subspaţiul generat de familia de vectori indicată între acolade. În cazul în care aceasta este o bază, ordinea este esenţială. (N.R.)

$i \in \{1, 2, 3\}$, aceeaşi demonstraţie ca cea a teoremei 3 arată atunci că orice endomorfism $f \in \mathcal{A}$ admite, în baza $\mathcal{B}$, o matrice de forma

$$\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ f_{21} & f_{22} & 0 \\ f_{31} & f_{32} & 0 \end{pmatrix}.$$

Pentru $i \in \{2, 3\}$ şi $j \in \{1, 2\}$, notăm cu $\mathcal{A}_{ij}$ spaţiul vectorial $Sp\{f_{ij}\}$ când f parcurge $\mathcal{A}$. Avem, atunci:

Teorema 5. a) *$\mathcal{A}_{22}$ este o subalgebră nilpotentă din $\mathcal{L}(S_2)$ de indice r.*

b) *Mai mult, această subalgebră este nulă dacă şi numai dacă $r = 3$ (vezi teorema 8).*

Demonstraţie. a) Aplicaţia $\mathcal{A} \to \mathcal{L}(S_2)$, $f \mapsto f_{22}(f)$, este un morfism de algebre (aplicaţie liniară şi morfism pentru produsul intern). Imaginea $\mathcal{A}_{22}$ a acestui morfism este o subalgebră nilpotentă din $\mathcal{L}(S_2)$ de indice inferior sau egal cu r.

b) Fie $f \in \mathcal{A}$ oarecare. Avem $f_{22} = 0$ dacă şi numai dacă $f(I(\mathcal{A})) \subseteq \mathcal{K}(\mathcal{A})$, deci dacă şi numai dacă $f(\mathrm{im}A) \subseteq \ker B$, pentru orice $A, B \in \mathcal{A}$ (căci $f(I(\mathcal{A}))$ este generat de către $f(\mathrm{im}A)$ când f parcurge $\mathcal{A}$). Deci $f_{22} = 0$ dacă şi numai dacă, pentruu orice $A, B \in \mathcal{A}$, $BfA = 0$. Prin urmare avem $\mathcal{A}_{22} = \{0\}$ dacă şi numai dacă $r = 3$. Să demonstrăm prin inducţie teorema următoare:

Teorema 6. *Familia de endomorfisme $\{f \mid f \in \mathcal{A}\}$ este cotriangularizabilă, adică există o bază $\mathcal{B}'$ a spaţiului S astfel că oricare ar fi $f \in \mathcal{A}$, $\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}') = (\varphi_{ij})$, unde $\varphi_{ij} = 0$, pentru $i \leq j$ (matrice strict triangulară inferior).*

Demonstraţie. Fie $f \in \mathcal{A}$. Pentru $n = 2$ vezi prima parte. Presupunând rezultatul adevărat pentru $\dim S < n$, ne propunem să-l demonstrăm pentru $\dim S = n$. Dacă $r = 2$ se alege o bază a spaţiului S_1, care se completează cu o bază din $\mathrm{im}f$. Dacă $r \geq 3$ alegem o bază a spaţiului S_1, care se completează cu o bază din S_2 aleasă în aşa fel ca matricea $f_{22}(f)$ să fie strict triangulară inferior – o astfel de bază există ţinând seama de ipoteza de inducţie – şi cu o bază din S_3; obţinem astfel baza $\mathcal{B}'$. Teorema 6 este astfel demonstrată prin inducţie. Ea admite corolarul următor:

Corolarul 7. *Indicele de nilpotenţă r al subalgebrei $\mathcal{A}$ verifică relaţia $r \leq n$.*

Demonstraţie. Fie $\mathcal{B}' = \{e_1, e_2 \ldots, e_n\}$ o bază a spaţiului S în care matricile tuturor endomorfismelor aparţinând subalgebrei $\mathcal{A}$ sunt strict triangulare inferior. Fie $F_i = S_p(e_{i+1}, e_{i+2}, \ldots, e_n)$, pentru $i < n$ şi $F_n = \{0\}$. Pentru orice $f \in \mathcal{A}$ şi $i < n$, $f(F_i) \subseteq F_{i+1}$. Deci dacă $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sunt elemente oarecare al subalgebrei $\mathcal{A}$, avem $f_1 f_2 \ldots f_n(F_0) = 0$.

Conform teoremei 5 subalgebra $\mathcal{A}_{22}$ este nilpotentă. Dacă $r > 3$ avem mai mult:

Teorema 8. *Dacă $r > 3$, subalgebra $\mathcal{A}_{22}$ este nilpotentă de indice $r' = r - 2$.*

Demonstraţie. Fie $f_1, f_2, \ldots, f_{r-2}$ elemente ale subalgebrei $\mathcal{A}$. Ţinând seama de demonstraţia teoremei 5 b), avem pentru orice $A, B \in \mathcal{A}$,
$Bf_1 f_2 \ldots f_{r-2} A = 0$, deci $(f_1 f_2 \ldots f_{r-2})_{22} = 0$ cu notaţii evidente. Prin urmare

$$(f_1)_{22}(f_2)_{22} \ldots (f_{r-2})_{22} = 0.$$

Produsul a $r - 2$ elemente oarecare din subalgebra $\mathcal{A}_{22}$ este deci nul.

Pe de altă parte, alegând $A_1, A_2 \dots A_{r-1}$ elemente din $\mathcal{A}$ astfel încât produsul $A_1 A_2 \dots A_{r-1} \neq 0$ – astfel de elemente există căci indicele de nilpotenţă al lui $\mathcal{A}$ este r – avem $(A_2 \dots A_{r-2})_{22} \neq 0$, deci $(A_2)_{22} \dots (A_{r-2})_{22} \neq 0$. Am găsit deci $r-3$ elemente din $\mathcal{A}_{22}$ al cărui produs nu este nul. În final rezultă $r' = r-2$.

Pentru $r > 3$ teorema următoare şi corolarul său descriu unele proprietăţi ale matricilor (omomorfismelor) f_{ij}, $i \in \{2,3\}$; $j \in \{1,2\}$.

Teorema 9. *Pentru $r > 3$ au loc, cu notaţii evidente, următoarele aserţiuni:*

a) *Pentru orice $f \in \mathcal{A}$, avem $f_{22}(I(\mathcal{A}_{21})) \subseteq I(\mathcal{A}_{21})$.*

b) $I(\mathcal{A}_{21}) = \mathcal{S}_2$.

Demonstraţie. a) Fie $f \in \mathcal{A}$ şi $g \in \mathcal{A}$. Avem $(fg)_{21} = f_{22} \cdot g_{21}$. Deci $f_{22}(\mathrm{im} g_{21}) = \mathrm{im}(fg)_{21} \subseteq I(\mathcal{A}_{21})$, de unde $f_{22}(I(\mathcal{A}_{21})) \subseteq I(_{21})$.

b) Prin absurd, să presupunem că $I(\mathcal{A}_{21}) \neq \mathcal{S}_2$ şi fie $\mathcal{S}_2'$ un subspaţiu suplimentar al lui $I(\mathcal{A}_{21})$ în raport cu $\mathcal{S}_2$. Cum f este un element oarecare din $\mathcal{A}$ şi $I(\mathcal{A}_{21})$ este stabil pentru f_{22}, deducem că f_{22} este reprezentat prin matricea $\begin{pmatrix} A(f) & 0 \\ C(f) & D(f) \end{pmatrix}$, în descompunerea $\mathcal{S}_2 = \mathcal{S}_2' \oplus I(\mathcal{A}_{21})$. Pe de altă parte $f_{21}(\mathcal{S}_1) \subseteq I(\mathcal{A}_{21})$ şi, în descompunerea $S = \mathcal{S}_1 \oplus \mathcal{S}_2' \oplus I(\mathcal{A}_{21}) \oplus \mathcal{S}_3$, f este reprezentat de matricea-bloc următoare

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A(f) & 0 & 0 \\ E(f) & C(f) & D(f) & 0 \\ f_{31} & F(f) & G(f) & 0 \end{pmatrix}.$$

Fie q proiecţia pe $\mathcal{S}_2'$ paralelă cu $S_1 \oplus I(\mathcal{A}_{21}) \oplus S_3$.

Pentru $x \in \mathcal{S}$, $q(f(x)) = A(f)(q(x))$ şi deci $q(\mathrm{im} f) = \mathrm{im} A(f)$. Mulţimea $\mathcal{A}' = \{A(f) \mid f \in \mathcal{A}\}$ este o subalgebră nilpotentă din $\mathcal{S}_2'$ şi avem $q(I(\mathcal{A}) = I(\mathcal{A}')$. Dar $I(\mathcal{A}) = \mathcal{S}_2' \oplus I(\mathcal{A}_{21}) \oplus \mathcal{S}_3$ şi deci $q(I(\mathcal{A})) = \mathcal{S}_2'$ şi în final $I(\mathcal{A}') = \mathcal{S}_2'$, ceea ce contrazice rezultatul obţinut la propoziţia 4. Deducem $I(\mathcal{A}_{21}) = \mathcal{S}_2'$.

În cazul când presupunem că subalgebra $\mathcal{A}$ este comutativă, aserţiunea b) a acestei teoreme conduce la corolarul următor:

Corolarul 10. *Pentru $r > 3$, dacă f este un element al subalgebrei nilpotente comutative $\mathcal{A}$ astfel încât $f_{21} = 0$, atunci avem $f_{22} = 0$ şi $f_{32} = 0$. În schimb f_{31} nu este obligatoriu nul.*

Demonstraţie. Fie $f \in \mathcal{A}$ astfel încât $f_{21}(f) = 0$ şi $g \in \mathcal{A}$. Din egalitatea $fg = gf$, deducem $f_{22}g_{21} = 0$ şi $f_{32}g_{21} = 0$, de unde $\mathrm{Im} g_{21} \subseteq \ker f_{22}$ şi $\mathrm{Im} g_{21} \subseteq \ker f_{32}$. Dar ţinând seama de aserţiunea b) din teorema precedentă, subspaţiile $\mathrm{Im} g_{21}$ generează spaţiul $\mathcal{S}_2$ când g parcurge $\mathcal{A}$. Prin urmare $f_{22} = 0$ şi $f_{32} = 0$.

Considerăm subalgebra $\mathcal{A}$ generată de endomorfismul f studiat în cadrul exemplului numeric din text. În baza $\{e_1, e_3, e_4, e_2\}$ – bază adaptată descompunerii în sumă directă $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \oplus \mathcal{S}_2 \oplus \mathcal{S}_3$ – endomorfismul $f' = f^3$ este reprezentat de matricea

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

pentru care $f'_{21} = 0$, $f'_{22} = 0$, $f'_{32} = 0$, dar $f'_{31} \neq 0$ ceea ce încheie demonstraţia corolarului.

Centrul de calcul E.N.S.T, Paris
Adrien.Reisner@enst.fr

PROBLEME PROPUSE

238. Fie G un grup aditiv abelian, iar $f : G \to \mathbb{R}$ o aplicaţie cu proprietatea că

$$f(x+y) + f(x-y) \leq 2f(x) + 2f(y), \qquad \forall\, x \in G.$$

Notăm $M = \{m \in \mathbb{N} \mid m > 1,\ f(mx) = m^2 f(x),\ \forall\, x \in G\}$. Să se arate că dacă $M = \emptyset$, atunci $\inf M = 2$. (În legătură cu problema **234**.)

Dan Radu

239. Se ştie că orice divizor prim q al unui număr *Fermat* $F_n = 2^{2^n} + 1$ este de forma $2^{2n+2}k + 1$ (k fiind un număr natural). Fie q un asemenea divizor al lui F_n, astfel încât q^2 nu divide pe F_n şi k este impar.

Atunci $2^{q-1} \not\equiv 1 \pmod{q^2}$ şi ordinul clasei lui 2 în $\mathbb{Z}_{q^2}$ se divide cu q.

Marian Tetiva

240. Fie a, b şi x numere pozitive astfel încât $x = \sqrt{ab} \geq 1$. Să se arate că, pentru orice k număr natural, are loc inegalitatea

$$\frac{1}{1 + a + \ldots + a^k} + \frac{1}{1 + b + \ldots + b^k} \geq \frac{2}{1 + x + \ldots + x^k}\,.$$

Vasile Cîrtoaje

241. Să se determine $\alpha \in \mathbb{R}$ ştiind că

$$L = \lim_{n\to\infty} n^{\alpha} \int\limits_0^1 \sin^{2n} \frac{\pi x}{2}\,\mathrm{d}x \in (0, \infty).$$

Să se calculeze L în acest caz.

Gheorghe Szöllösy

242. Să se arate că

a) $r_a^n \sin \dfrac{A}{2} + r_b^n \sin \dfrac{B}{2} + r_c^n \sin \dfrac{C}{2} \geq \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{p\sqrt{3}}{3}\right)^n, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*;$

b) $2(4R + r(^2(2R - r) \geq p^2(11R - 4r)$,

unde notaţiile sunt cele uzuale într-un triunghi.

Nicuşor Minculete

218. *Fie $a, b, c \in \mathbb{Z}$ astfel încât $b^2 - 4ac$ nu este pătrat perfect. Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, există n numere naturale consecutive care nu se pot reprezenta sub forma $(ax^2 + bxy + cy^2)^z$, cu x, y, z numere întregi şi $z > 0$.*

Gabriel Dospinescu

Soluţie dată de *Marian Tetiva*, profesor la Colegiul Naţional Gheorghe Roşca-Codreanu din Bârlad. Vom demonstra mai întâi două rezultate ajutătoare.

Lemă. *Fie D un număr întreg care nu este pătrat perfect. Există atunci o infinitate de numere (naturale) prime q astfel încât D nu este rest pătratic modulo q.*

În demonstraţie vom folosi celebra teoremă a lui *Dirichlet*, conform căreia orice progresie aritmetică, al cărei prim termen este prim cu raţia, conţine o infinitate de numere prime, precum şi proprietăţile simbolului lui *Legendre* $\left(\frac{m}{p}\right)$ (egal cu 1 sau -1, după cum întregul m este, respectiv nu este, rest pătratic modulo numărul prim p):

$$\left(\frac{m_1 m_2}{p}\right) = \left(\frac{m_1}{p}\right)\left(\frac{m_2}{p}\right), \quad \left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}, \quad \left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$$

şi legea reciprocităţii pătratice a lui *Gauss*:

$$\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}\left(\frac{q}{p}\right)$$

(toate pot fi găsite în orice carte de teoria elementară a numerelor). De asemenea, ne va mai trebui şi teorema chineză a resturilor: *dacă $m_1, \ldots, m_s$ sunt numere întregi pozitive prime între ele două câte două, atunci, pentru orice numere întregi $a_1, \ldots, a_s$, sistemul de congruenţe $x \equiv a_1 \pmod{m_1}, \ldots, x \equiv a_s \pmod{m_s}$ are soluţii; mai mult, orice două soluţii sunt congruente modulo $m_1 \cdots m_s$, ceea ce ne mai conduce la observaţia simplă că, dacă a_i este prim cu m_i pentru fiecare $1 \leq i \leq s$, atunci soluţiile sunt termenii unei progresii aritmetice care are primul termen şi raţia prime între ele: adică sistemul de congruenţe are chiar o infinitate de soluţii numere prime.*

Trecem acum la demonstraţia propriu-zisă.

Dacă D este pozitiv el nu poate fi 0 sau 1, deci se descompune ca produs de factori primi şi, cum D nu este pătrat perfect, măcar unul dintre aceşti factori apare cu exponent impar în descompunerea sa în produs de factori primi. Fie $p_1, \ldots, p_s$ factorii primi al căror exponent în factorizarea lui D este impar şi q un număr prim diferit de toţi $p_1, \ldots, p_s$ (şi, de fapt, trebuie ales diferit de toţi factorii primi ai lui D); se vede imediat că avem:

$$\left(\frac{D}{q}\right) = \left(\frac{p_1}{q}\right)\cdots\left(\frac{p_s}{q}\right).$$

Se pot ivi două situaţii:

i) Dacă toţi $p_1, \ldots, p_s$ sunt impari, avem (conform legii reciprocităţii pătratice):

$$\left(\frac{D}{q}\right) = (-1)^{\frac{q-1}{2}\left(\frac{p_1-1}{2}+\cdots+\frac{p_s-1}{2}\right)}\left(\frac{q}{p_1}\right)\cdots\left(\frac{q}{p_s}\right).$$

Este suficent să alegem pe q soluţie a sistemului de congruenţe

$$q \equiv 1 \pmod 4, \qquad q \equiv 1 \pmod{p_j}, \qquad 1 \leq j \leq s-1, \quad q \equiv r \pmod{p_s},$$

r fiind un nerest pătratic modulo p_s (există întotdeauna aşa ceva), pentru a obţine $\left(\frac{D}{q}\right) = -1$, iar observaţiile de mai sus arată că există o infinitate de numere prime q care sunt soluţii ale tuturor acestor congruenţe (numere faţă de care D nu este rest pătratic).

ii) Dacă unul dintre numerele $p_1, \ldots, p_s$ este 2 (şi atunci, desigur, celelalte sunt impare – sau chiar nu mai sunt deloc, căci se poate ca în descompunerea lui D în produs de factori primi să fie doar unul cu exponent impar), să zicem $p_1 = 2$, obţinem

$$\left(\frac{D}{q}\right) = (-1)^{\frac{q^2-1}{8}}(-1)^{\frac{q-1}{2}\left(\frac{p_2-1}{2}+\cdots+\frac{p_s-1}{2}\right)}\left(\frac{q}{p_2}\right)\cdots\left(\frac{q}{p_s}\right).$$

În acest caz, ca să obţinem $\left(\dfrac{D}{q}\right) = -1$, alegem pe q astfel încât să verifice sistemul de congruenţe

$$q \equiv 5 \,(\mathrm{mod}\ 8), \quad q \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\ p_j), \qquad 2 \le j \le s$$

(care, iarăşi, are o infinitate de soluţii numere prime).

Pentru D negativ avem următoarele cazuri:

i) Dacă $|D|$ este pătrat perfect, avem

$$\left(\frac{D}{q}\right) = \left(\frac{-1}{q}\right) = (-1)^{\frac{q-1}{2}} = -1,$$

de îndată ce $q \equiv 3(\mathrm{mod}\ 4)$.

ii) Se poate ca D să aibă şi factori primi la putere impară, fie ei $p_1, \ldots, p_s$ şi toţi aceşti factori să fie impari. Avem acum

$$\left(\frac{D}{q}\right) = (-1)^{\frac{q-1}{2}}(-1)^{\frac{q-1}{2}\left(\frac{p_1-1}{2}+\cdots+\frac{p_s-1}{2}\right)}\left(\frac{q}{p_1}\right)\cdots\left(\frac{q}{p_s}\right)$$

şi vedem că alegerea lui q astfel încât să verifice

$$q \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\ 4), \quad q \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\ p_j), \quad 1 \le j \le s-1, \quad q \equiv r \,(\mathrm{mod}\ p_s)$$

r fiind nerest pătratic modulo p_s (aceeaşi alegere ca în primul caz de mai sus), conduce iar la $\left(\dfrac{D}{q}\right) = -1$.

iii) Sau este posibil ca D să aibă şi factori primi la putere impară, fie ei $p_1, \ldots, p_s$, iar unul dintre aceşti factori să fie 2, de exemplu $p_1 = 2$ şi $p_2, \ldots, p_s$ sunt impari (sau chiar nu mai apar deloc). Avem acum (asemănător cu al doilea caz de mai sus)

$$\left(\frac{D}{q}\right) = (-1)^{\frac{q-1}{2}}(-1)^{\frac{q^2-1}{8}}(-1)^{\frac{q-1}{2}\left(\frac{p_2-1}{2}+\cdots+\frac{p_s-1}{2}\right)}\left(\frac{q}{p_2}\right)\cdots\left(\frac{q}{p_s}\right)$$

şi, tot ca acolo, dacă q verifică

$$q \equiv 5 \,(\mathrm{mod}\ 8), \quad q \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\ p_j), \quad 2 \le j \le s,$$

atunci $\left(\dfrac{D}{q}\right) = -1$.

Oricum ar fi, se vede că există o infinitate de numere prime q astfel încât D să nu fie rest pătratic modulo q, iar lema ce urmează ne arată o proprietate a acestor numere (legată de reprezentarea numerelor în forma din enunţ) pe care o putem folosi pentru soluţionarea problemei.

Lema 2. *Fie a, b, c numere întregi astfel încât $D = b^2 - 4ac$ nu este pătrat perfect şi fie q un număr prim faţă de care D nu este rest pătratic şi care nu-l divide pe a (existenţa acestor numere este asigurată de prima lemă). Fie, de asemenea, x, y, z numere întregi, $z > 0$, astfel încât q divide pe $(ax^2 + bxy + cy^2)^z$. Atunci q^2 divide pe $(ax^2 + bxy + cy^2)^z$.*

Demonstraţie. Fiindcă q este număr prim, $q|(ax^2+bxy+cy^2)^z$ implică $q|(ax^2+bxy+cy^2)$, sau

$$ax^2 + bxy + cy^2 \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ q).$$

Să presupunem că y nu este divizibil cu q, ceea ce implică existenţa unui $t \in \mathbb{Z}$ astfel încât $ty \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ q)$. Congruenţa de mai sus conduce imediat la

$$(2ax + by)^2 \equiv Dy^2 \,(\mathrm{mod}\ q),$$

iar dacă aici înmulţim cu t^2, obţinem

$$((2ax + by)t)^2 \equiv D \,(\mathrm{mod}\ q),$$

ceea ce ar însemna că D este rest pătratic modulo q, fals! Contradicţia obţinută ne arată că y se divide cu q. Rezultă de aici şi din $q|(ax^2 + bxy + cy^2)$ că $q|ax^2$, deci (deoarece q nu divide pe a) $q|x$; evident, $q|x$ şi $q|y$ implică $q^2|(ax^2 + bxy + cy^2)$ şi, cu atât mai mult, $q^2|(ax^2 + bxy + cy^2)^z$.

Abia acum putem trece la rezolvarea problemei **218**; fie $q_1, q_2, \ldots$ şirul numerelor care au proprietatea din lema 2 pentru $D = b^2 - 4ac$. Se poate reformula concluzia acestei leme astfel: dacă un număr natural se divide cu vreun număr q_k din acest şir, dar nu şi cu q_k^2, atunci el nu poate fi reprezentat în forma $(ax^2+bxy+cy^2)^z$, cu x,y,z numere întregi, $z>0$. Să considerăm un număr natural oarecare n şi sistemul de congruenţe:

$$x \equiv q_1 - 1 \pmod{q_1^2}, \quad x \equiv q_2 - 2 \pmod{q_2^2}, \quad \ldots, \quad x \equiv q_n - n \pmod{q_n^2};$$

din nou pe baza lemei chineze a resturilor, acest sistem are o infinitate de soluţii (iar x cu aceste proprietăţi poate fi ales oricât de mare, adică poate fi ales număr natural). Este clar atunci că fiecare din numerele $x+1,\ldots,x+n$ are un divizor din şirul $q_1,q_2,\ldots$ cu al cărui pătrat nu se divide, deci nici unul din aceste n numere naturale consecutive nu se poate exprima în forma $(ax^2+bxy+cy^2)^z$, cu x,y,z numere întregi, $z>0$. Iar n poate fi ales oricât de mare, deoarece şirul numerelor $q_1,q_2,\ldots$ este infinit (cum spune lema 1).

Observaţie. Rezultatul este bine cunoscut pentru reprezentări de forma x^2+y^2; nu am făcut decât să generalizăm demonstraţia din acest caz particular ($a=1,b=0,c=1$), cheia constituind-o lema 1 (mai departe lema 2 şi demonstraţia propriu-zisă se fac prin analogie). Surprinzător, dar rezultatul lemei 1 nu pare să fie cuprins în cărţi uzuale de teoria numerelor (nu în cele consultate de noi), deşi este un rezultat la care ne-am putea aştepta. Fără îndoială însă că undeva trebuie să apară.

219. *Fie G un grup multiplicativ de matrici peste corpul comutativ $\mathbb{K}$.*

a) *Să se arate că toate matricile lui G sunt, în mod necesar, pătratice şi au acelaşi ordin.*

b) *Să se arate că unitatea lui G nu coincide, în mod obligatoriu, cu matricea unitate, dar, dacă acest lucru se întâmplă, atunci G este un subgrup al grupului* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. *Să se construiască astfel de exemple în cazul lui* $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

c) *Să se arate că matricile din G sunt fie toate nesingulare (în care caz G este subgrup al grupului* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$), *fie toate singulare.*

d) *Vom spune că o matrice A este o matrice de grup dacă există un grup G astfel încât $A\in G$. Să se arate că orice matrice idempotentă este o matrice de grup şi nici o matrice nilpotentă nu este o matrice de grup. Să se precizeze care din următoarele matrici sunt matrici de grup*:

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix};\ C=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix};$$

$$D=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix};\ E=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}.$$

e) *Să se arate că dacă A este o matrice de grup şi $B\approx A$, atunci B este o matrice de grup.*

f) *Să se arate că dacă A este o matrice de grup, atunci A şi A^2 au acelaşi rang.*

Dan Radu

Soluţie dată de *Marian Tetiva*, profesor la Colegiul Naţional Gheorghe Roşca-Codreanu din Bârlad. a) Acest punct este evident: dacă $A\in G$ are m linii şi n coloane, trebuie să avem $m=n$ pentru a putea face produsul $A\cdot A$, care trebuie să fie, de asemenea, o matrice din G; astfel că toate matricile din G trebuie să fie pătratice. Iar atunci, pentru a le putea înmulţi una cu alta, trebuie să aibă toate acelaşi ordin n.

b) Matricile de ordinul al doilea (dar nu obligatoriu: se poate construi un exemplu similar cu matrici de un ordin n oarecare) de forma

$$\begin{pmatrix}a&0\\0&0\end{pmatrix}, a\in\mathbb{K}^*,$$

formează un grup în raport cu operaţia indusă de înmulţirea matricilor din $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, după cum se verifică uşor. Elementul neutru al acestui grup este matricea

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$$

(1 fiind unitatea multiplicativă a lui $\mathbb{K}$), diferită de matricea unitate

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

Pe de altă parte, matricile de forma

$$\begin{pmatrix}a&0\\0&a\end{pmatrix}, a\in\mathbb{K}^*,$$

formează un grup (izomorf cu $\mathbb{K}^*$, la fel cu cel definit anterior; prin $\mathbb{K}^*$ înţelegem $\mathbb{K}$ fără elementul neutru 0 al adunării lui $\mathbb{K}$) care are, de astă dată, ca element neutru exact matricea unitate (şi exemplul analog funcţionează pentru matrici de ordin n). Aşa că există grupuri de matrici care au matricea unitate ca element neutru şi altele care nu.

Să presupunem acum că $G \subseteq \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ este un grup multiplicativ de matrici care are matricea unitate de ordin n (pe care o numim I_n) drept element neutru. Atunci, pentru orice $A \in G$ există $A' \in G$ astfel încât $AA' = A'A = I_n$. Dar ştim că inversa lui A în sensul obişnuit (adică inversa A^{-1} în $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$) este singura matrice B de ordin n cu proprietatea că $AB = BA = I_n$, deci A' trebuie să coincidă cu A^{-1}; aşadar, inversul oricărui element al lui G este acelaşi cu inversul său în $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, prin urmare G este subgrup al lui $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. De altfel, această proprietate este generală: dacă H este grup, $G \subseteq H$ este grup în raport cu operaţia indusă (de operaţia lui H pe G), iar elementul neutru al lui G este acelaşi cu elementul neutru al lui H, atunci G este subgrup în H (demonstraţia faptului că inversul fiecărui element din G coincide cu inversul său din H fiind exact aceeaşi).

c) Să presupunem întâi că există în G o matrice singulară A_0. Atunci (G este grup), pentru fiecare $A \in G$, există $B \in G$ astfel încât $A = A_0B$; trecând la determinanţi avem $\det(A) = \det(A_0B) = \det(A_0)\det(B) = 0$, deci şi A este singulară; cum A a fost aleasă arbitrar în G, rezultă că în acest caz toate matricile din G sunt singulare.

Dacă toate matricile lui G sunt nesingulare, ele sunt inversabile în $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (se află în $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$). Să presupunem că E este elementul neutru al lui G; atunci E trebuie să fie o matrice inversabilă care verifică $E^2 = E$. Considerând această egalitate în $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ şi înmulţind-o (nu contează dacă la stânga sau la dreapta) cu E^{-1}, obţinem $E = I_n$ (E este matricea unitate de ordin n), de unde concluzia că G este subgrup în $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ este imediată.

d) Evident, dacă A este idempotentă (i.e. $A^2 = A$), mulţimea formată numai din A este grup faţă de înmulţirea matricilor, deci A este matrice de grup.

Pe de altă parte, o matrice nilpotentă este o matrice nenulă A, pentru care există $p \geq 2$ astfel încât $A^p = O_n$; dacă ar exista un grup G care să conţină pe A, acesta ar trebui să conţină, odată cu A, şi orice putere a sa, în particular pe A^p; adică G ar trebui să conţină matricea nulă. Dar atunci

$$G = O_nG = \{O_nX | X \in G\} = \{O_n\},$$

deci G trebuie să fie format numai din matricea nulă, ceea ce contrazice faptul că A este nenulă. Această contradicţie arată că matricele nilpotente nu au cum să fie matrici de grup.

Apoi vedem că matricele A şi C sunt idempotente, deci sunt matrici de grup. B este matricea unitate de ordinul al doilea, deci face parte din orice subgrup al lui $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Matricea D este nilpotentă ($D^2 = O_2$), deci nu este matrice de grup.

În sfârşit, pentru E observăm că

$$E^2 = \begin{pmatrix} 1+1 & 1+1 \\ 1+1 & 1+1 \end{pmatrix} = O_2,$$

în cazul în care corpul $\mathbb{K}$ are caracteristica 2 (adică $1 + 1 = 0$ în $\mathbb{K}$), deci în acest caz E nu este matrice de grup.

Pe de altă parte, dacă $1 + 1 \neq 0$ în $\mathbb{K}$, se verifică uşor că mulţimea matricelor de forma

$$\begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{K}^*,$$

este grup în raport cu înmulţirea matricilor din $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ (grup ce conţine, desigur, pe E). Elementul neutru al acestui grup este matricea

$$\begin{pmatrix} (1+1)^{-1} & (1+1)^{-1} \\ (1+1)^{-1} & (1+1)^{-1} \end{pmatrix}$$

(putem considera inversul lui $1 + 1$, deoarece este nenul), iar simetrica matricii

$$\begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{K}^*,$$

este

$$\begin{pmatrix} (1+1)^{-2}x^{-1} & (1+1)^{-2}x^{-1} \\ (1+1)^{-2}x^{-1} & (1+1)^{-2}x^{-1} \end{pmatrix}.$$

În concluzie, E nu este, respectiv este matrice de grup după cum caracteristica lui $\mathbb{K}$ este, respectiv nu este egală cu 2.

e) Fie T o matrice din $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ astfel încât $B = T^{-1}AT$. Dacă presupunem că A aparţine grupului de matrici G, atunci B aparţine grupului de matrici

$$T^{-1}GT = \{T^{-1}XT | X \in G\}$$

(faptul că acesta e grup se verifică imediat).

f) Este binecunoscut faptul că rangul produsului a două matrici este cel mult egal cu rangul fiecărui factor; în particular, rangul matricii A^2 este mai mic decât sau egal cu rangul lui A, fapt valabil pentru orice matrice pătratică A. Dacă, în plus, A este şi matrice de grup şi G este grupul din care A face parte, avem şi $A^2 \in G$ şi trebuie să existe $B \in G$ astfel încât $A = A^2B$. Atunci avem şi inegalitatea pe dos $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(A^2B) \leq \mathrm{rang}(A^2)$, de unde concluzia că $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(A^2)$.

Observaţie. *Gabriel Dospinescu* m-a informat despre valabilitatea reciprocei afirmaţiei de la ultimul punct al problemei. Cu alte cuvinte, dacă A este o matrice pătratică astfel încât $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(A^2)$, atunci A face parte dintr-un grup multiplicativ de matrici. În esenţă, demonstraţia ar fi cam aşa. Ipoteza implică imediat egalitatea spaţiilor $\ker(A)$ şi $\ker(A^2)$, precum şi a spaţiilor $\mathrm{im}(A)$ şi $\mathrm{im}(A^2)$ (considerăm pe A nu numai ca matrice, ci şi ca morfism de la $\mathbb{K}^n$ la $\mathbb{K}^n$, $x \mapsto Ax$). De exemplu avem $\ker(A) \subseteq \ker(A^2)$, iar dimensiunile celor două subspaţii sunt egale (ambele sunt $n-\mathrm{rang}(A) = n-\mathrm{rang}(A^2)$); evident, asta duce la $\ker(A) = \ker(A^2)$ (analog procedăm pentru imagini). Mai departe se vede că suma dintre $\ker(A)$ şi $\mathrm{im}(A)$ este directă (dacă $x = Ay$, cu $Ax = O$, rezultă $A^2y = O$, deci $y \in \ker(A^2) = \ker(A)$ şi atunci $x = Ay = O$, etc). Luând în considerare şi suma dimensiunilor acestor subspaţii (care este n) rezultă că întregul spaţiu $\mathbb{K}^n$ este suma directă dintre $\ker(A)$ şi $\mathrm{im}(A)$. Atunci matricea lui A, într-o bază corespunzătoare acestei descompuneri, este formată dintr-un bloc de dimensiune $r = \mathrm{rang}(A)$ care este matrice inversabilă de ordin r (pe care-l putem considera plasat în colţul din stânga sus) şi restul elementelor nule. Prin urmare A aparţine grupului matricelor de forma $P^{-1}XP$, unde P este matricea de trecere de la baza canonică la acea bază în care A are forma descrisă mai sus, iar X parcurge matricele de această formă (practic, grupul matricelor X – şi, odată cu el şi grupul în care se situează A – este izomorf cu $\mathrm{GL}_r(\mathbb{K})$).

Din acest punct de vedere putem reconsidera şi răspunsul la întrebarea privind matricea E de mai sus; e suficient să observăm că rangul matricii E^2 este egal cu rangul lui E atunci şi numai atunci când caracteristica lui $\mathbb{K}$ este diferită de 2.

220. *Să se determine o funcţie polinomială cu coeficienţi reali $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, care admite un punct fix $x_0 \in \mathbb{R}$ şi care comută (în sensul compunerii) cu o funcţie injectivă fără puncte fixe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.*

Andrei Vernescu

Soluţie dată de *Marian Tetiva*, profesor la Colegiul Naţional Gheorghe Roşca-Codreanu din Bârlad. O asemenea funcţie este $p(x) = x^3$; ea are trei puncte fixe, pe -1, 0 şi 1 şi se poate vedea imediat că $p(x) \in \{-1, 0, 1\} \Leftrightarrow x \in \{-1, 0, 1\}$. Această observaţie ne va ajuta să demonstrăm că p comută cu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{pentru} \quad x \in \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\} \\ 0, & \text{pentru} \quad x = -1 \\ 1, & \text{pentru} \quad x = 0 \\ -1, & \text{pentru} \quad x = 1. \end{cases}$$

Într-adevăr, pentru $x \in \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$, avem $p(x) \in \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$ şi, de asemenea, $f(x) \in \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$, deci:

$$p(f(x)) = p(-x) = -x^3 = -p(x) = f(p(x));$$

în plus:

$$p(f(-1)) = p(0) = 0 = f(-1) = f(p(-1))$$

şi analog se verifică relaţiile $p(f(0)) = f(p(0))$ şi $p(f(1)) = f(p(1))$. Până la urmă avem deci $p(f(x)) = f(p(x))$, pentru orice x real (iar f este injectivă şi fără puncte fixe). Dacă vrem ca punctul fix să fie neapărat un $x_0 \in \mathbb{R}$ (nenul, căci pentru $x_0 = 0$ am văzut deja exemplul), n-avem decât să luăm $p(x) = x^3/x_0^2$, pentru care există f injectivă şi fără puncte fixe definită prin:

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{pentru} \quad x \in \mathbb{R} - \{-x_0, 0, x_0\} \\ 0, & \text{pentru} \quad x = -x_0 \\ x_0, & \text{pentru} \quad x = 0 \\ -x_0, & \text{pentru} \quad x = x_0 \end{cases}.$$

astfel încât $p(f(x)) = f(p(x))$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Un exemplu mai general se poate obţine după cum urmează. Considerăm o funcţie polinomială care are punctele fixe $x_1, x_2, \ldots, x_n$ şi astfel încât, pentru fiecare $1 \leq j \leq n$, ecuaţia $P(x) = x_j$ are exact soluţiile (distincte) $y_{1j}, \ldots, y_{m-1,j}, y_{mj} = x_j$ (acelaşi număr m de soluţii pentru fiecare j). Mai considerăm o funcţie $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care comută cu p: $p(\varphi(x))) = \varphi(p(x))$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ şi o permutare σ a mulţimii $\{1, \ldots, n\}$. Funcţia căutată va fi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \varphi(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ diferit de toate numerele y_{ij} şi prin

$$f(y_{ij}) = y_{i\sigma(j)},$$

pentru orice $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$; verificarea relaţiei $p \circ f = f \circ p$ se face exact ca mai sus.

Nu întâmplător am dat asemenea exemplu, condiţiile enunţului îl forţează. Într-adevăr, în primul rând observăm că, dacă x_0 este punct fix pentru p (care comută cu f, ca în enunţ), atunci şi $f(x_0)$ are aceeaşi proprietate:

$$p(f(x_0)) = f(p(x_0)) = f(x_0),$$

deci inductiv deducem că $f^{[n]}(x_0) = (\underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{\text{de } n \text{ ori}})(x_0)$ este punct fix pentru p, oricare ar fi $n \geq 1$. Dacă şirul $(f^{[n]}(x_0))$ ar avea toţi termenii distincţi, p ar avea o infinitate de puncte fixe, deci ar rezulta, în mod necesar, $p(x) = x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ (şi putem declara neinteresant acest exemplu banal); aşa că putem presupune că există $s > t$ numere naturale astfel încât $f^{[s]}(x_0) = f^{[t]}(x_0)$. Atunci injectivitatea lui f conduce la $f^{[s-t]}(x_0) = x_0$, deci pentru orice punct fix x_0 al lui p există un număr natural k astfel încât $f^{[k]}(x_0) = x_0$. (Se mai poate vedea şi că acest k trebuie să fie cel puţin 2, altfel f ar avea punct fix, ceea ce nu dorim; deci p trebuie să aibă cel puţin două puncte fixe.) În particular asta arată că orice punct fix al lui p trebuie să fie valoare a funcţiei f.

Mai observăm că, dacă x_0 este punct fix pentru f şi y_0 este astfel încât $p(y_0) = p(x_0) = x_0$, atunci şi $p(f(y_0)) = f(p(y_0)) = f(x_0)$, deci dacă ecuaţia $p(x) = x_0$ are m soluţii reale, atunci ecuaţia $p(x) = f(x_0)$ are m_1 soluţii reale şi $m_1 \geq m$ (iar am folosit că f este injectivă). Mai departe deducem tot aşa că ecuaţiile $p(x) = f^{[2]}(x_0), \ldots, p(x) = f^{[k-1]}(x_0), p(x) = f^{[k]}(x_0)$ au $m_2, \ldots, m_{k-1}, m_k$ soluţii respectiv şi $m \leq m_1 \leq m_2 \leq \cdots \leq m_k$. Dar ultima ecuaţie este, de fapt, $p(x) = x_0$, deci $m_k = m$ şi astfel obţinem că $m = \cdots = m_{k-1}$, deci că toate ecuaţiile au acelaşi număr de soluţii. Iată de ce exemplul dat (cel general) are înfăţişarea pe care am văzut-o.

Dar mai mult de atât nu cred că se poate face, deoarece nu avem nici un control asupra funcţiilor φ care comută cu o funcţie polinomială oarecare. Se poate vedea acum că exemplul de la începutul soluţiei a fost construit pornind de la $\varphi(x) = -x$ (care comută cu $p(x) = x^3$), dar puteam găsi şi alte funcţii injective cu această proprietate, de pildă $\varphi(x) = x^{2q+1}$, cu q număr natural (şi probabil că mai sunt şi altele). Iată de ce nu credem că se pot determina cumva *toate* funcţiile polinomiale p cu proprietatea din enunţ.

Desigur, ar mai fi şi problema existenţei unei funcţii polinomiale având proprietăţile de mai sus. Cel puţin în cazul $m = 1$ (fiecare ecuaţie $p(x) = x_j$ să aibă soluţie unică) am reuşit să construim un asemenea exemplu (şi nu e prea greu de realizat) şi credem că se poate oricând.

Notele Redacţiei. 1. În cazul particular în care injectivitatea funcţiei f este realizată prin condiţia mai restrictivă că f este strict crescătoare, mulţimea soluţiilor se restrânge la cea formată numai din funcţia polinomială $p(x) = x$ (aplicaţia identică a mulţimii numerelor reale $\mathbb{R}$).

Într-adevăr, definind şirul de numere reale $(x_n)_n$ prin egalităţile:

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1}$$

observăm întâi că $x_1 \neq x_0$, deoarece egalitatea $x_1 = x_0$ ar echivala cu $f(x_0) = x_0$, ceea ce contrazice faptul că funcţia f nu admite puncte fixe.

Apoi, dacă $x_0 < x_1$, atunci printr-un raţionament elementar de inducţie (de altfel, binecunoscut din teoria şirurilor recurente!) se obţine că şirul $(x_n)_n$ este strict crescător; analog, dacă

$x_0 > x_1$, atunci şirul este strict descrescător. Aşadar termenii şirului $(x_n)_n$ sunt distincţi doi câte doi (şirul este injectiv).

Afirmăm acum că

$$p(x_n) = x_n, \tag{2}$$

pentru orice $n = 0, 1, 2, \ldots$ Într-adevăr, pentru $n = 0$, afirmaţia este verificată, din enunţ, deoarece x_0 este punct fix pentru funcţia polinomială p. Să presupunem acum că, pentru un n oarecare, avem $p(x_n) = x_n$. Atunci, ţinând seama de (1), de comutativitatea din enunţ şi de ipoteza de inducţie, rezultă:

$$p(x_{n+1}) = p(f(x_n)) = f(p(x_n)) = f(x_n) = x_{n+1},$$

adică $p(x_{n+1}) = x_{n+1}$.

De aici decurge că funcţia polinomială $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $q(x) = p(x) - x$ admite ca rădăcini toţi termenii şirului injectiv $(x_n)_n$, adică admite o infinitate (numărabilă) de rădăcini, deci este funcţia polinomială identic nulă. Aşadar, $p(x) = x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

2. O soluţie corectă a problemei a mai dat şi domnul *Marius Olteanu*, inginer la S. C. Hidroconstrucţia S.A. Bucureşti, sucursala „Olt-Superior" din Râmnicu-Vâlcea.

221. *Fie $n \geq 1$ un număr natural. Să se arate că mulţimea:*

$$\{n+1, n+2, \ldots, 2n\}$$

se poate partiţiona în patru submulţimi, fiecare cu aceeaşi sumă a elementelor, dacă şi numai dacă n este multiplu de 8 sau n este un număr de forma $8k+5$, unde $k \geq 1$ este număr natural.

Marian Tetiva

Soluţia autorului. Necesitatea condiţiilor decurge în mod, oarecum, natural. Dacă notăm cu s suma elementelor din fiecare din cele patru submulţimi ale partiţiei (presupunând că o asemenea partiţie există), trebuie să avem, evident

$$(n+1) + (n+2) + \cdots + (n+n) = 4s,$$

adică

$$\frac{n(3n+1)}{2} = 4s,$$

deci $\dfrac{n(3n+1)}{8} = s$ trebuie să fie număr natural, adică trebuie ca 8 să dividă produsul $n(3n+1)$. Este clar că n şi $3n+1$ sunt întotdeauna numere de parităţi diferite, deci de aici obţinem fie că $8|n$, fie că $8|(3n+1)$, ceea ce se dovedeşte imediat a fi echivalent cu faptul că n dă restul 5 la împărţirea cu 8, sau $n = 8k+5$, k fiind un număr natural. În acest al doilea caz nu putem avea, totuşi $n = 5$ ($k = 0$) deoarece mulţimea $\{6, 7, 8, 9, 10\}$ nu poate fi partiţionată conform cerinţei enunţului (suma s ar trebui să fie 10 şi, evident, nici un element – în afară de 10 – nu poate fi grupat cu altul – sau altele – ca să dea această sumă), deci $k \geq 1$.

Ne mai rămâne să demonstrăm că, pentru n de forma $8k$ sau $8k+5$ ($k \geq 1$ număr natural), împărţirea cerută se poate realiza.

Aceasta este destul de simplu pentru $n = 8k$. Avem

$$\{8k+1, 8k+2, \ldots, 16k\} = \{8k+1, 16k\} \cup \{8k+2, 16k-1\} \cup \cdots \cup \{12k, 12k+1\},$$

adică o partiţie a mulţimii $\{8k+1, 8k+2, \ldots, 16k\}$ în $4k$ clase, fiecare având două elemente şi fiecare având aceeaşi sumă a elementelor. Reunind arbitrar câte k din aceste $4k$ submulţimi (dar astfel încât fiecare să fie luată în considerare) obţinem, evident partiţia cerută (fiecare clasă va avea $2k$ elemente, a căror sumă este $k(24k+1)$).

Mai departe considerăm $n = 8k+5$; trebuie să arătăm cum se poate partiţiona mulţimea

$$M = \{8k+6, 8k+7, \ldots, 16k+10\}$$

în 4 submulţimi, fiecare cu aceeaşi sumă a elementelor (care trebuie să fie $s = (8k+5)(3k+2)$).

Vom porni de la partiţia $M = A \cup B \cup C \cup D$ a mulţimii M, unde:

$$\begin{aligned} A &= \{8k+6, 8k+10, \ldots, 16k+6, 16k+10\} \\ B &= \{8k+7, 8k+11, \ldots, 16k+7\} \\ C &= \{8k+8, 8k+12, \ldots, 16k+8\} \\ D &= \{8k+9, 8k+13, \ldots, 16k+9\}. \end{aligned}$$

(Fiecare dintre aceste submulţimi conţine toate elementele lui M care dau acelaşi rest la împărţirea cu 4; A are $2k+2$ elemente, iar fiecare dintre B, C, D conţine câte $2k+1$ numere.)

Se vede imediat că, dacă notăm t suma elementelor din D, atunci sumele elementelor din C, B, A vor fi respectiv $t-(2k+1)$, $t-(4k+2)$ şi $t+(10k+7)$; atunci, din

$$t+t-(2k+1)+t-(4k+2)+t+(10k+7)=4s,$$

rezultă $t=s-(k+1)$. Aşadar, suma numerelor din D este cu $k+1$ mai mică decât ne-ar trebui, în C suma este cu $3k+2$ mai mică, în B este mai mică cu $5k+3$ şi, în sfârşit, suma elementelor din A depăşeşte cu $9k+6$ pe s, la care vrem să ajungem. Ideea este să schimbăm între ele elementele acestor mulţimi pentru a obţine, pe scheletul lor, alte submulţimi, toate cu suma elementelor s. Vom considera $k\geq 2$ (separat apoi $k=1$).

Prima schimbare „aranjează“ mulţimea D. Luăm din A ultimele $k+1$ elemente, adică pe $12k+10, 12k+14, \ldots, 16k+10$ şi le punem în D, în locul ultimelor $k+1$ de acolo, adică în locul lui $12k+9, 12k+13, \ldots, 16k+9$. Pe acestea le mutăm în C, înlocuind pe $12k+8, 12k+12, \ldots, 16k+8$ care, din această mulţime se mută în A. Evident, astfel am realizat o nouă mulţime

$$D_1=\{8k+9,\ldots,12k+5,12k+10\ldots,16k+10\},$$

care are suma elementelor cu $k+1$ mai mare decât D, adică s.

De mulţimea B nu ne-am atins, iar A şi C au devenit respectiv:

$$A_1=\{8k+6,\ldots,12k+6,12k+8\ldots,16k+8\}$$

şi

$$C_1=\{8k+8,\ldots,12k+4,12k+9\ldots,16k+9\};$$

A_1, B_1, C_1, D_1 realizează, şi ele, o partiţie a lui M iar sumele elementelor lor sunt respectiv $s+(7k+4)$, $s-(5k+3)$, $s-(2k+1)$ şi, cum am mai spus, s.

Pasul următor constă în interschimbările:

$$8k+10\Leftrightarrow 8k+8, 8k+14\Leftrightarrow 8k+12,\ldots,12k+2\Leftrightarrow 12k \quad \text{şi} \quad 16k+8\Leftrightarrow 16k+5$$

între mulţimile A_1 şi C_1. Acestea conduc la noua partiţie $M=A_2\cup B\cup C_2\cup D_1$, unde

$$A_2=\{8k+6,8k+8,\ldots,12k,12k+6,12k+8,\ldots,16k+4,16k+5\}$$

are suma elementelor cu $2k+1$ mai mică decât A_1 (adică $s+(5k+3)$) şi

$$C_2=\{8k+10,\ldots,12k+2,12k+4,12k+9,\ldots,16k+1,16k+8,16k+9\}$$

are suma elementelor cu $2k+1$ mai mare decât C_1; deci suma elementelor din C_2 este s.

În sfârşit, mai avem de balansat nişte elemente între A_2 şi B, pentru a echilibra şi sumele din aceste clase ale partiţiei. Realizăm asta cu interschimbările ($A_2\Leftrightarrow B$):

$$12k+8\Leftrightarrow 12k+3, 12k+12\Leftrightarrow 12k+7,\ldots,16k+4\Leftrightarrow 16k-1$$

(în număr de k) şi

$$8k+8\Leftrightarrow 8k+7, \qquad 16k+5\Leftrightarrow 16k+3,$$

care conduc la mulţimile A_3 şi B_1 care au suma elementelor cu $5k+1+2=5k+3$ mai mică, respectiv mai mare, decât suma elementelor din A_2, respectiv din B. Adică $A_3\cup B_1\cup C_2\cup D_1$ este partiţia care îndeplineşte cerinţele enunţului.

De exemplu, partiţia la care ajungem prin acest procedeu pentru $k=2$ (adică $n=21$) este

$$\{22,23,\ldots,42\}=\{22,23,27,30,31,35\}\cup\{24,32,36,37,39\}\cup$$
$$\cup\{26,28,33,40,41\}\cup\{25,29,34,38,42\}.$$

Mai trebuie să rezolvăm cazul $k=1$ (când ultima etapă a metodei descrise mai sus nu merge, deoarece $12k+3=8k+7$). Avem deci $n=13$ şi partiţia

$$\{14,15,\ldots,26\}=\{14,15,17,19\}\cup\{16,24,25\}\cup\{18,21,26\}\cup\{20,22,23\}$$

care completează soluţia.

Soluţie dată de *Marius Olteanu*, inginer la S. C. Hidroconstrucţia S.A. Bucureşti, sucursala „Olt-Superior“ din Râmnicu-Vâlcea. Notăm $\mathcal{A}=\{n+1,n+2,\ldots,2n\}$. Evident Card$\mathcal{A}=n$.

Implicaţia directă: Dacă $\mathcal{A}$ se poate partiţiona cum cere enunţul, suma elementelor lui A este $(n+1)+(n+2)+\ldots+2n=\dfrac{n(3n+1)}{2}$ şi trebuie să fie multiplu de 4. Într-adevăr, dacă S este suma elementelor fiecăreia din cele patru submulţimi, atunci $\dfrac{n(n+3)}{2} = 4S$, deci $S = \dfrac{n(n+3)}{8}$; cum $S \in \mathbb{N}^*$, iar n şi $3n+1$ sunt de parităţi diferite, atunci n este multiplu de 8 , adică $n = 8l$, $l \in \mathbb{N}^*$ sau $3n+1$ este multiplu de 8. În acest al doilea caz, în plus n trebuie să fie obligatoriu număr impar (altfel $3n+1$ ar fi impar, deci n-ar fi multiplu de 8).

Fie deci $n = 2p+1$, $p \in \mathbb{N}$. Atunci $3(2p+1)+1 = 8t$, unde $t \in \mathbb{N}^*$, ceea ce este echivalent cu $6p+4 = 3t$, adică $3p+2 = 4t$ de unde $p = \dfrac{2(2t-1)}{3}$. Cum $p \in \mathbb{N}$, există $m \in \mathbb{N}$ astfel încât $2t-1 = 3m$. Cum $2t-1$ este număr impar, m trebuie să fie tot un număr impar (pentru că, evident, 3 este impar), deci $m = 2k+1$, unde $k \in \mathbb{N}^*$. Înlocuind avem:

$$n = 2p+1 = 2\cdot\frac{2(2t-1)}{3} + 1 = 2\cdot\frac{2-3n}{n} + 1 = 4m+1 = 4(2k+1)+1 = 8k+5,$$

deci $n = 8k+5$, $k \in \mathbb{N}^*$.

Implicaţia reciprocă. Fie întâi $n = 8l$, $l \in \mathbb{N}^*$. Atunci $\mathcal{A} = \{8l+1, 8l+2, \ldots, 16l\}$ poate fi împărţită în 4 submulţimi disjuncte cu aceeaşi sumă a elementelor astfel: $\{8l+1, 16l\}$; $\{8l+2, 16l-1\}$; $\{8l+3, 16l-2\}$;...; $\{8l+4l-1, 16l-[(4l-1)-1]\}$; $\{8l+4l, 16l-(4l-1)\}$ (se observă că suma elementelor este egală cu $24l+1$).

Reuniunea primelor l dintre aceste submulţimi constituie prima clasă dintre cele patru clase ale partiţiei.

Reuniunea primelor l dintre cele $3l$ submulţimi rămase constituie a doua clasă a partiţiei.

Apoi reuniunea primelor l dintre cele $2l$ submulţimi rămase constituie cea de a treia clasă a partiţiei.

În fine, reuniunea ultimelor l submulţimi rămase după „epuizarea“ celor $3l$ submulţimi constituie cea de a patra clasă a partiţiei.

Observaţie. Este interesant de stabilit numărul tuturor partiţiilor care se pot realiza conform condiţiilor din enunţ, pentru acest caz.

Fie acum $n = 8k+5$, $k \in \mathbb{N}^*$. Atunci $\mathcal{A} = \{8k+6, 8k+7, 8k+8, \ldots, 16k+10\}$.

Fie $A = B \cup C \cup D \cup E$ partiţia dorită. În B punem pentru început, numerele $8k+6$, $8k+7$, $8k+8$, $16k+4$, în C numerele $8k+9$, $16k+9$, $16k+7$, în D numerele $8k+10$, $16k+5$, $16k+10$, iar în E numerele $8k+11$, $16k+6$, $16k+8$; până acum elementele din B, C, D şi E au aceeaşi sumă: $40k+25$. Numerele rămase de la $8k+12$ până la $16k+3$ (care sunt în total $(8k+5)-13 = 8(k-1)$), le împărţim în $k-1$ grupe de câte 8 numere consecutive, de forma $\{p, p+1, p+2, p+3, p+4, p+5, p+6, p+7\}$.

Mai departe, numerele p şi $p+7$ din fiecare grupă le punem în B – realizându-se prima clasă a partiţiei –, numerele $p+1$ şi $p+6$ din fiecare grupă le punem în C – obţinându-se a doua clasă a partiţiei –, numerele $p+2$ şi $p+5$ din fiecare grupă le punem în D – rezultând a treia clasă a partiţiei – şi în cele din urmă, numerele $p+3$ şi $p+4$ din fiecare grupă le punem în E– obţinându-se cea de a patra clasă a partiţiei. Cu aceasta problema este complet rezolvată.

Observaţie. Această problemă precum şi problemele **G90**, **L90** apărute în revista Recreaţii Matematice, nr. 2/2005, constituie completări la articolul „Ca să rezolvi această problemă...“ al cărui autor este profesorul *Marian Tetiva*, articol publicat în G.M.-B nr. 12/2005, pp. 611-615.

222. *Fie a, b, c numere pozitive. Să se arate că:*

$$\frac{a^4}{a^3+b^3} + \frac{b^4}{b^3+c^3} + \frac{c^4}{c^3+a^3} \geq \frac{a+b+c}{2}.$$

Vasile Cîrtoaje

Soluţia autorului. Fără a pierde din generalitate, putem considera $c = \max\{a, b, c\}$. Inegalitatea poate fi scrisă astfel:

$$\left(\frac{a^4}{a^3+b^3} - \frac{a}{2}\right) + \left(\frac{b^4}{b^3+c^3} - \frac{b}{2}\right) + \left(\frac{c^4}{c^3+a^3} - \frac{c}{2}\right) \geq 0,$$

ceea ce echivalează cu

$$\frac{a(a^3-b^3)}{a^3+b^3} + \frac{b(b^3-c^3)}{b^3+c^3} + \frac{c(c^3-a^3)}{c^3+a^3} \geq 0.$$

Deoarece

$$\frac{a(a^3-b^3)}{a^3+b^3} - \frac{b(a^3-b^3)}{a^3+b^3} = \frac{(a-b)(a^3-b^3)}{a^3+b^3} \geq 0,$$

este suficient să arătăm că

$$\frac{b(a^3-b^3)}{a^3+b^3} + \frac{b(b^3-c^3)}{b^3+c^3} + \frac{c(c^3-a^3)}{c^3+a^3} \geq 0.$$

Ţinând seama că

$$\frac{b(a^3-b^3)}{a^3+b^3}+\frac{b(b^3-c^3)}{b^3+c^3}=\frac{2b^4(a^3-c^3)}{(a^3+b^3)(b^3+c^3)},$$

ultima inegalitate este echivalentă cu

$$(c^3-a^3)(c-b)[a^3(2b^3+b^2c+bc^2+c^3)-b^3c(b^2+bc-c^2)]\geq 0. \tag{1}$$

Ţinând seama că $(c^3-a^3)(c-b)\geq 0$, este suficient să arătăm că

$$a^3(2b^3+b^2c+bc^2+c^3)-b^3c(b^2+bc-c^2)\geq 0. \tag{2}$$

În cazul $a\geq b$, avem:

$$a^3(2b^3+b^2c+bc^2+c^3)-b^3c(b^2+bc-c^2)\geq b^3(2b^3+b^2c+bc^2+c^3)-b^3c(b^2+bc-c^2)=2b^3(b^3+c^3)\geq 0.$$

Ca urmare, în continuare, vom considera că $0\leq a<b\leq c$.

Prin permutare, din (1), rezultă că inegalitatea ciclică dată este adevărată dacă

$$(a^3-b^3)(a-c)[b^3(2c^3+c^2a+ca^2+a^3)-c^3a(c^2+ca-a^2)]\geq 0.$$

Deoarece $(a^3-b^3)(a-c)>0$ pentru $0\geq a<b\geq c$, este suficient să arătăm că

$$b^3(2c^3+c^2a+ca^2+a^3)-c^3a(c^2+ca-a^2)\geq 0. \tag{3}$$

Pentru a încheia demonstraţia, vom arăta că (2) este adevărată pentru $5b^3\leq 5a^3+c^3$, iar (3) este adevărată pentru $5b^3\geq 5a^3+c^3$. Din considerente de omogenitate, vom considera $c=1$. Trebuie să arătăm că

$$a^3(2b^3+b^2+b+1)-b^3(b^2+b-1)\geq 0, \tag{4}$$

pentru $5b^3\leq 5a^3+1$ şi, respectiv:

$$b^3(2+a+a^2+a^3)-a(1+a-a^2)\geq 0, \tag{5}$$

pentru $5b^3\geq 5a^3+1$.

Deoarece (4) este adevărată pentru $b^2+b-1\leq 0$, considerăm acum că $b^2+b-1>0$. Ţinând seama de această condiţie şi de faptul că $5b^3\leq 5a^3+1$, avem:

$$\begin{aligned}5a^3(2b^3+b^2+b+1)-5b^3(b^2+b-1)&\geq(5b^3-1)(2b^3+b^2+b+1)-5b^3(b^2+b-1)=\\=10b^6+8b^3-b^2-b-1&=8b^6+(b^2+b-1)(2b^4-2b^3+4b^2+2b+1)>\\&>(b^2+b-1)(b^4-2b^3+b^2)=b^2(b^2+b-1)(b-1)\geq 0.\end{aligned}$$

La rândul ei, inegalitatea (5) este adevărată pentru $5b^3\geq 5a^3+1$, deoarece

$$5b^3(2+a+a^2+a^3)-5a(1+a-a^2)\geq(5a^3+1)(2+a+a^2+a^3)-5a(1+a-a^2)=$$
$$=5a^6+5a^5+5a^4+16a^3-4a^2-4a+2>12a^3-4a^2-5a+2=(2a-1)^2(3a+2)\geq 0.$$

Cu aceasta, demonstraţia este încheiată. Avem egalitate numai în cazul $a=b=c$.

Soluţie dată de *Marius Olteanu*, inginer la S. C. Hidroconstrucţia S.A. Bucureşti, sucursala „Olt-Superior" din Râmnicu-Vâlcea. Distingem cele şase relaţii de ordine dinte numerele a, b, c şi anume:

$$\text{(I)}\begin{cases}a\geq b\geq c\\ b\geq c\geq a\\ c\geq a\geq b\end{cases},\qquad \text{(II)}\begin{cases}a\geq c\geq b\\ b\geq a\geq c\\ c\geq b\geq a\end{cases}.$$

În continuare vom studia numai cazurile $a\geq c\geq b$, $a\geq b\geq c$, deoarece, după cum se va observa în continuare, celelalte cazuri se reduc la unul din cele două „de bază".

Aşadar, presupunem pentru început că ne situăm în cazul $a\geq c\geq b$.

Notăm $\dfrac{a}{b}=x\geq y=\dfrac{c}{b}$; evident $x\geq y\geq 1$ şi $a=bx$, $c=by$. Înlocuind acum pe a şi b în inegalitatea cerută şi efectuând câteva calcule, urmează a se demonstra că avem următoarea inegalitate:

$$\frac{x^4}{x^3+1}+\frac{1}{y^3+1}+\frac{y^4}{x^3+y^3}\geq\frac{x+y+1}{2},\quad \forall x\geq y\geq 1. \tag{1}$$

Aducând la acelaşi numitor, inegalitatea (1) este echivalentă cu:

$$2\left[x^4(x^3+y^3)(y^3+1)+y^4(x^3+1)(y^3+1)+(x^3+1)(y^3+x^3)\right]\geq$$
$$\geq(x+y+1)(x^3+1)(y^3+1)(x^3+y^3)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\left(x^7y^3+x^7+x^4y^6+x^4y^3+x^3y^3+x^3y^4+y^7+y^4+x^3y^3+x^3+y^3+x^6\right)\geq$$
$$\geq(x+y+1)(x^3+y^3)(x^3+y^3+x^3y^3+1)=(x+y+1)(x^6+x^3y^3+x^6y^3+x^3+x^3y^3+y^6+$$
$$+x^3y^6+y^3)=(x+y+1)(x^6+y^6+x^3+y^3+x^3y^6+x^6y^3+2x^3y^3)=$$
$$=x^7+xy^6+x^4+xy^3+x^4y^6+x^7y^3+2x^4y^3+x^6y+$$
$$+y^7+x^3y+y^4+x^3y^7+x^6y^4+2x^3y^4+x^6+y^6+x^3+y^3+$$
$$+x^3y^6+x^6y^3+3x^3y^3\Leftrightarrow x^7y^3+x^7+x^4y^6+x^3y^7+y^7+y^4+x^3+y^3+x^6\geq$$
$$\geq xy^6+x^4+xy^3+x^6y+x^3y+x^6y^4+y^6+x^3y^6+x^6y^3\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^7(y^3+1)+x^6(1-y-y^4-y^3)+x^4(y^6-1)+x^3(y^7+1-y-y^6)+$$
$$+xy^3(-y^3-1)+y^7+y^4+y^3-y^6\geq 0. \tag{2}$$

Deoarece variabilele x, y sunt independente, putem fixa pe y şi să considerăm funcţia $f:[y,\infty)$ definită prin:

$$f(x)=x^7(y^3+1)-x^6(y^4+y^3+y-1)+x^4(y^6-1)+x^3(y^7-y^6-y+1)-xy^3(y^3+1)+y^7-y^6+y^4+y^3.$$

Astfel, a demonstra inegalitatea (2), revine la a arăta că $f(x)\geq 0$, pentru orice $x\in[y,\infty)$, unde $y\geq 1$. Avem:

$$f'(x)=7x^6(y^3+1)-6x^5(y^4+y^3+y-1)+4x^3(y^6-1)+3x^2(y^7-y^6-y+1)-y^3(y^3+1),$$
$$f''(x)=42x^5(y^3+1)-30x^4(y^4+y^3+y-1)+12x^2(y^6-1)+6x(y^7-y^6-y+1),$$
$$f'''(x)=210x^4(y^3+1)-120x^3(y^4+y^3+y-1)+24x(y^6-1)+6(y^7-y^6-y+1),$$
$$f^{(IV)}(x)=840x^3(y^3+1)-360x^2(y^4+y^3+y-1)+24(y^6-1)+6(y^7-y^6-y+1).$$

Însă:

$$840x^3(y^3+1)=360x^3y^3+360x^3y^3+120x^3y^3+840x^3>360x^2y^4+360x^2y^3+360x^2y.$$

Într-adevăr, inegalitatea precedentă este echivalentă cu:

$$360x^2y^3(x-y)+360x^2y^3(x-1)+x^2(840x-360y)+120x^3y^3>0,$$

ceea ce este adevărat deoarece $x\geq y\geq 1$.

Cum $y^6-1\geq 0$, deoarece $y\geq 1$, din cele de mai sus rezultă că $f^{(IV)}(x)>0$. Prin urmare f''' este strict crescătoare pe intervalul $[y,\infty)$, de unde $f'''(x)\geq f''(y)$, pentru orice $x\in[y,\infty)$.

Să observăm că

$$\begin{aligned}f'''(y)&=210y^4(y^3+1)-120y^3(y^4+y^3+y-1)+24y(y^6-1)+6(y^7-y^6-y+1)=\\&=120y^7-126y^6+90y^4+120y^3-30y+6.\end{aligned}$$

Fie $g:[1,\infty)\to\mathbb{R}$, definită prin:

$$g(y)=120y^7-126y^6+90y^4+120y^3-30y+6.$$

Atunci

$$g'(y)=840y^6-756y^5+360y^3+360y-30\geq 0,$$

deci g este strict crescătoare pe intervalul $[1,\infty)$. Prin urmare $g(y)\geq g(1)=0$, de unde $g(y)\geq 0$, pentru orice $y\geq 1$.

Cum, de fapt, $f'''(y)=g(y)$, rezultă că $f'''(y)\geq 0$, deci $f'''(x)\geq 0$ pentru orice $x\in[y,\infty)$.

Aşadar, $f''(x)$ este crescătoare pe $[y,\infty)$, deci $f''(x)\geq f''(y)$.

Să observăm că

$$f''(y)=42y^5(y^3+1)-30y^4(y^4+y^3+y-1)+12y^2(y^6-1)+6y(y^7-y^6-y+1),$$

i.e.

$$f''(y)=30y^8-36y^7+12y^5+30y^4-18y^2+6y.$$

Fie $h : [1, \infty) \to \mathbb{R}$, definită prin:

$$h(y) = 30y^8 - 36y^7 + 12y^5 + 30y^4 - 18y^2 + 6y.$$

Atunci

$$h'(y) = 240y^7 - 252y^6 + 60y^4 + 120y^3 - 36y + 6,$$
$$h''(y) = 1680y^6 - 1512y^5 + 240y^3 + 360y^2 - 36 > 0.$$

Drept urmare h' este strict crescătoare pe intervalul $[1, \infty)$, de unde $h'(y) \geq h'(1) = 138 > 0$, deci h este strict crescătoare pe intervalul $[1, \infty)$. Atunci $h(y) \geq h(1) = 24 > 0$, de unde $f''(y) = h(y) > 0$. Aşadar $f''(x) \geq f''(y)$, pentru orice $y \geq 1$ şi $x \in [y, \infty)$, ceea ce implică faptul că f' este crescătoare şi, în consecinţă, $f'(x) \geq f'(y)$.

Să observăm că:

$$f'(y) = 7y^6(y^3+1) - 6y^5(y^4+y^3+y-1) + 4y^3(y^6-1) + 3y^2(y^7-y^6-y+1) - y^3(y^3+1) =$$
$$= 8y^9 - 9y^8 + 6y^5 - 8y^3 + 3y^2.$$

Fie $u : [1, \infty) \to \mathbb{R}$, definită prin:

$$u(y) = 8y^9 - 9y^8 + 6y^5 - 8y^3 + 3y^2.$$

Atunci:

$$u'(y) = 72y^8 - 72y^7 + 30y^4 - 24y^2 + 6y > 0, \quad \forall y \geq 1,$$

deci u este strict crescătoare pe intervalul $[1, \infty)$, de unde $u(y) \geq u(1) = 0$. Atunci $f'(y) = u(y) \geq 0$ şi prin urmare $f'(x) \geq 0$. Aşadar, f este strict crescătoare pe intervalul $[y, \infty)$, deci

$$f(x) = f(y) = 2y^{10} - 2y^9 - 2y^4 + 2y^3 = 2y^3(y^7 - y^6 - y + 1) = 2y^3(y-1)^2(y^5 + y^4 + y^3 + y^2 + y + 1) \geq 0,$$

pentru orice $y \in [1, \infty)$.

În concluzie $f(x) \geq 0$, oricare ar fi $x \in [y, \infty)$.

Egalitatea se atinge dacă şi numai dacă $x = y = 1$, ceea ce echivalează cu $a = b = c$.

MANIFESTĂRI ŞTIINŢIFICE

Conferinţa internaţională de Algebră comutativă Constanţa, 29-31 martie 2007

În perioada 29-31 martie 2007 s-au desfăşurat la Universitatea Ovidius din Constanţa lucrările Conferinţei internaţionale „Comutative Algebra and Related Structures", organizată de către Facultatea de Matematică şi Informatică a Universităţii din Constanţa, Institutul de Matematică Simion Stoilow al Academiei Române şi Societatea de Ştiinţe Matematice din România.

Prima zi a conferinţei a debutat în Sala Senatului Universităţii Ovidius, unde s-a desfăşurat festivitatea de decernare a titlului de Doctor Honoris Causa domnului profesor *Dorin Popescu*, profesor la Universitatea din Bucureşti, Preşedintele Societăţii de Ştiinţe Matematice din România. Au participat matematicieni din Germania şi România, prieteni, colegi şi studenţi ai profesorului sărbătorit cu ocazia împlinirii vârstei de 60 de ani.

În celelalte două zile au fost prezentate lucrările participanţilor: *J. Herzog*, Universitatea din Essen (Vertex cover algebras), *S. Basarab*, Institutul de Matematică al Academiei (Kneser and co - Galois structures), *G. Pfister*, Universitatea din Kaiserslauten (The property of approximation-stories of the old days), *S. Ianuş*, Universitatea din Bucureşti şi *W. Boskoff*, Universitatea din Constanţa (Harmonic maps on manifolds with some remarkable geometric structures), *B. Martin*, Universitatea din Cottbus (A strange connection between Milnor algebras and modular germs), *D. Ştefănescu*, Universitatea din Bucureşti (Polynomial divisors and bounds for polynomial roots), *F. Nicolae*, Universitatea din Berlin (On Artin's L-functions), *A. Gica*, Universitatea din Bucureşti (A generalization of a result of Fermat), *M. Rockzen*, Universitatea Humboldt din Berlin (From approximation of solutions of polynomials to stringy invariants), *M. Kureş*, Universitatea din Brno (Weil algebras: from geometric to algebraic questions), *M. Becheanu* şi *M. Vlădoiu*, Universitatea din Bucureşti (Irreductible polynomials in two series of variables), *C. Baciu*, Universitatea din Mainz (Rank two Ulrich Modules over the Affine Cone of the Simple Node), *A. Ştefan*, Universitatea din Ploieşti (The facets cone associated to some classes of transversal polymatroids). *V. Ene*, Universitatea din Constanţa (Maximal Cohen Macaulay modules over hypersurface rings).

Cu prilejul conferinţei, domnului prof. dr. *Dorin Popescu* i s-a înmânat diploma de onoare a Biroului Consiliului Societăţii de Ştiinţe Matematice din România.

Mircea Trifu

Laudatio
cu ocazia conferirii titlului de Doctor Honoris Causa al Universităţii Ovidius din Constanţa profesorului universitar dr. Dorin-Mihail Popescu, de la Universitatea din Bucureşti şi de la Institutul de Matematică Simion Stoilow al Academiei Române

Universitatea Ovidius are astăzi onoarea şi bucuria de a conferi titlul de *Doctor Honoris Causa* unui mare matematician român, prieten vechi al Facultăţii de Matematică şi Informatică, distinsului cercetător şi profesor *Dorin-Mihail Popescu*, bine cunoscut profesor de matematică al universităţii bucureştene, om de ştiinţă recunoscut pe plan mondial, preşedintele Societăţii de Ştiinte Matematice din România.

Prof. univ. dr. D. Popescu cu ocazia conferirii titlului de Doctor Honoris Causa al Universităţii Ovidius din Constanţa

Este o onoare pentru noi să prezentăm în faţa domniilor voastre viaţa şi activitatea profesorului *Dorin Popescu.*

Dl. *Dorin-Mihail Popescu* s-a născut la 21 martie 1947, în comuna Pătârlagele din judeţul Buzău. În comuna natală a descoperit matematica, îndrumat de profesorul *Nicolae Zugravu* în clasa a V-a; după aceea, a învăţat singur matematică din pasiune. A urmat cursurile liceale la Colegiul Naţional Bogdan Petriceicu Haşdeu din Buzău, absolvind liceul în 1964. În acelaşi an, dl. *Dorin Popescu* a dat examen de admitere la Facultatea de Matematică-Mecanică a Universităţii din Bucureşti. Pasionat de matematică din clasele elementare, a învăţat cu pasiune şi a participat – încă din primul an de facultate – la un cerc studenţesc de teoria categoriilor, condus de tânărul cercetător de la Institutul de Matematică al Academiei *Nicolae Popescu.* A întâlnit astfel domeniul care va deveni pasiunea vieţii sale – algebra – încă din anul I şi a început să facă cercetări originale în algebră ca student. Singur sau în colaborare cu colegul *George Georgescu* a publicat, de pe băncile facultăţii, patru articole originale, dintre care trei în Franţa, două dintre ele, consacrate fascicolelor unei teorii, în prestigioasa revistă a Academiei franceze „Comptes Rendus de l'Academie des Sciences". În 1969 *Dorin Popescu* a terminat facultatea şi – absolvent eminent – a fost repartizat ca preparator la catedra de algebră a Facultăţii de Matematică din Bucureşti, condusă, pe atunci, de prof. *Gh. Galbură.* A concurat apoi la postul de asistent şi a funcţionat în facultate până în 1979, când a concurat pe un post de Cercetator Principal III, la Institutul de Matematică care, pe atunci, devenise INCREST (Institutul Naţional pentru Creaţie Ştiinţifică şi Tehnică), post pe care l-a ocupat până în 1990. La INCREST, dl. *Dorin Popescu* avea mai mult răgaz pentru cercetare; este, de altfel, motivul pentru care a optat pentru postul de acolo.

La foarte scurt timp, *Dorin Popescu* a reuşit să-şi termine studiile doctorale cu profesorul *Ionel Bucur*; acest lucru s-a întâmplat în 1974, când a susţinut teza cu titlul „Aproximarea forte peste inele excelente de valuare discretă", o teză bine apreciată, care i-a adus recunoaştere naţională şi internaţională. A publicat peste douăzeci de articole asupra aproximărilor *Artin*, desingularizărilor *Néron*, inelelor henseliene, inelelor şi corpurilor valuate, continuând, cu multe noutăţi şi cu aplicaţii la zi, ideile din teză.

Fire sportivă, *Dorin Popescu* a iubit şi iubeşte ascensiunile montane şi marea, care i-au asigurat rezistenţă fizică şi rezistenţă mentală, absolut necesare cercetării matematice.

Activitatea ştiinţifică a D-lui Dorin Popescu

Rezultatele obţinute de domnia sa în cercetarea matematică îi asigură un loc de frunte între matematicienii români şi recunoaşterea internaţională. Ele i-au adus un premiu I pentru cercetare în 1973 la Atena, conferit de Uniunea Matematicienilor din Balcani, şi premiul Academiei din 1979. La 33 de ani, a obţinut, prin concurs, o bursa NSF la Institute for Advanced Study de la Princeton, S.U.A., unde a cunoscut şi a fost cunoscut de mari matematicieni. În 1990-1991, a putut onora o bursă Humboldt la Universitatea din Essen, Germania, extinsă apoi pentru un semestru la Universitatea din Osnabrück. Între 1993-1997, în fiecare an, dl. prof. *Dorin Popescu* a fost profesor vizitator în universităţi de marcă din Germania şi din alte ţări. Astfel, a fost 6 luni la Göttingen, Kaiserslautern, Essen (în programul Humboldt), o lună la Universitatea din Edinburgh, o lună la Universitatea din Kaiserslautern, o lună la Universitatea din Bielefeld. În 1999, a obţinut un grant EPSRC şi a vizitat din nou Universitatea din Edinburgh şi, câte două luni, în programul Humboldt, a lucrat în universităţile din Kaiserslautern şi Essen. La aceleaşi universităţi, şi-a continuat activitatea în seminariile lor stiinţifice şi în anii următori, cu granturi DAAD. În Franţa a fost invitat la universitatea din Bordeaux, în Spania la universitatea din Barcelona; la Berlin, Essen, Kaiserslautern a mers de multe ori, cu burse europene sau ale Academiei Germane. A conferenţiat la universităţi şi institute de cercetare renumite: MIT, Berkeley, Los Angeles, Salt Lake City, Urbana-Champaigne în S.U.A., la Montreal în Canada, la Edinburg, Glasgow, Sheffield (Anglia), la Kyoto, Nagoya (Japonia), la Genova, Ferrara, Catania (Italia), la Barcelona (Spania), la Bordeaux, Luminy, Grenoble (Franţa), la Oslo (Norvegia), la Varşovia (Polonia), la Budapesta (Ungaria), la Utrecht (Olanda), la Innsbruck (Austria), la multe dintre universităţile germane.

Domeniile de interes ştiinţific ale profesorului sunt algebra comutativă şi geometria algebrică, domenii care au cunoscut o adevărată înflorire în ultimele decenii ale secolului trecut şi care sunt şi astăzi în plină dezvoltare.

Primele rezultate originale ale cercetării ştiinţifice desfăşurate de prof. *Dorin Popescu* se referă la:

- Aproximarea *Artin* şi inele henseliene;
- Desingularizarea *Néron*;
- Module proiective de inele de polinoame peste un inel regulat.

Dl. *Popescu* a dat soluţii unor conjecturi aparţinând lui *M. Artin* şi *Bass-Quillen*, soluţii care au fost prezentate în Seminarul Bourbaki (1993- 1994) de *B. Teissier* şi pe care *R. Swan* le-a prezentat, în 1998, în lucrarea „Néron-Popescu Desingularization".

După 1987, *Dorin Popescu* a început să studieze modulele *Cohen-Macaulay*. A studiat modulele *Cohen-Macaulay* maximale, module cvasi-*Buchsbaum*, module *Cohen-Macaulay* generalizate, algebre *Rees* şi aplicaţii ale combinatoricii în algebră. Mai precis, iată câteva dintre rezultatele obţinute de domnia sa:

- Împreună cu *Jürgen Herzog* şi *Liam O'Carroll*, a completat o teoremă a lui *Knörrer*, folosind-o la descrierea modulelor *Cohen-Macaulay* peste unele hipersuprafeţe;
- Împreună cu *Gerhard Pfister*, a completat teorema de periodicitate a lui *Knörrer* în caracteristică 2;
- Împreună cu *Jürgen Herzog*, a demonstrat conjectura lui *Pardue* referitoare la regularitate şi a dat răspunsuri parţiale la conjecturi ale lui *Eisenbud-Green-Harris* în teoria *Cayley-Bacharach* şi în teoria lui *Castelnuovo*.
- Împreună cu *Radu Laza* şi *Gerhard Pfister*, a descris modulele *Colen-Macaulay* maximale peste conul curbei proiective $V(f)$, $f = X^3 + Y^3 + Z^3$, folosind clasificarea lui *Atiyah* a varietăţilor peste $V(f)$.
- Împreună cu *Corina Baciu*, *Viviana Ene* şi *Gerhard Pfister*, a descris modulele *Cohen-Macaulay* maximale pentru suprafeţe $V(f)$, $f = X^3 + Y^3 + Z^3 + U^3$ de rang inferior sau egal cu 2.
- Împreună cu *Jürgen Herzog*, *Dorin Popescu* a extins conceptul de complex simplicial „shellabil" la multicomplexe, studiind filtrările de module aproape curate.

S-ar putea, desigur, scrie multe despre rezultatele cercetării ştiinţifice a d-lui *Dorin Popescu*, care sunt apreciate în toată lumea matematică şi sunt concretizate în peste 80 de articole publicate în reviste de matematică de bună reputaţie ştiinţifică şi în monografii care se bucură de largă recunoaştere şi de o presă ştiinţifică bună. Citàm câteva dintre monografii, cu titlurile lor, anul publicării şi editura:

- Die Approximationseigenschaft lokaler Ringe, în Lecture Notes în Mathematics, Nr. 634, Springer, 1978;
- Inele henseliene şi proprietatea de aproximare a lui *Artin* (cu *V. Nica*), Ed. Univ. Bucureşti, 1979;
- Elemente de teoria grupurilor finite (cu *Constantin Vraciu*), Ed. Ştiinţifică şi Enciclopedică, 1986;

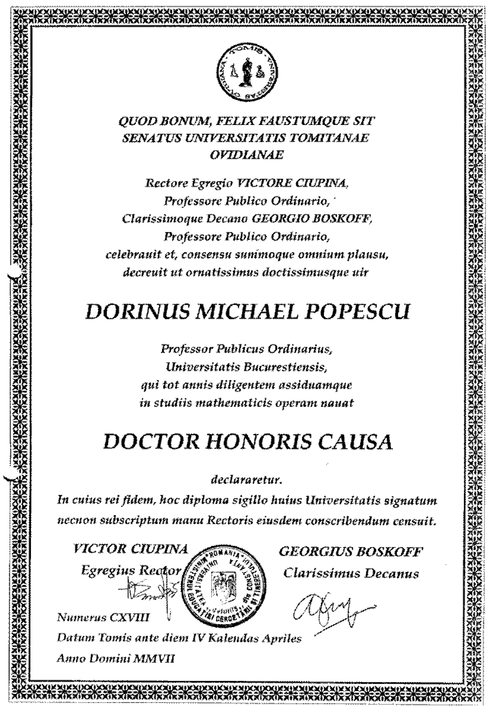
• Criptografie, coduri, algoritmi (cu *Cătătălin Gherghe*), Ed. Univ. Bucureşti, 2005.

Prestaţia didactică a profesorului *Dorin Popescu* este unanim apreciată de studenţi şi de colegi. Cursurile sale sunt moderne şi conţin idei de cercetare pentru auditoriu. Ştim acest lucru şi din cursurile predate un semestru la facultatea noastră. Ultima monografie este, de altfel, scrisă cu intenţia ca studenţii să ştie aplicaţii ale algebrei comutative în criptografie.

De altfel, cu generozitate, Dorin Popescu a îndrumat paşii spre cercetare multor tineri din anturajul său, dându-le idei matematice, urmărindu-le progresele, îndemnându-i să lucreze. A creat o adevărată şcoală, care are o viaţă ştiinţifică vie, participări la conferinţe naţionale şi internaţionale şi care continuă şcoala profesorilor săi *Gh. Galbură* şi *Nicolae Radu*. Este un exigent conducător de doctorate.

A fost un promotor al şcolilor naţionale de algebră, pe care le-a organizat începând cu 1985, mai întâi la Universitatea Al. I. Cuza din Iaşi, împreună cu d-na *Mirela Ştefănescu* (1985-1989), şi apoi la Universitatea Ovidius împreună cu doctoranda sa, d-na *Viviana Ene*, cu *Mirela Ştefănescu* şi cu alţi colaboratori de la Facultatea de Matematică şi Informatică a Universităţii Bucureşti şi de la Institutul de Matematică al Academiei Române. Numărăm astăzi peste 15 ediţii ale acestei şcoli, care funcţionează în primul rând datorită entuziasmului profesorului *Dorin Popescu*.

Pentru noi, participarea la aceste şcoli a profesorului *D. Popescu*, împreună cu şcoala sa şi cu unii dintre prietenii săi din Germania şi elevi ai acestora, le-a conferit acestora o calitate deosebită şi o prestanţa internaţională.



QUOD BONUM, FELIX FAUSTUMQUE SIT
SENATUS UNIVERSITATIS TOMITANAE
OVIDIANAE

Rectore Egregio VICTORE CIUPINA,
Professore Publico Ordinario,
Clarissimoque Decano GEORGIO BOSKOFF,
Professore Publico Ordinario,
celebrauit et, consensu summoque omnium plausu,
decreuit ut ornatissimus doctissimusque uir

DORINUS MICHAEL POPESCU

Professor Publicus Ordinarius,
Universitatis Bucurestiensis,
qui tot annis diligentem assiduamque
in studiis mathematicis operam nauat

DOCTOR HONORIS CAUSA

declararetur.
In cuius rei fidem, hoc diploma sigillo huius Universitatis signatum necnon subscriptum manu Rectoris eiusdem conscribendum censuit.

VICTOR CIUPINA — *Egregius Rector*

GEORGIUS BOSKOFF — *Clarissimus Decanus*

Numerus CXVIII
Datum Tomis ante diem IV Kalendas Apriles
Anno Domini MMVII

Sentimentul datoriei faţă de comunitatea matematică românească l-a făcut pe dl. prof. *Dorin Popescu* să accepte, din 2004, preşedinţia Societăţii de Ştiinţe Matematice din România. Prezenţa sa acolo este deja remarcabilă; publicaţiile Societăţii au devenit tot mai bune, filialele se întrec în iniţiative, Societatea a redevenit tot mai mult un factor activ în dezvoltarea studiului matematicii în România, s-a refăcut legătura dintre şcoala universitară şi cea preuniversitară de matematică.

Noi îl vedem pe profesorul *Dorin Popescu* de câteva ori pe an; a participat la toate manifestările ştiinţifice de algebră, fiind mai întotdeauna între organizatori, la şedinţe ale Filialei S.S.M.R. din Constanţa, ne-a dat sfaturi şi ne-a ajutat. Îl considerăm un prieten, un sfătuitor, un exemplu.

Îi mulţumim pentru toate cu această ocazie, suntem onoraţi că a acceptat să primească titlul de Doctor Honoris Causa al Universităţii Ovidius din Constanţa, ceea ce pentru noi înseamnă că ne preţuieşte şi crede în viitorul şi prezentul acestei universităţi.

Martori astăzi ai unui moment de excepţie, conferirea titlului de Doctor Honoris Causa al universităţii tomitane d-lui profesor *Dorin Popescu*, îl felicităm pentru primirea acestui titlu, îi urăm succese în continuare, multa sănătate şi putere de muncă.

Cu ocazia împlinirii vârstei de 60 de ani, îi urăm, din toată inima „La mulţi ani“, multe bucurii şi realizări, domniei sale şi familiei sale.

Prof. univ. Wladimir Georges Boskoff
Decanul Facultăţii de Matematică
Universitatea Ovidius din Constanţa

Şcoala de vară de Criptografie de la Vatra Dornei, 20-25 august 2006

Activitate matematică interesantă şi inedită prin conţinut, Şcoala de Criptografie şi Criptologie a fost organizată de către facultăţile de matematică ale Universităţii din Bucureşti şi Universităţii Ovidius din Constanţa.

Au participat cadre didactice şi studenţi de la universităţile din Bucureşti, Cluj, Constanţa, Piteşti şi Ploieşti, cercetători de la Institutul de Matematică Simion Stoilow al Academiei Române, profesori din învăţământul preuniversitar.

Au susţinut expuneri: prof. univ. dr. *Dorin Popescu*, Universitatea din Bucureşti („Introducere în teoria numerelor. Criptosisteme cu curbe eliptice"), conf. univ. dr. *Cătălin Gheorghe*, Universitatea din Bucureşti („Criptosisteme cu cheie publică. Criptosistemul DES, Criptografie cuantică"), lector. univ. dr. *Cristina Flaut*, Universitatea Ovidius din Constanţa („Criptosisteme clasice", aplicaţiile fiind susţinute de către studenţii constănţeni *Oana Apetrei*, *Sheila Ablamit*, *Ştefan Curcan*, *Alexandru Mizeranschi* şi *Georgeta Pană*), asistent univ. *Silviu Vasile*, Universitatea din Bucureşti („Criptosistemul AES, Signaturi digitale"), studenţii bucureşteni *Roxana Iacobescu* („Criptosistemul Knapsack"), *Maria Popescu* şi *Iuliana Vlad* („Moduri de criptare bloc şi funcţii hash").

Prezentate „pe înţelesul tuturor", expunerile s-au bucurat de o primire călduroasă, activitatea urmând să se continue şi în anii următori.

Mircea Trifu

DIN VIAŢA SOCIETĂŢII

Academicianul Profesor Dimitrie D. Stancu la 80 de ani

Anul acesta academicianul profesor *D. D. Stancu*, şeful şcolii româneşti de Analiză numerică şi Teoria aproximării, a împlinit frumoasa vârstă de 80 de ani.

Sărbătorit de către Universitatea Babeş-Bolyai, unde este prezent din 1947, academicianul *D. D. Stancu* iradiază acelaşi robust optimism şi aceeaşi bucurie de viaţă dintotdeauna; este şi bucuria realizărilor dintr-o muncă de peste şase decenii pe tărâmul matematicii: realizări ştiinţifice (în domenii pe care le vom prezenta pe scurt), precum şi realizări la catedră, ca profesor la Facultatea de Matematică a Universităţii Babeş-Bolyai şi conducător ştiinţific a peste 45 de doctoranzi – români şi străini – care au obţinut titlul ştiinţific de doctor în matematică sub îndrumarea domniei sale.

Ca o recunoaştere a contribuţiilor sale ştiinţifice deosebite în matematică, profesorul universitar *D. D. Stancu* a fost distins cu titlul ştiinţific Doctor Honoris Causa al Universităţii Lucian Blaga din Sibiu şi al Universităţii de Nord din Baia Mare. Fiind membru de peste 30 de ani al American Mathematical Society, i s-a acordat titlul de membru emerit al acestei societăţi.

Academicianul *D. D. Stancu* s-a născut la 11 februarie 1927 în comuna bănăţeană Călacea. După absolvirea prestigiosului liceu „Moise Nicoară" din Arad (unde învăţaseră, cu circa 20 de ani mai înainte, şi valoroşii matematicieni *Tiberiu Popoviciu* şi *Caius Iacob*), în acei ani dificili de după război, *D. D. Stancu* reuşeşte să treacă peste dificultăţi materiale, iar în anul 1947 se înscrie la Facultatea de Matematică a Universităţii Victor Babeş din Cluj. Aici resimte benefic influenţa maestrului său *Tiberiu Popoviciu*, care observase imediat marele talent matematic şi este angajat preparator încă din anul al treilea de studii, pentru ca, imediat după dobândirea licenţei, în 1951, să fie numit asistent, întâi la Catedra de Mecanică şi Astronomie şi ulterior la Catedra de Analiză Matematică (şef de catedră – *Tiberiu Popoviciu*). Este admis la doctorat în 1952, pe bază de concurs, iar în 1956 susţine teza (finalizată deja din 1955); conducător ştiinţific a fost *Tiberiu Popoviciu*, iar din comisie au mai făcut parte *Miron Nicolescu*, *Dumitru V. Ionescu* şi *Adolf Haimovici*. În anul universitar 1961-1962 lucrează, pe bază de concurs, la Departamentul de Analiză numerică al Universităţii Wisconsin din oraşul Madison (capitala statului Wisconsin, S. U. A.), condus pe atunci de către profesorul *Preston C. Hammer*. Acolo a cunoscut personal pe matematicienii *J. Favard, A. Ostrovski*, *I. J. Schoenberg*, *G. G. Lorentz*, *P. L. Butzer*, *A. Sharma*, *L. Collatz*, *P. Davis*, *A. S. Householder*, *P. Davis*, *M. Urabe*, *N. Gastinel* şi alţii. În Statele Unite a mai prezentat lucrări la întâlnirile A. M. S. din oraşele americane Milwakee, Chicago şi New York.

După întoarcerea din S.U.A., în 1962, este numit prodecan al Facultăţii de Matematică (fiind deja conferenţiar din 1959) şi şef al Catedrei de Calcul Numeric şi Statistic, nou înfiinţate.

În 1969 devine profesor. *D. D. Stancu* a condus Catedra de Calcul Numeric şi Statistic, de la înfiinţare, timp de peste 33 de ani, până la pensionarea sa, din 1995.

Profesorul *D. D. Stancu* a ţinut cursuri de Analiză numerică, Teoria aproximării, Teoria constructivă a funcţiilor, Teoria probabilităţilor, Analiză matematică, iar la un moment dat, chiar şi de Aritmetică şi Teoria numerelor, precum şi Programarea automată a maşinilor de calcul.

Îmbinând în mod fericit activitatea la catedră şi cea de cercetare, profesorul *D. D. Stancu* a obţinut rezultate importante în toate compartimentele Analizei numerice şi Teoriei aproximării: Teoria interpolării (unde a efectuat o reconsiderare profundă a formulelor de interpolare cu noduri multiple de tip *Hermite*), Derivare numerică, Polinoame ortogonale (în special în legătură cu formulele de cuadratură de tip *Gauss*), Cuadraturi şi cubaturi numerice (unde a stabilit noi formule), Dezvoltări Tayloriene. În domeniul aproximării funcţiilor prin operatori liniari pozitivi, a definit un operator de aproximare care astăzi îi poartă numele şi care constituie o generalizare remarcabilă a operatorului lui *S. Bernstein*, legat de teorema de aproximare a lui *Weierstrass*. A stabilit şi aprofundat în cazuri foarte generale metodele probabilistice de construire şi investigare a operatorilor de aproximare. A stabilit formule şi reprezentări pentru rest la numeroase formule de aproximare. Are rezultate noi în teoria aproximării spline şi în utilizarea calculului cu diferenţe finite şi a calculului operatorial finit (calculul umbral) în construirea de operatori de aproximare. De asemenea, are importante contribuţii în utilizarea calculului cu diferenţe finite în Teoria probabilităţilor şi Statistica matematică.

De-a lungul anilor, profesorul universitar *Dimitrie D. Stancu* a ţinut numeroase conferinţe şi a participat la numeroase evenimente ştiinţifice în Germania (Stuttgart, Hannovra, Hamburg, Göttingen, Dortmund, Münster, Siegen, Würzburg, Berlin, Oberwolfach), Italia (Roma, Neapole, Potenza, L'Aquila), Marea Britanie (Lancaster, Durham), Ungaria (Budapesta), Franţa (Paris), Bulgaria (Sofia, Varna), Republica Cehă (Brno).

Această vastă activitate este concretizată în peste 160 de lucrări (ne referim în total, la articole şi cărţi). O lucrare de mare importanţă o constituie impunătorul tratat de Analiză numerică şi Teoria aproximării, în trei volume, pentru care a angrenat în efortul de redactare câţiva dintre valoroşii săi colaboratori de la Catedra de Calcul numeric şi statistic. Este tratatul românesc în domeniu; el poartă amprenta academicianului *D. D. Stancu*.

Subliniem, faţă de cele arătate, faptul că lucrările sale sunt citate de foarte mulţi autori, iar peste 60 de articole de cercetare conţin numele său chiar în titlu.

Academicianul *D. D. Stancu* este, de mulţi ani, recenzent la „Mathematical Reviews" şi la „Zentralblatt für Mathematik". Cum spuneam şi la început, este membru emerit al A. M. S. Este redactor şef la „Revue d'Analyse Numérique et de Théorie de l'Approximation", publicată la Cluj-Napoca de Academia Română; se află de mulţi ani în Editorial Board-ul revistei italiene „Calcolo", publicată astăzi la Springer.

În anul 1968 a obţinut Premiul Ministerului Învăţământului pentru ansamblul lucrărilor sale de până atunci din domeniul Analizei numerice şi Teoriei aproximării.

După 1990 activitatea sa a continuat cu aceeaşi intensitate şi efervescenţă. În 1996, profesorul *D. D. Stancu* a organizat în Cluj-Napoca „International Conference on Approximation Theory" (ICAOR) cu o valoroasă participare internaţională: peste 150 de matematicieni din 20 de ţări. A participat în 2000 la un simpozion internaţional „Trends in Approximation Theory" dedicat profesorului *L. Schumacker* la Nashville (Tennessee, S. U. A.). Atunci a ţinut conferinţe la mai multe universităţi americane: Ohio State University din Columbus (Ohio), Universitatea din Carolina de Sud, din oraşul Columbia şi Universitatea Columbia (ambele din Carolina de Sud), Universitatea Vanderbilt din Nashville (Tennessee), Pace University din Pleasantville (Statul New York). De asemenea, în mai 2002, Universitatea Babeş-Bolyai a organizat „International Symposium on Numerical Analysis and Approximation Theory" dedicat aniversării de 75 de ani a academicianului *D. D. Stancu*. În iulie 2006 „International Conference on Numerical Analysis" a fost organizată de Universitatea Babeş-Bolyai. Cum era firesc, academicianul *D. D. Stancu* a fost preşedinte de onoare al Conferinţei; au participat peste 60 de matematicieni din 12 ţări. Pentru toate cele trei prestigioase reuniuni ştiinţifice clujene din 1996, 2002 şi 2006, s-au publicat lucrările, în condiţii grafice excelente.

Cum spuneam la început, academicianul *D. D. Stancu* degajă o mare încredere în viaţă şi transmite interlocutorilor săi optimism şi îndemnul de a lucra cu pasiune şi a nu se lăsa impresionaţi de dificultăţi. Dar o face cu aleasă discreţie, blândeţe şi fin humor. Orice convorbire cu domnia sa constituie o bucurie şi un prilej de reconfortare pentru interlocutor. A dăruit cu generozitate idei rodnice colaboratorilor săi, din care mulţi îi datorează paşi decisivi în cariera universitară. Dar, tot atât de important şi poate, nespus încă explicit, academicianul *D. D. Stancu* este un om de o rară bunătate sufletească. Exemplul şi îndemnul său, de perfect echilibru sufletesc şi cultivare a pasiunii ştiinţifice este de o mare importanţă pentru toţi discipolii săi, toţi foştii săi studenţi, doctoranzi şi toţi cei care au avut privilegiul de a-l cunoaşte.

La ceas aniversar, îi adresăm, din tot sufletul, alese urări de sănătate şi fericire!

Andrei Vernescu

REVISTA REVISTELOR

Revista de Matematică din Galaţi

Domnul profesor Romeo Zamfir - unul din principalii animatori ai publicaţiei - ne-a expediat ultimul număr apărut al revistei gălăţene (nr. 28/2007). Domnia sa ne-a trimis, cu această ocazie, şi o scrisoare de trăsură pe care o reproducem mai jos, întrucât oferă o serie de detalii privitoare la apariţia revistei.

Domnule Redactor Şef Dan Radu

Pe data de 08 ianuarie 2007 a apărut numărul 28 al Revistei de Matematică din Galaţi. Ultimele numere ale revistei din Galaţi au fost prezentate la rubrica „Revista revistelor" Reamintesc că revista este editată de catedra de matematică a Colegiului Naţional Vasile Alecsandri din Galaţi şi primul număr al revistei a apărut în anul 1985. Nucleul principal al redacţiei de la primul număr, s-a păstrat până în prezent (timp de 22 de ani) şi acesta este format din profesorii Vasile Popa (redactor şef de primul număr), Constantin Ursu, Marin Dolteanu, Emil Dumitrescu, Gheorghe Pădurariu şi Gheorghe Tutulan (cu excepţia ultimului, toţi sunt încă în activitate la clasă). Nucleul principal, ce asigură apariţia revistei, a fost completat cu profesorii Mihai Dragoş Totolici, Iuliana Duma, Laura Marin şi subsemnatul care au obţinut titularizarea la Colegiul Naţional Vasile Alecsandri din Galaţi după anul 1990. Revista apare cu sprijinul tuturor profesorilor de matematică din Galaţi şi nu numai, dar şi cu ajutorul S.S.M.R., Filiala Galaţi, pe baza unei foarte bune colaborări între catedra de matematică a CNVA şi SSMR, Filiala Galaţi.

Tirajul revistei este 2350, iar 85% din reviste se difuzează contra cost în Galati, 10% se difuzează contra cost în alte judeţe (Argeş, Brăila, Dolj, Vâlcea, Dâmboviţa, Bacău, Suceava) şi 5% se distribuie gratuit pentru promovarea revistei.

Galaţi, 29 ianuarie 2007

Cu deosebită stimă şi consideraţie,
prof. Romeo Zamfir

Din cuprinsul acestui număr vom menţiona titlul a două interesante note matematice: „Power product inequalities for the Gamma function " (*Z. Stroe*), „Proprietatea de densitate pe axa reală" (*I. Duma*).

De asemenea, este notabilă şi iniţiativa publicării unei dări de seamă intitulată „Din activitatea Societăţii de Ştiinţe Matematice din România, Filiala Galaţi" – datorată profesorilor *Cecilia Solomon* şi *Vasile Dumbravă* din localitate.

Dan Radu

Creative Mathematics and Informatics

De la Baia Mare am primit vol. 17 (2007) al Lucrărilor Seminarului de Creativitate matematică şi Ştiinţe de calcul al Universităţii din localitate.

Desigur, fiind vorba de o revistă de cercetare matematică nu vom zăbovi asupra conţinutului ei. Ne vom mulţumi a cita câteva titluri din cuprins, care ni s-au părut – fireşte, din punct de vedere subiectiv – mai interesante : „Some primality and factoring tests" (*C. Flant*), „Artin symbol of the Kummer fields" (*D. Savin*), „A direct finding of the supremum of sequences explained by a fixed point theorem and some new results in asymptotic analysis" (*A. Vernescu*), „Minimal surfaces" (*J. Vecková*) etc.

Invităm cititorii – în măsura în care au posibilitatea – să răsfoiască această interesantă publicaţie în care - suntem convinşi – fiecare va găsi, datorită paletei largi de preocupări, cel puţin un material care să-i stârnească curiozitatea şi apetitul ştiinţific.

Dan Radu

Revista de matematică a elevilor şi profesorilor din judeţul Caraş-Severin

Domnul Profesor *Lucian Dragomir* din Oţelul Roşu, preşedintelel Filialei Caraş Severin a S.S.M.R., ne-a expediat ultimul număr apărut al revistei reşiţene (nr. 19 - an VIII-2007).

Revista inserează câteva interesante materiale cu caracter teoretic din care vom cita: „Reflecţii cu privire la metodica rezolvării problemelor (*M. Sorescu*), „Probleme de numărare pentru elevii de gimnaziu" (*A. Dragomir*), „Teorema Hamilton-Cayley pentru matrici pătratice de ordinul doi" (*M. Monea*), „Probleme de coliniaritate" (*V. Sâneftţa*), „O generalizare a unei probleme dată la examenul de bacalaureat" (*R. Şchean*), „Contraexemple în matematica elementară" (*L. Dragomir*).

De asemenea, revista conţine şi un scurt istoric al concursului interjudeţean de matematică „Traian Lalescu" (semnat de *P. Şuşoi*), precum şi o prezentare a ediţiei a II-a a concursului judeţean organizat de R.M.C.S. (făcută de *L. Dragomir* şi *O. Bădescu*), însoţită de o listă a laureaţilor acestui concurs.

Dan Radu

Revista de Matematică din Timişoara

Domnul Profesor *Ion Dan Bîrchi* – directorul publicaţiei – ne-a expediat ultimul număr apărut al revistei de Matematică din Timişoara (nr. 1/2007).

În acest număr, binecunoscuţii şi veşnic activii profesori *Dan Ştefan Marinescu* şi *Viorel Cornea* publică două interesante note matematice intitulate, respectiv „În legătură cu o problemă de la barajul din 2006" şi „În legătură cu o problemă de concurs". O altă notă inserată în revistă poartă titlul „O generalizare a unor probleme din R.M.T." şi este semnată de profesoriul *Ştefan Sabău* din Baia Mare.

Vom sublinia, din nou, cum am făcut-o în repetate rânduri, bogăţia şi varietatea problemelor propuse şi rezolvate, a căror calitate este atestată de semnătura unor prestigioşi autori, vechi colaboratori ai publicaţiilor de specialitate. Iată câţiva dintre aceştia: *Cristinel Mortici*, *Aurel Doboşan*, *Gheorghe Szöllösy*, *Dorel Miheţ*, *Dan Şefan Marinescu*, *Viorel Cornea*, *Marius Olteanu*, *Laurenţiu Panaitopol*, *Gheorghe Eckstein* (redactorul şef al publicaţiei), *Liliana Niculescu* etc.

Dan Radu

RECENZII

VASILE CHIRIAC, Matematică, fundamentele algebrei şi teoria numerelor. Idei şi metode de rezolvare Editura SIGMA, Bucureşti, 2007

Profesorul *Vasile Chiriac* este de mult un nume binecunoscut în publicistica matematică românească destinată învăţământului preuniversitar. El este autorul a numeroase volume, cu precădere de algebră, publicate de-a lungul timpului, precum şi un fervent propunător de probleme în diverse publicaţii, în special al Gazetei Matematice.

Rod al unei lungi şi laborioase munci – întinsă pe durata a trei ani - prezenta lucrare constituie o chintesenţă a preocupărilor autorului privitoare la fundamentarea şi prezentarea riguroasă a algebrei de liceu – şi, într-o oarecare măsură a algebrei, în general scrisă cu multă acribie ştiinţifică şi talent pedagogic de o persoană cu o vastă experienţă în domeniu.

Volumul este împărţit în şase capitole, acoperind toată materia de algebră din liceu după cum urmează :

Cap. I. Mulţimi numerice;
Cap. II. Funcţii. Relaţii;
Cap. III. Progresii, combinatorică. Sume;

Cap. IV. Elemente de algebră liniară;

Cap. V. Elemente de algebră superioară - structuri algebrice;

Cap. VI. Sisteme speciale de ecuaţii.

Fiecare capitol este împărţit în trei secţiuni: o parte teoretică cu demonstraţii urmate de exemple, o a doua parte destinată problemelor rezolvate şi – în fine – o a treia parte dedicată problemelor propuse însoţite de indicaţii şi răspunsuri. Soluţiile sunt – în general – detaliate, uneori date prin mai multe metode. Ele au drept scop mai buna înţelegere a materialului teoretic prezentat anterior.

Volumul constituie un ghid eficace pentru elevii de liceu în pregătirea diverselor categorii de examene şi concursuri, dar şi un preţios material informativ pentru profesori, în vederea pregătirii lecţiilor curente. De asemenea, destul de multe dintre probleme pot sluji ca material introductiv pentru studenţii anilor întâi de la facultăţile unde matematica face obiect de studiu.

În concluzie, avem de-a face cu o lucrare interesantă, bine scrisă şi gândită, de un real interes tuturor celor preocupaţi de matematică.

Dan Radu

ADRIAN C. ALBU, Elementele matematicii. O introducere
Editura GIL, Zalău, 2004

Odată cu apariţia geometriilor neeuclidiene şi a teoriei mulţimilor, în partea a doua a sec. al XIX-lea, problematica fundaţională a matematicii capătă noi aspecte, mai adânci, mai subtile, afectând direct atât obiectele prime şi de bază ale matematicii cum ar fi număr, punct, figură geometrică etc., cât (şi) mai ales liantul acestora: logica şi metodele de raţionament (arhitectura şi structura matematicii). Aşa se face că la începutul sec. al XX-lea apar cele trei mari curente ale fundamentării matematicii: logicismul (*Fregé*, *Rusell* şi *Whitehead*), formalismul (*Hilbert*) şi intuiţionismul (*Brouwer*, *Poincaré* şi *Weyl*) în care sunt antrenaţi matematicieni, logicieni şi filosofi, fiind vorba de o criză (de încredere) în templul certitudinii $\equiv$ matematica.

Optimismul lui *Hilbert* de a axiomatiza (formaliza) nu numai matematica ci şi alte ştiinţe (unele cu puternice rădăcini în experiment) cum ar fi fizica, biologia etc., este temperat (pentru moment) în 1931 de cele două teoreme ale lui *Gödel*, pentru că, nu după mult timp, *Hilbert* împreună cu elevul său *P. Bernays*, scriu lucrarea (o putem considera răspunsul lor lui *Gödel*) „Grundlagen de Mathematik" (în 1934) şi, de atunci, apare o preocupare constantă şi mai profundă a matematicienilor faţă de problemele de fundamentare. Ba, mai mult, în a doua jumătate a secolului al XX-lea, multe universităţi introduc în programele lor cursuri de Fundamentele matematicii. Apar o serie de lucrări pe această temă; celebra şcoală poloneză (dintre cele două războaie mondiale) care s-a ocupat de fundamentele matematicii a avut revista „Fundamenta mathematicae" la care a colaborat şi *Moisil*. Şcoala românească de matematică a promovat, încă de la început, ideea introducerii unor cursuri de fundamentele matematicii în pregătirea studenţilor de la facultăţile de matematică de pe lângă marile universităţi. Primele astfel de cursuri au fost predate de reputaţi matematicieni ca: *D. Barbilian*, *Gr. Moisil*, *R. Miron* etc. Au apărut chiar şi câteva cărţi (manuale) cu titlul „Fundamente de Matematică" (*G. Sâmboan*, *I. Waisman*, *A. Albu* etc.) sau „Fundamentele aritmeticii şi geometriei" (autori *R. Miron* şi *D. Brânzei*), nemaivorbind de celebra lucrare a lui *O. Becker* „Fundamentele matematicii" (tradusă din limba germană, în 1968).

Iată-ne, acum, în prezenţa unei noi lucrări pe tema Fundamentele matematicii scrisă de distinsul profesor şi matematician *Adrian C. Albu* de la Universitatea de Vest din Timişoara. Lucrarea este structurată în trei părţi şi şase capitole după cum urmează:

Partea I: *Probleme ale fundamentelor logicii şi sistemelor axiomatice* (Noţiuni de logică matematică naivă: logica propoziţiilor, logica predicatelor şi aplicaţii; Sisteme axiomatice cu note şi cu o anexă referitoare la *Sisteme formale*).

Partea II: *Probleme ale fundamentelor aritmeticii şi ale teoriei mulţimilor* (Fundamentele aritmeticii: sistemul axiomatic al lui *Peano* şi mulţimi numerice; Probleme ale fundamentelor teoriei mulţimilor: numere cardinale şi ordinale; Trei anexe: mulţimi vagi, analiză nestandard şi fundamentele teoriei categoriilor).

Partea III: *Probleme ale fundamentelor geometriei* (Sistemele axiomatice ale lui *Hilbert*, *Birkhoff* şi *Weyl* pentru geometria euclidiană şi sistemul axiomatic al lui *Lobacevski-Bolyai* pentru geometria hiperbolică; urmează o anexă care cuprinde în detaliu *Programul de la Erlangen*).

După cum se observă din conţinutul celor trei părţi ale lucrării, autorul tratează problemele de bază ale Fundamentelor matematicii în mod metodic: mai întâi o prezentare a elementelor de bază ale logicii matematice şi a unui sistem axiomatic, apoi se apleacă temeinic asupra problemelor fundamentelor aritmeticii, teoriei mulţimilor şi geometriei. De subliniat că fiecare capitol se încheie cu frumoase exemple şi exerciţii, ceea ce face din lucrare un veritabil manual după care se poate învăţa şi preda. Notele, comentariile, aspectele metodice şi interpretările pe care autorul le dezvoltă cu grijă şi precizie fac din lucrare unealtă indispensabilă pentru profesorii de matematică indiferent la ce nivel o predau şi de aceea o recomandăm cu toată căldura.

Miron Oprea

THOMAS CSINTA, ION OTĂRĂŞANU, Probleme de matematică – cu soluţii şi comentarii – vol. V, Editura GIL, Zalău, 2004, vol. 7, Editura ROTECH PRO, Bucureşti, 2004

Ambele volume pe care le prezentăm, apar sub sigla „Consultanţa universitară franco-română de pe lângă Şcolile Superioare Franceze de Înalte Studii."

Înainte de a prezenta conţinutul acestor două volume de probleme de matematică (din cele 14 volume publicate), voi cita din „Cuvântul înainte" al distinsului matematician care este profesorul *Constantin Năstăsescu*, membru corespondent al Academiei Române: „În contextul actual, când România face eforturi de integrare deplină în marea familie europeană, [1] iniţiativa unor colaborări şi în domeniul învăţământului preuniversitar şi universitar este bine venită". În continuare, tot domnia sa spune: „Lucrarea de faţă se vrea o dovadă a universalităţii limbajului matematic, a faptului că matematica este un spaţiu spiritual în care se pot întâlni oameni ce provin din culturi diferite ... Într-o Europă unită, tânărul care a beneficiat de o formare bazată pe standarde comune va beneficia de libertate de mişcare şi îşi va diversifica opţiunile" [2]

În volumul 5 se prezintă subiectele de matematică propuse pentru Concursul de admitere la grupul ENI (al Şcolilor Superioare Franceze de Înalte Studii Inginereşti), care recrutează studenţi prin concurs în scris, cu durata de 2 1/2 ore. Subiectele sunt tip grilă, cu răspunsuri adecvate şi tradiţionale, începând din 2002.

Ciclul pregătitor pentru inginerie, organizat cu durata de 2 ani după bacalaureat, este accesibil unei elite, care în medie reprezintă circa 6% din absolvenţii de liceu. După aceşti doi ani se trece la ciclul de inginerie propriu-zisă, cu o durată de 3 ani, totalizând în final 5 ani. Există şi şcoli unde acceptarea la concurs a candidaţilor se face pe baza diplomei de bacalaureat, cursul pregătitor fiind de 1 an şi cel ulterior de 4 ani. (Aceste şcoli aparţin grupului ENI ce cuprinde 4 şcoli de inginerie independente, publice, cu concurs comun de admitere). Astfel sunt: Şcoala Naţională de Inginerie (tehnică şi tehnologie de automatizări, robotică şi sisteme industriale, ştiinţa şi tehnologia materialelor), Şcoala Naţională din Metz (informatică industrială, electronică), Şcoala Naţională de inginerie din St. Etienne (mecanică, lucrări publice, construcţii civile şi industriale), Şcoala Naţională de inginerie din Brest (mecanică, informatică şi electronică industrială).

Concursul de admitere se desfăşoară de regulă numai la matematică, fizică sau chimie, iar la unele profile se mai susţine şi la tehnologie mecanică, electronică şi electrotehnică şi, eventual, la o limbă de circulaţie internaţională – engleză, spaniolă, italiană, germană, rusă sau japoneză. Mai trebuie remarcat că în învăţământul francez, în comparaţie cu cel românesc, programa de matematică este mult mai restrânsă, în primul rând deoarece ciclul secundar – liceal – francez se desfăşoară pe durata a trei ani, iar în al doilea rând, pentru că învăţământul preuniversitar francez este structural-formativ.

În continuare, autorii fac şi unele referiri la programa analitică din învăţământul francez, în comparaţie cu cel românesc, lucru ce ar trebui cunoscut de elevii români. Consultanţa universitară franco-română (CUFR) se ocupă în principal de informarea, orientarea şi pregătirea elevilor cu diplomă de bacalaureat românesc, dar şi a studenţilor din diferiţi ani, pentru concursurile de admitere în reţeaua şcolilor superioare franceze, de înalte studii (Grands Ecoles), cu profil ştiinţific, ingineresc, economic şi altele. CUFR, în egală măsură, urmăreşte şi realizarea unei convergenţe între sistemele educative francez şi român, în perspectiva integrării României în structurile Uniunii Europene, asigurând candidaţilor români aceleaşi şanse de reuşită pe piaţa muncii ca şi colegilor francezi.

---

[1] Cele prezentate sunt publicate în anul 2004 înainte de intrarea României în Uniunea Europeană. (N.A.)

[2] Din „Cuvânt înainte", vol. 7, pag. 5 (N.A.).

În volumul şapte sunt prezentate enunţurile problemelor propuse la concursurile de admitere în grupul de şcoli de inginerie (federaţia şcolilor superioare de inginerie şi cadre de înaltă responsabilitate în ştiinţa şi tehnologia de vârf, pe scurt FESIC). Timpul de lucru este tot de 2 1/2 ore, durata studiilor fiind asemănătoare cu cele prezentate pe larg în volumul al cincilea – ENI.

În continuare vom prezenta trei probleme din volumul al cincilea:[1)]

I. *Fie spaţiul organizat cu un reper ortonormat şi* $\mathcal{P}$ *un plan din spaţiu ce trece prin punctele* $A(2,-1,3)$, $B(3,0,4)$ *şi* $C(1,1,4)$. *Fie* $D(-1,3,a)$, $a\in\mathbb{R}$. *Atunci valoarea lui* a *pentru care* D *aparţine planului* $\mathcal{P}$ $(D\in\mathcal{P})$ *este*:

a) $a=-6$; b) $a=\dfrac{5}{3}$; c) $a=\dfrac{14}{3}$; d) $a=\dfrac{40}{3}$; e) $a=14$.

II. *Fie funcţia definită pe* $\mathbb{R}$ *prin relaţia*

$$F(x)=\int_0^x \frac{t^2+1}{(t^3+3t+2)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Atunci limita lui F *în punctul* $x=\infty$ *este*:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}F(x)=-\dfrac{1}{6}$; b) $\lim\limits_{x\to\infty}F(x)=0$; c) $\lim\limits_{x\to\infty}F(x)=\dfrac{1}{6}$;

d) $\lim\limits_{x\to\infty}F(x)=\dfrac{1}{2}$; e) $\lim\limits_{x\to\infty}F(x)=\infty$.

III. *Câte cuvinte diferite din 6 litere, care încep cu o consoană şi se termină cu o vocală putem forma folosind literele cuvântului „CASINO"?*

a) 360; b) 108; c) 72; d) 144; e) 216.

Iată, de asemenea, trei probleme inserate în volumul al şaptelea:

I. *Fie* $n\in\mathbb{N}^*$ *şi* $I_n=\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}}(\ln x)^n\mathrm{d}x$.

1. a) *Arătaţi că şirul* $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *este crescător pe intervalul* $[1,\mathrm{e}]$.

b) *Calculaţi* I_1.

c) *Determinaţi o relaţie de recurenţă între* I_n *şi* I_{n+1}.

2. *Arătaţi că* $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *este mărginit şi determinaţi limita sa.*

II. *În planul complex cu originea* O, *se consideră punctul* M, *al cărui afix are modulul* 1 *şi argumentul* $\dfrac{5\pi}{6}$. *Vom nota cu* r *rotaţia de centru* O *şi unghi* $\dfrac{\pi}{3}$ *şi cu* h *omotetia de centru* O *şi raport* -3. *Decideţi*:

a) $\left(\cos\dfrac{5\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\dfrac{5\pi}{6}\right)^6=-1$;

b) *imaginea lui* M *prin rotaţia* r *este punctul* $M_1\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2}\right)$;

c) *imaginea lui* M *prin omotetia* h *este punctul* M_2, *al cărui afix are modulul* -3 *şi argumentul* $\dfrac{5\pi}{6}$;

d) $r^3(M)=(r\cdot r\cdot r)(M)$ *este punctul* M_3, *simetricul lui* M *în raport cu* O.

III. *Se dau ecuaţiile diferenţiale*:

$$(E):\ y''+\frac{1}{16}y=0;\qquad (E'):\ -y''+\frac{1}{16}y=0.$$

Decideţi:

a) *singura soluţie comună a celor două ecuaţii este funcţia nulă*;

b) *soluţiile ecuaţiei* (E) *sunt funcţii definite pe* $\mathbb{R}$ *prin* $f(x)=A\cos\dfrac{x}{4}+B\sin\dfrac{x}{4}$, *unde* A *şi* B *sunt reale, arbitrare*;

c) *soluţiile ecuaţiei* (E) *sunt periodice cu perioada* 4π;

d) *ecuaţia* (E) *admite o singură soluţie care verifică condiţiile* $y(0)=\sqrt{2}$ *şi* $y'(0)=-\sqrt{2}$ *şi anume funcţia* g *definită pe* $\mathbb{R}$, *prin* $g(x)=\sqrt{2}\cos\dfrac{\pi}{4}-\sqrt{2}\sin\dfrac{\pi}{4}$.

[1)] O lucrare de concurs conţine, evident, mai multe probleme (N.A.)

Am prezentat aceste probleme pentru a ne face o idee asupra tipurilor de subiecte care se dau la admitere în ciclul al II-lea al învăţământului tehnic sau economic francez.

În încheiere, ne permitem să facem unele observaţii astăzi când România este membru al Uniunii Europene. Considerăm că marile colegii liceale ar trebui să aibă în bibliotecă aceste culegeri de probleme, pentru ca elevii să poată să se informeze asupra programei – ea fiind prezentată, în mare, în prefaţa culegerilor – şi a tipurilor de probleme care au fost date la concursurile din Franţa, de care poate şi ei sunt interesaţi. În altă ordine de idei şi comisia de elaborare a programei analitice pentru învăţământul liceal ar trebui să ţină seama de programa franceză – şi nu numai – astfel încât elevii noştri să nu fie vitregiţi prin absenţa unor capitole pe care nu le abordează la clasă.

Vom mai preciza că, începând cu anul şcolar 2004-2005, CUFR publică în perioada septembrie-octombrie, problemele de matematică şi fizică cu soluţii şi comentarii, propuse în anul curent, la concursurile de admitere. Pentru informarea mai concretă a celor interesaţi, vom da adresa unuia dinte autori: prof. *Ion Otărăşanu*, Colegiul Naţional Economic A. D. Xenopol, Bucureşti.

Grigore Bănescu

POŞTA REDACŢIEI

Marius Olteanu – S. C. Hidroconstrucţia S.A. Bucureşti, sucursala „Olt-Superior“ din Râmnicu-Vâlcea. Am primit articolul dumneavoastră cu titlul „Noi rafinări ale inegalităţii lui Durrande în tetraedru“ precum şi cele trei probleme propuse. Le vom supune atenţiei Comitetului de Redacţie.

Adrian Reisner – Centrul de calcul E. N. S. T. din Paris, Franţa. Articolul dumneavoastră cu titlul „Asupra comutantului unui endomorfism (al unei matrice pătratice)“ a fost primit la redacţie. Comitetul Redacţional va decide asupra oportunităţii publicării lui.

Gheorghe Costovici – Catedra de Matematică a Universităţii Gh. Asachi din Iaşi. Am primit materialul dumneavoastră intitulat „Unii monoizi izomorfi“. Comitetul Redacţional va hotărî în ce măsură el este publicabil.

Szász Róbert – Str. Rovinari, bl. 32/B114, Târgu Mureş. Problema propusă de dumneavoastră se află în atenţia Colegiului Redacţional.

Dan Radu