Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie
Tome 66 (114), No. 2, 2023, 157–175

Sur la hauteur des puissances d'un polynôme à coefficients entiers

par

Mihai Cipu(1), Gérard Kientega(2), Maurice Mignotte(3), Salifou Nikiema(4)

À Toma Albu et Constantin Năstăsescu pour leurs éminentes contributions qui inspireront des générations entières de mathématiciens

Résumé

La mesure de Mahler est multiplicative : pour tout polynôme P et tout entier positif n, on a $\mathrm{M}(P^n) = \mathrm{M}(P)^n$. La hauteur d'un polynôme ne possède pas cette propriété et le problème de la relation entre la hauteur d'un polynôme et de ses puissances se pose. John Abbott, en recherchant les polynômes dont les hauteurs des carrés sont plus petites que celle du polynôme initial, a conjecturé que la hauteur du carré d'un polynôme est au moins égale au double de celle du polynôme initial, c'est la *conjecture initiale d'Abbott*. Il a ajouté une généralisation de cette conjecture dans le cas des puissances quelconques. Le présent travail est consacré à l'étude de ces conjectures et leur démonstration dans certains cas.

Key Words : Polynômes, conjectures d'Abbott, hauteur de polynômes, racines de polynômes.
2020 Mathematics Subject Classification : Primary 11D09 ; Secondary 11B37, 11J86.

1 Introduction

Quel est l'ordre de grandeur du coefficient maximal en valeur absolue d'un polyôme comparé avec ceux de ces puissances entières ? Cette question prend ses origines dans l'étude comparée des bornes des facteurs des polynômes à coefficients entiers menée par J. Abbott [1]. L'auteur y a fait des conjectures et posé des questions. Les conjectures d'Abbott [1] qui nous intéressent dans ce travail sont les suivantes :

- Si P est un polynôme à coefficients entiers qui n'est pas un monôme alors

$$\mathrm{ht}(P^2) \geq 2\,\mathrm{ht}(P).$$

- Si P est un polynôme à coefficients entiers qui n'est pas un monôme et si $m \geq 2$ est un entier alors

$$\mathrm{ht}(P^m) \geq \binom{m}{\lfloor m/2 \rfloor} \mathrm{ht}(P).$$

La première de ces conjectures sera appelée "conjecture initiale d'Abbott" ou, tout simplement, "conjecture d'Abbott", la seconde "conjecture généralisée" ou encore m–conjecture quand la précision sera utile. Les auteurs Kientega et Nikiema [2] sont les pionniers dans les études de ces conjectures. Il a été démontré dans [2] que toutes les conjectures d'Abbott sont vraies pour les binômes. Désormais, nous supposerons que P est un polynôme à coefficients entiers qui n'est ni un monôme ni un binôme, autrement dit que P est la somme d'au moins trois monômes, ce qu'on note $\# P \geq 3$.

Nous débutons notre étude en précisant les notions de base qui seront utilisées, en généralisant un résultat des auteurs G. Kientega et S. Nikiema [2] et en faisant des réductions qui conduisent à un résultat donnant une condition pour qu'un polynôme ne vérifie pas la conjecture initiale.

La section 3 est consacrée à l'étude de la conjecture initiale, en utilisant l'égalité de Parseval pour donner des conditions suffisantes.

L'étude de la conjecture généralisée intervient à la section 4 où nous montrons qu'elle est vraie à partir d'une puissance m_0. Nous y établissons également des résultats donnant des conditions suffisantes sur le degré d, la puissance m et la hauteur pour qu'un polynôme vérifie la conjecture généralisée.

Les polynômes ayant trois et quatre monômes sont appelés respectivement trinômes et quadrinômes et il est démontré dans [3] qu'ils vérifient la conjecture initiale. A la section 5, nous montrons que les polynômes ayant respectivement cinq et six monômes vérifient tous la conjecture initiale. Nous évoquons les polynômes asymétriques, lacunaires et alternés respectivement dans les sections 6, 7 et 8. Nous montrons que ces polynômes vérifient la conjecture initiale.

La section 9 qui termine notre étude traite de la conjecture initiale en lien avec les racines des polynômes.

2 Notations et généralités

Tous les polynômes considérés dans la suite sont à coefficients entiers.

Pour un polynôme $P = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i$ de degré d, on pose

$$\mathrm{ht}(P) = \max_{0 \leq i \leq d} |a_i|, \quad \|P\| = \left(\sum_{i=0}^{d} |a_i|^2 \right)^{1/2}, \qquad \mathrm{L}(P) = \sum_{i=0}^{d} |a_i|$$

et

$$|P|_\infty = \max\{|P(z)| \,:\, |z| = 1\},$$

que l'on nomme respectivement la *hauteur*, la *norme*, la *longueur* et la *norme infinie* de P.

Nous utiliserons librement les inégalités [5]

$$\mathrm{ht}(P) \leq \|P\| \leq |P|_\infty \leq \mathrm{L}(P) \leq (d+1)\mathrm{ht}(P).$$

De plus, si $k = \mathrm{Card}\{0 \leq i \leq d \,:\, a_i \neq 0\}$, on posera $k = \# P$, le nombre de coefficients non nuls de P, alors, clairement,

$$\|P\| \leq \sqrt{k}\, \mathrm{ht}(P), \qquad \mathrm{L}(P) \leq k\, \mathrm{ht}(P).$$

Par conséquent

$$\mathrm{ht}(P^2) \geq |P|_\infty^2 / (2d+1) \geq |P|_\infty \, \mathrm{ht}(P)/(2d+1),$$

donc

$$|P|_\infty \geq 2(2d+1) \implies \mathrm{ht}(P^2) \geq 2\mathrm{ht}(P).$$

Il en résulte que

$$|P|_\infty \geq (2(2d+1)\,\mathrm{ht}(P))^{1/2} \implies \mathrm{ht}(P^2) \geq 2\mathrm{ht}(P)$$

et en particulier

$$\mathrm{ht}(P) \geq 2(2d+1) \implies \mathrm{ht}(P^2) \geq 2\mathrm{ht}(P).$$

Clairement, on a des résultats analogues pour P^k.

Kientega et Nikiema [3] ont démontré le résultat suivant.

Théorème A. *Soit $\ell < d$ maximal tel que $a_\ell \neq 0$, alors si $|a_i| \leq \max\{|a_d|, |a_\ell|\}$ pour tout indice i le polynôme P vérifie la conjecture initiale d'Abbott. C'est donc le cas pour tout polynôme de hauteur* 1.

On peut généraliser ce résultat comme suit.

Théorème 1. *Soit $\ell < d$ maximal tel que $a_\ell \neq 0$. Posons $H = \mathrm{ht}(P)$. Alors si ${a_d}^2 \geq 2H$ ou si $|a_d a_\ell| \geq H$ alors le polynôme P vérifie la conjecture initiale d'Abbott.*

Démonstration. En effet, on a $P^2 = {a_d}^2 X^{2d} + 2a_d a_\ell X^{d+\ell} + \cdots$ et donc

$$\mathrm{ht}(P^2) \geq \max\{{a_d}^2,\, 2|a_d a_\ell|\} \geq 2H.$$

. □

On en déduit aussitôt les corollaires ci-dessous.

Corollaire 1. *Soit $P = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i$ un polynôme à coefficients entiers non monôme avec $a_d a_0 \neq 0$ et soit ℓ le plus grand indice $< d$ tel que $a_\ell \neq 0$. On suppose que $\mathrm{ht}(P) = |a_\ell|$, alors*

$$\mathrm{ht}(P^2) \geq 2\,\mathrm{ht}(P).$$

Corollaire 2. *Soit $P = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i$ un polynôme à coefficients entiers non monôme avec $a_d a_0 \neq 0$ et $\mathrm{ht}(P) = 1$, alors*

$$\mathrm{ht}(P^2) \geq 2\,\mathrm{ht}(P).$$

La même idée est utile dans le cas des polynômes de la forme $P = aX^d + bQ$, avec $Q = cX^e + \cdots + fX^g + h$ et $abcfh \neq 0$. En regardant le coefficient du monôme sous-maximal de P^2 et celui de son polynôme réciproque, on voit qu'il vaut $2|abc|$ et $2b^2|fh|$, respectivement. Si on suppose de plus $|ac| \geq \mathrm{ht}(Q)$ on obtient

$$\mathrm{ht}(P^2) \geq 2|abc| \geq 2|b|\mathrm{ht}(Q) = 2\mathrm{ht}(P).$$

L'inégalité $\mathrm{ht}(P^2) \geq 2\mathrm{ht}(P)$ résulte aussi de l'hypothèse $|bfh| \geq \mathrm{ht}(Q)$.

Nous avons donc démontré le résultat suivant.

Théorème 2. *Soit $P = aX^d + bQ$ un polynôme de degré d, avec $Q = cX^e + \cdots + fX^g + h$ et $abcfh \neq 0$. Alors si $|ac| \geq \mathrm{ht}(Q)$ ou $|bfh| \geq \mathrm{ht}(Q)$, le polynôme P vérifie la conjecture initiale d'Abbott.*

Une variante de ce théorème est basée sur l'observation que, si on garde les notations introduites dans son énoncé, on a $P^2 = a^2X^{2d} + 2abX^dQ + b^2Q^2$ et, en supposant que la conjecture d'Abbott est vraie pour Q,

$$\mathrm{ht}(P^2) \geq b^2\mathrm{ht}(Q^2) - 2|ab|\mathrm{ht}(Q) \geq 2|b|(|b| - |a|)\mathrm{ht}(Q) = 2(|b| - |a|)\mathrm{ht}(P).$$

Théorème 3. *Soit $P = aX^d + bQ$ un polynôme de degré d, avec $|b| > |a|$. Si le polynôme Q vérifie la conjecture initiale d'Abbott, alors* $\mathrm{ht}(P^2) \geq 2\mathrm{ht}(P)$.

Pour la conjecture généralisée d'Abbott on a le résultat suivant.

Théorème 4. *Soit P de hauteur H tel que ${a_d}^2 \geq 2H$, alors il vérifie toutes les conjectures d'Abbott.*

Ceci vient d'être démontré pour $m = 2$. Considérons $m \geq 3$. Alors $P^m = {a_d}^m X^{md} + \cdots$ et donc $\mathrm{ht}(P^m) \geq |a_d|^m \geq {a_d}^2 \cdot 2^{m-2} \geq 2^{m-1} H$, ce qui implique le résultat puisque $\binom{m}{\lfloor m/2 \rfloor} \leq 2^{m-1}$ d'après un lemme démontré plus loin, le Lemme 1 plus précisément.

Réductions.

– On voit facilement que pour chacune de ces conjectures on peut se ramener au cas où P ne s'annule pas à l'origine, dans la suite on supposera donc toujours — sans le rappeler systématiquement — $P(0) \neq 0$.

– Comme démontré dans [3], si une des conjectures d'Abbott est vraie pour un polynôme P de degré d, elle est encore vraie pour son polynôme réciproque $\tilde{P}(X) = X^d \cdot P(1/X)$. En effet $\mathrm{ht}(\tilde{P}) = \mathrm{ht}(P)$ et $\widetilde{P^m} = (\tilde{P})^m$.

– Si les polynômes P et Q vérifient $Q(X) = P(-X)$ alors, à nouveau, $\mathrm{ht}(Q) = \mathrm{ht}(P)$ et $Q(X)^m = P(-X)^m$, donc si une des conjectures d'Abbott est vraie pour P, elle est aussi vraie pour Q, et réciproquement.

– S'il existe un entier $e \geq 2$ tel que $P(X) = Q(X^e)$ alors, encore, $\mathrm{ht}(Q) = \mathrm{ht}(P)$ et $P(X)^m = Q(X^e)^m$, donc si une des conjectures d'Abbott est vraie pour P, elle est aussi vraie pour Q, et réciproquement. On pourra donc toujours supposer que, si $P = \sum a_i X^i$, alors le pgcd des indices i tels que $a_i \neq 0$ est égal à 1.

– Terminons cette liste par une remarque triviale : si P vérifie une des conjectures d'Abbott, il en est alors de même pour le polynôme $-P$.

Grâce à ces réductions on voit que l'on peut se limiter à considérer des polynômes pour lesquels $a_d > 0$, $a_{d-1} \geq 0$ et $0 < |a_0| \leq a_d$, la preuve est laissée en exercice au lecteur.

Si on applique le théorème 1 au polynôme réciproque de P, on aboutit au résultat suivant.

Théorème 5. *Soit P un polynôme à coefficients entiers qui n'est pas un monôme et qui ne satisfait pas la conjecture initiale d'Abbott. Soit $\ell < d$ l'indice maximal tel que $a_\ell \neq 0$ et soit $n > 0$ minimal tel que $a_n \neq 0$. Alors*

$$\max\{|a_0|, |a_n|, |a_\ell|, |a_d|\} < \mathrm{ht}(P).$$

Donc P possède au moins cinq termes non nuls, ainsi $\deg(P) \geq 4$.

3 Abbott et Parseval

Pour un polynôme $P = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i$ de degré d, on sait (Parseval) que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |P(e^{it})|^2 dt = \|P\|^2.$$

On sait aussi que (voir [7]), si $\mu > \lambda > 0$, alors

$$\left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |P(e^{it})|^\lambda dt \right)^{1/\lambda} \leq \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |P(e^{it})|^\mu dt \right)^{1/\mu},$$

avec inégalité stricte si P n'est pas un monôme.

Soit maintenant $P = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i$ non nul, non monôme, et $P^2 = \sum_{j=0}^{2d} b_j X^j$. Alors

$$\left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |P(e^{it})|^2 dt \right)^{1/2} < \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |P(e^{it})|^4 dt \right)^{1/4}$$

et donc

$$\sum_{i=0}^{d} |a_i|^2 < \left(\sum_{j=0}^{2d} |b_j|^2 \right)^{1/2}.$$

Si $K = \#\,(P^2)$, il vient

$$\|P\|^2 < \sqrt{K}\,\mathrm{ht}(P^2).$$

On voit facilement que $K \leq \min\{k(k+1)/2, 2d+1\}$. Ainsi, par exemple,

$$\|P\|^2 \geq 3\sqrt{K} \implies \mathrm{ht}(P^2) \geq 4,$$

donc

$$\|P\|^2 \geq 3\sqrt{2d+1} \implies \mathrm{ht}(P^2) \geq 4.$$

Résumons ce qui précède dans le résultat suivant.

Théorème 6. *Soit P un polynôme non nul de degré d, qui n'est pas un monôme, et soit $\ell = \mathrm{Card}\{i : |a_i| = \mathrm{ht}(P)\}$, alors, avec les notations ci-dessus,*

$$\sqrt{\ell}\,\mathrm{ht}(P)\,\|P\| < \sum_{i=0}^{d} |a_i|^2 < \left(\sum_{j=0}^{2d} |b_j|^2 \right)^{1/2} \leq (2d+1)^{1/2}\,\mathrm{ht}(P^2).$$

Par conséquent, si $h = \mathrm{ht}(P)$, alors

$$\|P\| \geq (2d+1)^{1/4}\sqrt{2h} \implies \mathrm{ht}(P^2) > 2\,\mathrm{ht}(P),$$

et donc, si $\mathrm{M}(P)$ est la mesure de P (qui vérifie $\mathrm{M}(P) \leq \|P\|$),

$$\mathrm{M}(P) \geq (2d+1)^{1/4}\sqrt{2h} \implies \mathrm{ht}(P^2) > 2\,\mathrm{ht}(P).$$

Remarque 1. *Si on applique le même argument aux polynômes P et P^m, où $m \geq 2$ est un entier, on obtient*

$$\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |P(e^{it})|^2 dt\right)^{1/2} < \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |P(e^{it})|^{2m} dt\right)^{1/(2m)}$$

et donc

$$\sqrt{\ell}\,\mathrm{ht}(P)\cdot \|P\|^{m-1} < \sqrt{md+1}\cdot \mathrm{ht}(P^m).$$

Corollaire 3. *Pour chaque degré d il existe au plus un nombre fini de $P \in \mathbb{Z}[X]$ pour lesquels la conjecture initiale d'Abbott est fausse, de plus ils vérifient tous $\|P\| < 2\sqrt{2d+1}$.*

Corollaire 4. *Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ de degré d et soit $\ell = \mathrm{Card}\{i : |a_i| = \mathrm{ht}(P)\}$, alors*

$$\|P\| \geq 2\sqrt{(2d+1)/\ell} \implies \mathrm{ht}(P^2) > 2\,\mathrm{ht}(P).$$

En particulier, si P est un polynôme réciproque de degré impair alors

$$\|P\| \geq \sqrt{2(2d+1)} \implies \mathrm{ht}(P^2) > 2\,\mathrm{ht}(P).$$

Corollaire 5. *Soit $P = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i \in \mathbb{Z}[X]$ avec $a_d \neq 0$. On pose $J = \{i : a_i = 0\}$. Si* $\mathrm{Card}(J) \leq 1$ *et si pour tout $i \notin J$ on a $|a_i| \geq 3$, alors la conjecture initiale d'Abbott est vraie pour $d \geq 4$.*

Démonstration. Comme J est de cardinal au plus 1, P a au moins d coefficients non nuls et on a

$$\|P\|^2 = \sum_{i=0}^{d} |a_i|^2 \geq 9\cdot \sum_{i\notin J} 1 \geq 9d \geq 4(2d+1)$$

pour $d \geq 4$. ☐

Corollaire 6. *Supposons que pour tout i n'appartenant pas à J on ait $|a_i| \geq 3$. Alors P vérifie la conjecture d'Abbott si $d \geq 9k-5$, où $k = \mathrm{Card}(J)$.*

Démonstration. En utilisant la même idée que ci-dessus, on a

$$\|P\|^2 = \sum_{i=0}^{d} |a_i|^2 \geq 9 \sum_{i\notin J} 1 = 9(d+1-k).$$

La condition $\|P\|^2 \geq 4(2d+1)$ se traduit par $d \geq 9k-5$. ☐

On peut remarquer que la condition ci-dessus équivaut à $k \leq (d+5)/9$.

Remarque 2. *Ces inégalités permettent de vérifier la conjecture initiale d'Abbott pour $d = 5$ et, compte tenu des résultats de [3], pour tout $d \leq 5$.*

Expériences. Concernant le corollaire 3, des calculs sur ordinateur (qui prennent environ 2 heures) montrent que la conjecture d'Abbott est vraie en degré ≤ 9. En degré dix il nous a fallu 57 heures pour la confirmer. En degré plus grand les calculs deviennent beaucoup trop longs. Nous avons vérifié que la conjecture initiale d'Abbott est encore vraie dans les cas suivants

$$d = 11 \textit{ et } \mathrm{ht} \leq 2, \quad d = 12 \textit{ et } \mathrm{ht} \leq 2.$$

4 Conjecture généralisée

Lemme 1. *Pour tout entier $n \geq 3$ on a $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \leq 3 \cdot 2^{n-3}$.*

Démonstration. Le résultat est vrai pour $n = 3$ ou 4, et pour $n > 4$ on raisonne par récurrence.

Supposons donc n impair, disons $n = 2m + 1$, pour lequel le résultat soit vrai, alors

$$\binom{n+1}{\lfloor (n+1)/2 \rfloor} = \frac{2m+2}{m+1} \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} = 2 \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \leq 3 \cdot 2^{n-2},$$

d'où le résultat par récurrence.

Pour $n = 2m$ pair, on a

$$\binom{n+1}{\lfloor (n+1)/2 \rfloor} = \frac{2m+1}{m+1} \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} < 2 \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \leq 3 \cdot 2^{n-2}.$$

∎

Remarque 3. *On sait* [6] *que*

$$\sqrt{2\pi n}(n/e)^n < n! < \sqrt{2\pi n}(n/e)^n \, e^{1/(12n)},$$

donc

$$\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \sim \frac{\sqrt{2\pi n}(n/e)^n}{2\pi(n/2)(n/(2e))^n} \sim \frac{2^n}{\sqrt{\pi n/2}},$$

mais ce raffinement n'est pas très facile à utiliser.

Par conséquent, tenant compte de Remarque 3, on a

$$\|P\| \geq 2(md+1)^{1/(2m-2)} \implies \mathrm{ht}(P^m) > \binom{m}{\lceil m/2 \rceil} \mathrm{ht}(P).$$

Ceci montre que, pour d fixé, toutes les conjectures d'Abbott ont lieu sauf peut-être pour un nombre fini de polynômes (dont la hauteur est explicitement bornée). Mieux, on constate que pour tout polynôme P pour lequel $\|P\| > 2$ il existe un entier m_0 tel que, pour $m \geq m_0$ la conjecture d'Abbott pour P^m est vraie. On notera que les seuls polynômes non monômes qui vérifient $\|P\| \leq 2$ sont les polynômes de hauteur 1 qui comportent au plus quatre coefficients non nuls. Puisque la conjecture générale est vraie pour les binômes, il ne reste que les trinômes et les quadrinômes de hauteur 1.

Considérons maintenant le cas des trinômes de hauteur 1. Nous présentons d'abord quelques réductions.

Comme vu plus haut, on peut toujours supposer que si I est l'ensemble des indices des coefficients non nuls de P alors le pgcd des éléments de I est égal à 1.

Si $P(X) = X^r + \varepsilon_1 X^s + \varepsilon_2$, $r > s > 0$, est un trinôme de hauteur 1 on peut supposer que r et s ne sont pas tous deux pairs. On peut aussi supposer $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \neq (1, 1)$, le cas des polynômes à coefficients positifs ayant été traité dans [2]. Si $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (-1, -1)$, en remplaçant P par l'opposé de son polynôme réciproque, on aboutit au cas $P = X^r + X^s - 1$, c'est donc le seul qui reste à étudier. Le résultat qui suit sera particulièrement utile.

Lemme 2. *Soit* $P = X^r + X^s - 1$, $r > s > 0$, *alors*

$$\max\{|P(z)| \,:\, |z| = 1\} \geq \sqrt{5}.$$

Si r et s sont impairs, c'est évident puisque dans ce cas $P(-1) = -3$. Dans le cas général posons $\zeta = e^{2i\pi/r}$. Il existe alors un exposant j, avec $0 < j < r$, tel que la partie réelle de ζ^{js} soit ≤ 0, on a alors $|P(\zeta^{js})| \geq \sqrt{5}$. (Remarque : la valeur $\sqrt{5}$ est atteinte pour le polynôme $X^2 + X - 1$.)

Ainsi, pour un trinôme P de hauteur 1 à coefficients entiers on a

$$\max\{|P(z)^m|; |z| = 1\} \geq (\sqrt{5})^m$$

et donc

$$(3m + 1)\,\mathrm{ht}(P^m) \geq 5^{m/2}.$$

Ceci permet de conclure que, pour P, la m–conjecture d'Abbott est vraie pour tout m assez grand.

Le cas des quadrinômes P de hauteur 1 est plus facile puisque pour un tel P on a $\|P\| = 2$ et donc $\max\{|P(z)^m| \,:\, |z| = 1\} > 2$, si bien que l'argument ci-dessus s'applique. Nous avons donc démontré le résultat suivant.

Théorème 7. *Soit* P *un polynôme à coefficients entiers de hauteur* 1 *qui n'est pas un monôme, il existe alors un entier* m_0 *tel que, pour tout* $m \geq m_0$, *on ait*

$$\mathrm{ht}(P^m) \geq \binom{m}{\lfloor m/2 \rfloor}.$$

Pour illustrer ce qui précède nous allons traiter un exemple, celui du trinôme $T = X^2 + X - 1$. On a vu que le maximum de $|T(z)|$ sur le cercle unité vaut $\sqrt{5}$, donc — d'après la démonstration qui précède — on a

$$\mathrm{ht}(T^m) \geq \frac{5^{m/2}}{3m + 1}$$

et on vérifie que, pour $m > 35$, on a

$$(\sqrt{5}/2)^m > (3m + 1)/2.$$

Pour conclure, il suffit de traiter (en 0.03 s sur ordinateur) les cas $2 \leq m \leq 35$.

Exemple 1. Les trinômes $T = X^2 \pm X \pm 1$ vérifient tous les conjectures d'Abbott :

$$\mathrm{ht}(T^m) \geq \binom{m}{\lfloor m/2 \rfloor}.$$

Considérons maintenant le cas des quadrinômes de hauteur 1 à coefficients entiers,

$$Q(X) = X^r + \varepsilon_1 X^s + \varepsilon_2 X^t + \varepsilon_3,$$

où les ε_i valent ± 1 et $r > s > t > 0$. Alors le développement de Q^2 est

$$X^{2r} + X^{2s} + X^{2t} + 1 + 2\varepsilon_1 X^{r+s} + 2\varepsilon_2 X^{r+t} + 2\varepsilon_3 X^r + 2\varepsilon_1\varepsilon_2 x^{s+t} + 2\varepsilon_1\varepsilon_3 X^s + 2\varepsilon_2\varepsilon_3 X^t.$$

Dans ce développement, les seules simplifications possibles portent sur les paires $(r, 2s)$, $(r+t, 2s)$ ou $(r, s+t)$, clairement au plus une simplification peut avoir lieu. Il en résulte que

$$\left\|Q^2\right\|^2 \geq 1+1+1+1+2^2+2^2+2^2+2^2=20,$$

et donc

$$\max\{|Q(z)|\,:\,|z|=1\} \geq 20^{1/4}.$$

Pour les polynômes de hauteur 1 à coefficients entiers qui ont au moins cinq coefficients non nuls on a directement

$$\max\{|P(z)|\,:\,|z|=1\} \geq \|P\| \geq \sqrt{5}.$$

Si nous regroupons les informations précédentes, nous obtenons pour tout polynôme de hauteur 1 à coefficients entiers qui n'est pas un monôme, l'inégalité

$$\max\{|P(z)|\,:\,|z|=1\} \geq 20^{1/4}.$$

Alors la démonstration ci-dessus conduit au résultat suivant.

Proposition 1. *Pour tout entier $d>0$ fixé il existe un entier m_0 tel que, tout polynôme P de hauteur 1 à coefficients entiers de degré d qui n'est pas un monôme vérifie*

$$\operatorname{ht}(P^m) \geq \binom{m}{\lfloor m/2 \rfloor} \operatorname{ht}(P)$$

pour tout $m \geq m_0$, et pour ceci il suffit que l'on ait

$$2 \cdot (5/4)^{m_0/4} \geq d m_0 + 1.$$

Dans le même esprit on peut aussi démontrer le résultat suivant.

Proposition 2. *Pour tout entier $d \geq 79$ tout polynôme P de hauteur 1 à coefficients entiers tous non nuls de degré d vérifie toutes les conjectures d'Abbott.*

Le seul ingrédient original de la preuve est qu'un polynôme comme dans l'énoncé vérifie

$$\max\{|P(z)|\,:\,|z|=1\} \geq \sqrt{d+1},$$

de plus on utilise la valeur exacte du coefficient du binôme.

Le cas des polynômes de hauteur >1 est plus facile. Soit en effet P un polynôme à coefficients entiers de hauteur $H \geq 2$ et de degré d qui n'est pas un monôme. Nous supposons aussi que P n'est pas un binôme puisque, dans ce cas, on sait que toutes les conjectures d'Abbott ont lieu. Alors $\|P\| \geq \sqrt{H^2+2}$ et, en tenant compte du Lemme 1, pour $m \geq 3$, la m–conjecture d'Abott a lieu si

$$(H^2+2)^{m/2} \geq 3 \cdot 2^{m-3}(md+1)H$$

donc si

$$6^{m/2-1} \geq 2^{m-3}(md+1),$$

ce qui équivaut à

$$\sqrt{3/2} \geq \big(3(md+1)/4\big)^{1/m}.$$

Nous avons donc démontré le résultat suivant.

Proposition 3. *Soit $d \geq 2$ un entier fixé. Il existe alors un entier m_0 tel que si P est un polynôme à coefficients entiers, qui n'est pas un monôme, de hauteur $H \geq 2$ et de degré d alors il vérifie la m–conjecture d'Abbott pour tout $m \geq m_0$. Il suffit de prendre m_0 tel que*

$$\sqrt{3/2} \geq \big(3(m_0 d + 1)/4\big)^{1/m_0}.$$

Pour illustrer la proposition ci-dessus voici une liste de valeurs de m_0 en termes de d.

d	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
m_0	16	19	21	22	23	24	25	26	27	27	28	28	29	29	29	30	30

Avec des hypothèses plus fortes on peut aussi obtenir des résultats du type suivant.

Proposition 4. *Soit $d \geq 3$ un entier fixé et soit P un polynôme à coefficients entiers, qui n'est pas un monôme, de degré d tel que*

$$\max\{|P(z)| \,:\, |z| = 1\} \geq d,$$

alors il vérifie la m–conjecture d'Abbott pour tout $m \geq m_0$, pourvu que m_0 vérifie

$$d \geq 2(m_0 d + 1)^{1/(m_0 - 1)}.$$

Pour illustrer cette proposition voici à nouveau une liste de valeurs de m_0 en termes du degré d :

d	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
m_0	10	6	5	4	4	4	4	4	4	4

et on peut prendre $m_0 = 3$ pour $d \geq 13$.

Avec des hypothèses encore plus fortes, on obtient un résultat plus complet.

Proposition 5. *Soit $d \geq 2$ un entier fixé et soit P un polynôme à coefficients entiers, qui n'est pas un monôme, de degré d tel que*

$$\max\{|P(z)| \,:\, |z| = 1\} \geq 4d + 2,$$

alors il vérifie toutes les conjectures d'Abbot.

En conséquence, pour tout polynôme à coefficients entiers, qui n'est pas un monôme, il existe un entier k_0 tel que pour tout $k \geq k_0$ le polynôme P^k vérifie toutes les conjectures d'Abbot. De plus, on voit que, pour tout $d \geq 2$ fixé il n'existe qu'un nombre fini de polynômes à coefficients entiers, qui ne sont pas des monômes, pour lesquels toutes les conjectures d'Abbott ne sont pas vraies, on voit même que le nombre d'exceptions de degré d est au plus $(8d + 3)^{d+1}$.

5 Polynômes avec au plus six monômes

Ici, nous changeons radicalement de notations et nous écrivons

$$P = AX^a + BX^b + CX^c + DX^d + \cdots ,$$

où $a > b > c > d > \cdots$ avec A, B, C, D, ... non nuls. On suppose bien sûr $P(0) \neq 0$ et $\operatorname{pgcd}(a, b, \ldots) = 1$. On dit que AX^a est le premier terme de P, BX^b est le second terme, *etc.*.. et on désigne par k le nombre de termes de P. On note H la hauteur de P.

Soit ℓ l'ordre du dernier terme de P de hauteur H. Quitte à remplacer P par son polynôme réciproque, on peut supposer que $\ell \geq (k+1)/2$. Le même argument permet aussi de supposer que les termes de P d'ordre 1, 2, ..., $k - \ell$ sont tous de hauteur $< H$.

On a vu que si $|A| = H$ ou si $|B| = H$ alors la conjecture initiale d'Abbott a lieu. Si P ne vérifie pas la conjecture d'Abbott on a donc $\ell \geq 2$ et, nécessairement, $k \geq 5$, ainsi P comporte au moins cinq coefficients non nuls. On va maintenant s'intéresser au cas où P possède exactement cinq coefficients non nuls.

Soit $P = AX^a + BX^b + CX^c + Dx^d + E$ avec $a > b > c > d > 0$ un "pentanôme" avec $\operatorname{ht}(P) = H > 1$. En regardant les monômes obtenus en élevant P au carré, on se rend compte que la conjecture d'Abbott est vérifiée pour P sauf peut-être s'il y a une simplification pour chaque terme contenant $\pm H$. De plus on voit aussitôt que le seul cas où cette conjecture peut ne pas avoir lieu est celui de $|C| = H$. Il suffit donc d'examiner les termes d'exposants $a + c > b + c > 2c > c + d > c$.

Pour le terme de degré $a + c$ la seule possibilité pour qu'il y ait une simplification est

$$a + c = 2b;$$

nous posons $a = b + \delta$, donc $c = b - \delta$.

Pour le terme de degré c la seule possibilité est

$$c = 2d.$$

Pour le terme de degré $b + c$ il y a deux possibilités :

$$\text{(i)} \qquad a = b + c, \qquad \text{(ii)} \qquad a + d = b + c.$$

Dans le cas (i), on a $b + \delta = 2b - \delta$ donc $a = 3\delta$, $b = 2\delta$ et $c = \delta = 2u$. Comme on peut supposer que les exposants de P sont premiers entre eux on a $u = 1$ et finalement $P = AX^6 + BX^4 + CX^2 + DX + E$.

Dans le cas (ii), on a

$$d = b - 2\delta.$$

Pour le terme de degré $c + d$ on voit que $c + d = 3d$. Ceci montre que le cas (i) est impossible. Dans le cas (ii) on voit que nécessairement $b = c + d$, donc $b = 3d$, $d = \delta$, puis $\delta = 1$ (puisque le pgcd des exposants est 1). Ainsi, $P = AX^4 + BX^3 + CX^2 + DX + E$, cas pour lequel on sait que la conjecture d'Abbott a lieu.

En conclusion on voit que la conjecture initiale d'Abbott est vraie pour les pentanômes.

Considérons maintenant un "hexanôme"

$$P = AX^a + BX^b + CX^c + DX^d + EX^e + F$$

qui ne vérifie pas la conjecture d'Abbott. Dans ce cas on peut supposer que l'on a $|D| = H \geq 2$ et $\max\{|A|, |B|, |E|, |F|\} < H$.

Afin que P^2 ne contienne pas le terme $2ADX^{a+d}$ de hauteur $\geq 2H$, on doit avoir

$$(i)\ a+d = b+c, \quad \text{ou } (ii)\ a+d = 2b, \quad \text{ou } (iii)\ a+d = 2c.$$

En considérant les termes de degré $b+d$ ou $c+d$ dans le développement de P^2, on conclut qu'on a

$$b + d \in \{a, a+e, 2c\} \tag{5.1}$$

et

$$c + d \in \{a, a+e, b, b+e\} \tag{5.2}$$

Comme le terme $2DFX^d$ de P^2 est de hauteur $\geq 2H$, on a

$$d = 2e.$$

De plus, en considérant le terme $2DEX^{d+e}$, on conclut que $3e = d + e$ soit égal à un de c, b et a.

Regardons premièrement la situation dans le cas (i).

Pour $c = 3e$, en tenant compte de la relation (5.2), on tire la conclusion que soit a soit b est égal à $4e$ ou $5e$. Mais alors la relation (i) montre que l'autre en est de même puisque $a - b = c - d = e$. Si $b = 5e$ alors on a $a = 6e$, si $b = 4e$ alors $a = 5e$, et si $a = 5e$ alors $b = 4e$ (notons que $a = 4e$ implique la contradiction $b = 3e = c$). Comme les exposants de P sont premiers entre eux on a $e = 1$ et par consequant le degré de P est au plus 6. Mais pour un tel polynôme on a déjà vérifié la conjecture initiale de Abbott.

Examinons la possibilité qu'on ait $b = 3e$. Vu la relation (5.1), pour $a \geq b + c - e = 4e$, de la relation (i) on obtient la contradiction $c = a + d - b \geq 4e - e = b$. Ainsi, on a nécessairement $5e = 2c$, donc on déduit comme auparavant que $e = 2$ et P a degré 7. En conclusion on voit que la conjecture initiale de Abbott est vraie pour P.

Supposons qu'on a $a = 3e$. Alors les relations (i) et (5.1) impliquent la contradiction $7e = b + c \in \{5e, 6e, 2c\}$.

Maintenant nous considérons le cas (ii). Pour $c = 3e$ on voit comme auparavant qu'on a $a \in \{4e, 5e\}$ ou $b \in \{4e, 5e\}$. La première possibilité conduit à $2b = a + d \in \{6e, 7e\}$, donc $b = c$ ou $2b = 7e$, et finalement à la conclusion que P est de degré 10. La deuxième possibilité entraîne tout de suite que le degré est au plus 8.

Si on a $b = 3e$, de la rélation (ii) on obtient $a = 4e$. En considérant la relation (5.2), on voit que ceci conduit à la contradiction $c \in \{e, b, d\}$.

Si $a = 3e$, alors $2b = 5e$. De la relation (5.2) on déduit $c \leq a + e - d = 2e = d$, absurde.

Ainsi, dans le cas (ii), la conjecture de Abbott est établie grâce aux calculs explicites pour degré au plus 10.

Il nous reste le cas (iii). Si $c = 3e$, alors on déduit $a = 4e$. Ceci et (5.1) impliquent $b + d \in \{a, a+e, 2c\}$, d'où on obtient la contradiction $b \in \{a, c, d\}$. Pour $b = 3e$, la relation (5.2) devient $c + 2e \in \{2c - 2e, 2c - e, 4e\}$, ce qui montre qu'on a $c = 4e > b$ ou $c = b$ ou $c = d$, ce qui est absurde. Finalement, si on supppose $a = 3e$, alors de la relation (5.1) on conclut que $b \in \{a, e, d\}$, encore une contradiction. Donc, le cas (iii) n'est pas possible.

Résumons ce qui précède dans le résultat suivant.

Théorème 8. *La conjecture initiale de Abbott est valide pour tout polynôme à coefficients entiers avec au plus six termes.*

6 Conjecture d'Abbott et polynômes asymétriques

Dans cette section on étudie les polynômes dont un des coefficients est très grand par rapport aux autres.

Proposition 6. *Soit* $P = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i \in \mathbb{Z}[X]$ *un polynôme non nul tel qu'il existe un indice* ℓ *pour lequel* $|a_\ell| \geq \frac{7}{6} \sum_{i \neq \ell} |a_i|$. *Alors* $\mathrm{ht}(P^2) \geq 2\,\mathrm{ht}(P)$.

Démonstration. On a

$$P^2 = \sum_{i=0}^{2d} b_i X^i \qquad \text{où} \qquad b_{2\ell} = \sum_{i+j=2\ell} a_i a_j = a_\ell^2 + \sum_{\substack{i+j=2\ell \\ i\neq j}} a_i a_j .$$

Donc

$$\left| \sum_{\substack{i+j=2\ell \\ i\neq j}} a_i a_j \right| < \left(\sum_{i\neq \ell} |a_i| \right)^2 \leq \frac{36}{49} \left| a_\ell \right|^2 .$$

Par suite

$$|b_{2\ell}| > \frac{13}{49} \left| a_\ell \right|^2 = \frac{13}{49}\,\mathrm{ht}(P)^2 .$$

Pour $|a_\ell| \geq 8$ on obtient

$$|b_{2\ell}| > \frac{13 \cdot 8}{49} \left| a_\ell \right| > 2\,\mathrm{ht}(P).$$

Pour $|a_\ell| = 7$ on a $|b_{2\ell}| > 13$, donc $|b_{2\ell}| \geq 14 = 2\,\mathrm{ht}(P)$. Enfin, quand $|a_\ell| \leq 6$ alors $\sum_{i\neq\ell} |a_i| \leq 5$, ce qui montre que P a au plus six termes. Dans ce cas, le Théorème 8 permet de conclure que le résultat cherché a toujours lieu. $\square$

Proposition 7. *Soit* $P \in \mathbb{Z}[X]$ *de la forme* $P = cX^d + aQ$, $\deg(Q) < d$, $a \in \mathbb{Z}$, *avec* $c \geq 1$ *et* $|a| \geq 2\,\mathrm{ht}(Q)$. *Alors* $\mathrm{ht}(P^2) \geq 2\,\mathrm{ht}(P)$.

Démonstration. Puisque

$$\mathrm{ht}(P) = \max\left\{c, |a|\,\mathrm{ht}(Q)\right\},$$

pour $c > |a|\,\mathrm{ht}(Q)$ on a $\mathrm{ht}(P) = c \geq 2$ et

$$\mathrm{ht}(P^2) \geq c^2 \geq 2c = 2\,\mathrm{ht}(P).$$

Dans le cas $c \leq |a|\,\mathrm{ht}(Q)$, le terme libre de P^2 est au moins a^2. D'après l'hypothèse, ceci est minoré comme suit :

$$a^2 \geq 2\ |a|\,\mathrm{ht}(Q) = 2\,\mathrm{ht}(P),$$

donc

$$\mathrm{ht}(P^2) \geq a^2 \geq 2\,\mathrm{ht}(P).$$

$\square$

Question : Si $P \in \mathbb{Z}[X]$ non nul, sait-on si $\mathrm{ht}(P^2) \geq \mathrm{ht}(P)$?

Si c'est vrai alors plus haut on a

$$\mathrm{ht}(P^2) \geq a^2\,\mathrm{ht}(Q^2) - 2\,c|a|\,\mathrm{ht}(Q) \geq a^2\,\mathrm{ht}(Q) - 2\,c|a|\,\mathrm{ht}(Q)$$

et il suffit de supposer $|a| \geq 2c + 2$.

Par ailleurs, si Q vérifie la conjecture d'Abbott le polynôme $P = X^d + aQ$ vérifie également cette conjecture lorsque $|a| \geq 2$.

Remarque 4. *La démonstration montre aussi que si* $Q \in \mathbb{Z}[X]$ *avec* $\mathrm{ht}(Q^2) \geq 4\,\mathrm{ht}(Q)$ *et* $P = X^d + Q$ *oú* $d > \deg(Q)$ *alors la conjecture initiale d'Abbott est vraie.*

Mieux encore si $\mathrm{ht}(Q^2) \geq \lambda\,\mathrm{ht}(Q)$, $Q \neq 0$, *avec* $\lambda > 2$ *alors si* $P = X^d + Q$ *et* $\deg(Q) < d$ *on a*

$$\mathrm{ht}(P^2) \geq \mathrm{ht}(Q^2) - 2\,\mathrm{ht}(Q) \geq (\lambda - 2)\,\mathrm{ht}(Q)$$

et donc

$$\mathrm{ht}(P^2) \geq (\lambda - 2)\,\mathrm{ht}(P).$$

On peut aussi démontrer la proposition suivante, qui généralise des résultats de Kientega et Nikiema [3].

Proposition 8. *Soit* $P = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i$ *un polynôme à coefficients entiers non constant avec* $a_d a_0 \neq 0$ *et soit* ℓ *le plus grand indice tel que* $\mathrm{ht}(P) = |a_\ell|$. *On suppose que les coefficients* $a_d, \ldots, a_\ell$ *sont tous* ≥ 0 *alors*

$$\mathrm{ht}(P^2) \geq 2\,\mathrm{ht}(P).$$

Démonstration. Si $\ell = d$, le résultat est évident. Si $\ell < d$, la démonstration est très facile. En effet, avec les notations utilisées plus haut,

$$\mathrm{ht}(P^2) \geq b_{d+\ell} = \sum_{i=0}^{\ell} a_{d-i} a_{\ell+i} \geq 2 a_d a_\ell \geq 2 a_\ell = 2\,\mathrm{ht}(P).$$

□

Corollaire 7. *Soit* $P = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i$ *un polynôme à coefficients entiers non monôme avec* $a_d a_0 \neq 0$ *et tel qu'il existe un indice* h, $0 \leq h < d$, *tel que* $a_i \geq 0$ *pour* $i \geq h$ *et* $a_i \leq 0$ *pour* $i < h$, *alors*

$$\mathrm{ht}(P^2) \geq 2\,\mathrm{ht}(P).$$

Soit P vérifiant les hypothèses ci-dessus et, avec des notations évidentes, posons $P = P_1 - P_2$. Quitte à remplacer P par son opposé on peut supposer que $\mathrm{ht}(P_1) = \mathrm{ht}(P)$. La conclusion résulte alors de la Proposition 8.

7 Polynômes lacunaires

On appelle *valuation* d'un polynôme P, et on note $\mathrm{val}(P)$, le plus grand entier r tel que X^r divise P, ainsi $\mathrm{val}(X^3 - X^2) = 2$. Dans [3] le résultat suivant est démontré.

Théorème B. *Soit $P = a_d X^d + a_r X^r + Q$ un polynôme à coefficients entiers de degré d où Q est un polynôme à coefficients ≥ 0 de degré s avec $r > 2s$, alors P vérifie la conjecture d'Abbott.*

Ici nous démontrons la variante suivante.

Théorème 9. *Soit $P = Q + R$ un polynôme à coefficients entiers de degré d où $\mathrm{val}(Q) = r$, $\deg(R) = s$ avec $r > 2s$. On suppose que $\mathrm{ht}(P) = \mathrm{ht}(R)$ et que R vérifie la conjecture d'Abbott, alors il en est de même pour P.*

Démonstration. La preuve est très facile. On a

$$P^2 = Q^2 + 2QR + R^2,$$

où $\deg(R^2) = 2s < r \leq \mathrm{val}(Q^2 + 2QR)$, ce qui prouve que

$$\mathrm{ht}(P^2) \geq \mathrm{ht}(R^2) \geq 2\,\mathrm{ht}(P).$$

□

Voici une seconde variante.

Théorème 10. *Soit $P = Q + R$ un polynôme à coefficients entiers de degré d où $\mathrm{val}(Q) = r$, $\deg(R) = s$ avec $2r > d + s$ et $r > 2s$. On suppose que Q et R vérifient la conjecture d'Abbott, alors il en est de même pour P.*

Cette fois les hypothèses impliquent que les polynômes Q^2, QR et R^2 sont linéairement indépendants. On a donc

$$\mathrm{ht}(P^2) \geq \max\{\mathrm{ht}(Q^2), \mathrm{ht}(R^2)\} \geq 2 \cdot \max\{\mathrm{ht}(Q), \mathrm{ht}(R)\} = 2\,\mathrm{ht}(P).$$

Soit P un polynôme à coefficients entiers de degré d de la forme $P = aX^s + R$, avec $|a| = \mathrm{ht}(P)$, $P(0) \neq 0$ et $R \neq 0$. On pose $R = \sum_{i=0}^{\ell} c_i X^{r_i}$, où $r_0 < r_1 < \ldots < r_\ell$. Quitte à remplacer P par son polynôme réciproque, on peut supposer que $s \leq d/2$. On suppose aussi $|a| \geq 2$ (car sinon $\mathrm{ht}(P^2) \geq 2\mathrm{ht}(P)$). On pose aussi

$$E = \{r_0, r_1, \ldots, r_\ell\},$$

donc $s \notin E$. Alors

$$P^2 = a^2 X^{2s} + 2aX^s R + R^2.$$

On voit donc que si

$$\text{(i)} \quad 2s \neq r_i + r_j,\ \forall (r_i, r_j) \in E^2$$

ou si

$$\text{(ii)} \quad \exists r_k \in E,\ s + r_k \neq r_i + r_j,\ \forall (r_i, r_j) \in E^2$$

alors

$$\mathrm{ht}(P^2) \geq 2\mathrm{ht}(P).$$

Le résultat qui suit illustre ces remarques.

Théorème 11. *Soit $P(X) = R(X) + aX^s$ un polynôme pour lequel R ne contient pas de terme en X^s. On suppose que R est un polynôme en X^δ avec $\delta > 1$. Si l'une des conditions suivantes a lieu*

– *d'une part $a^2 \geq 2\mathrm{ht}(R)$ et d'autre part $2s$ n'est pas divisible par δ,*

– *d'une part $a \geq \mathrm{ht}(R)$ et d'autre part s n'est pas divisible par δ,*

alors P vérifie la conjecture d'Abbott.

Si $P(X) = R(X) + aX^s + bX^t$, avec $s \neq t$, est un polynôme pour lequel R ne contient pas de terme en X^s, ni en X^t tel que $|ab| \geq \mathrm{ht}(P)$ et que R est un polynôme en X^δ avec $\delta > 1$ avec de plus $s + t$ non divisible par δ, alors P vérifie la conjecture d'Abbott.

Démonstration. On a
$$P^2 = R^2 + a^2X^{2s} + 2aX^sR.$$
On remarque d'abord qu'il n'y a aucune simplification entre a^2X^{2s} et X^sR.

Sous la première hypothèse, il n'y a pas de simplification entre R^2 et a^2X^{2s} (puisque les exposants du développement de R^2 sont tous des multiples de δ tandis que $2s$ n'est pas divisible par δ). Donc
$$\mathrm{ht}(P^2) \geq a^2 \geq 2\mathrm{ht}(P).$$

Si la seconde propriété a lieu, il n'y a pas de simplification entre R^2 et X^sR (puisque les exposants du développement de R^2 sont tous des multiples de δ et que δ ne divise pas s). Donc
$$\mathrm{ht}(P^2) \geq 2a \geq 2\mathrm{ht}(P).$$

Dans le dernier cas, quand on regarde le développement de P^2 on voit que les hypothèses impliquent qu'il n'a aucune simplification portant sur le terme $2abX^{s+t}$ et donc que
$$\mathrm{ht}(P^2) \geq 2|ab| \geq 2\mathrm{ht}(P).$$
□

Exemple : Si R est un polynôme en X^4 et $a^2 \geq 2\mathrm{ht}(R)$ et s impair ou si R est pair avec $a \geq \mathrm{ht}(R)$ et s impair alors P vérfie la conjecture d'Abbott.

8 Polynômes alternés

Définition 1. Un polynôme non nul $P = \sum_{i=0}^d a_iX^i$ est dit *alterné* si $\mathrm{sign}(a_i) = (-1)^i$ lorsque a_i n'est pas nul. Par exemple, les polynômes $X^4 - X^3 + 2X^2 + 1$ et $X^2 + 1$ sont alternés.

Remarque 5. *Si les racines d'un polynôme sont toutes réelles et positives alors les formules de Viète montrent que ce polynômes est alterné. La réciproque n'est pas vraie : le polynôme $X^2 - 2X + 2$ est alterné et ses racines sont $1 \pm i$.*

Théorème 12. *Si P est un polynôme alterné alors $\mathrm{ht}(P^2) \geq \mathrm{ht}(P)^2$. Donc P vérifie la conjecture d'Abbott.*

Démonstration. La preuve est très facile. Posons $P = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i$ et $P^2 = \sum_{i=0}^{2d} b_i X^i$ et soit ℓ un indice tel que $|a_\ell| = \mathrm{ht}(P)$. Alors

$$b_{2\ell} = a_\ell^2 + \sum_{h=1}^{2d-\ell} a_{\ell+h} a_{\ell-h} \geq a_\ell^2,$$

puisque le fait que P soit alterné implique $a_{\ell+h}a_{\ell-h} \geq 0$ pour tout $h > 0$. Si $\mathrm{ht}(P) \geq 2$ on a $\mathrm{ht}(P^2) \geq \mathrm{ht}(P)^2 \geq 2\,\mathrm{ht}(P)$ tandis que le résultat a déjà été démontré lorsque $\mathrm{ht}(P) = 1$.

Autre preuve : utiliser le fait que si $P(X)$ est alterné alors les coefficients de $P(-X)$ sont tous de même signe (quand ils ne sont pas nuls). $\square$

9 Conjecture d'Abbott et racines des polynômes

Nous commençons cette section par l'étude de la conjecture initiale en lien avec les nombres de Pisot.

Définition 2. Un *nombre de Pisot* est un entier algébrique réel strictement supérieur à 1 dont tous les conjugués sont de modules stictement inférieur à 1.

Exemple : $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ est le plus petit nombre de Pisot.

Lemme 3. *Si $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ sont des nombres complexes de module ≥ 1 alors le polynôme $R(X) = (X-\alpha_1)\ldots(X-\alpha_k)S(X)$ vérifie*

$$\mathrm{ht}(R) > (|\alpha_1| - 1)\cdots(|\alpha_k| - 1)\mathrm{ht}(S).$$

Cas particulier, si $\alpha > 1$ est réel et si $P(X) = (X-\alpha)Q(X)$ est à coefficients entiers alors

$$\mathrm{ht}(P^2) > (\alpha-1)^2\mathrm{ht}(Q^2) \geq (\alpha-1)^2.$$

On a $\mathrm{ht}(P) \leq |P| \leq (\alpha+1)|Q|$ donc

$$\mathrm{ht}(P^2) > \frac{(\alpha-1)^2}{|Q|(\alpha+1)}\mathrm{ht}(P).$$

Ainsi

$$(\alpha-1)^2 \geq 2|Q|(\alpha+1) \implies \mathrm{ht}(P^2) \geq 2\mathrm{ht}(P).$$

Par ailleurs, si P est de degré d, alors

$$(2d+1)\,\mathrm{ht}(P^2) \geq |P|^2 \geq (\alpha-1)\,|Q|\,\mathrm{ht}(P),$$

donc

$$(\alpha-1)|Q| \geq 4d+2 \implies \mathrm{ht}(P^2) \geq 2\mathrm{ht}(P).$$

Soit $\lambda = \sqrt{2d+1}$. On voit alors que

$$\big(\lambda(\alpha-1) \geq 4d+2\big) \text{ ou } \big((\alpha-1)^2 \geq 2\lambda(\alpha+1)\big) \implies \mathrm{ht}(P^2) \geq 2\mathrm{ht}(P)$$

et on constate que ceci a lieu lorsque $\alpha \geq 3 + 2\sqrt{2d+1}$.

Proposition 9. *Soit P un polynôme à coefficients entiers, de degré d et qui admet une racine réelle $\alpha \geq 3 + 2\sqrt{d+1}$ alors P vérifie la conjecture d'Abbott.*

Nous terminons par l'étude de la conjecture initiale pour des polynômes dont les racines vérifient une certaine inégalité.

On utilise le résultat suivant.

Lemme 4. *Soit $P = (X - \zeta_1) \cdots (X - \zeta_m) Q(X)$ un polynôme à coefficients complexes, alors*

$$\mathrm{ht}(P) \geq ||\zeta_1| - 1| \cdots ||\zeta_m| - 1| \cdot \mathrm{ht}(Q)$$

ainsi que

$$\mathrm{ht}(P) \leq (|\zeta_1| + 1) \cdots (|\zeta_m| + 1) \cdot \mathrm{ht}(Q).$$

La première inégalité est le Théorème 1 de [4], la seconde est triviale.

On en déduit facilement.

Théorème 13. *Soit $P = a_d X^d + \cdots + a_1 X + a_0$ un polynôme à coefficients entiers avec $a_d a_0 \neq 0$ dont les racines $\zeta_1, \ldots, \zeta_d$ sont telles que*

$$||\zeta_1| - 1| \cdots ||\zeta_d| - 1| \cdot |a_d| \geq 2,$$

alors P vérifie la conjecture initiale d'Abbott.

Démonstration. Nous avons $P^2 = (X - \zeta_1) \cdots (X - \zeta_d)(a_d \cdot P)$ donc, d'après le Lemme 3, on obtient l'inégalité

$$\mathrm{ht}(P^2) \geq ||\zeta_1| - 1| \cdots ||\zeta_d| - 1| \; |a_d| \; \mathrm{ht}(P),$$

et la conclusion s'ensuit. $\square$

Corollaire 8. *Soit $P = a_d X^d + \cdots + a_1 X + a_0$ un polynôme à coefficients entiers avec $a_d a_0 \neq 0$ dont les racines $\zeta_1, \ldots, \zeta_d$ sont telles que $\mu = \min_{1 \leq i \leq d} \{|\zeta_i|\} \geq 1 + (2/|a_d|)^{1/d}$, alors P vérifie la conjecture initiale d'Abbott.*

Démonstration. L'hypothèse $\mu \geq 1 + (2/|a_d|)^{1/d}$ implique $||\zeta_1| - 1| \cdots ||\zeta_d| - 1| \, |a_d| \geq 2$ et le résultat découle du théorème 13 $\square$

Théorème 14. *Soit $P = (X - \zeta) \cdot Q(X)$ un polynôme à coefficients entiers tel que Q vérifie la conjecture initiale d'Abbott et tel que $|\zeta| \geq 3$, alors P vérifie aussi la conjecture initiale d'Abbott.*

Démonstration. En appliquant le Lemme 3 et les hypothèses, on obtient en effet

$$\mathrm{ht}(P^2) \geq (|\zeta| - 1)^2 \cdot \mathrm{ht}(Q^2) \geq (|\zeta| - 1)^2 \cdot 2\,\mathrm{ht}(Q) \geq 2\,\frac{(|\zeta| - 1)^2}{|\zeta| + 1}\,\mathrm{ht}(P) \geq 2\,\mathrm{ht}(P).$$

$\square$

Si on considère la mesure, on voit que

$$\sqrt{2d+1}\mathrm{ht}(P^2) \geq \mathrm{M}(P^2) = \mathrm{M}(P)^2 \geq \mathrm{M}(P) \cdot \mathrm{ht}(P)/2^d.$$

Par conséquent

$$\mathrm{M}(P) \geq \left(2\sqrt{2d+1}\,\mathrm{ht}(P)\right)^{1/2} \implies \mathrm{ht}(P^2) \geq 2\mathrm{ht}(P).$$

Mais ce résulat ne semble pas très facile à appliquer.

Remerciements *Le travail de M. Cipu et M. Mignotte a bénéficié d'un soutien d'un projet du GRDI ECO-Math.*

Références

[1] J. Abbott, Bounds on factors in $\mathbb{Z}[x]$, *J. Symbolic Comput.*, **50**, 532–563 (2013).

[2] G. Kientega, S. Nikiema, Inequalities involving the coefficients of a polynomial, *International Journal of Mathematics and Computation*, **25**, 8–17 (2014).

[3] G. Kientega, S. Nikiema, Croissance de la hauteur des puissances d'un polynôme, *Annales de l'Université de Ouagadougou*, série C, **10**, 105–115 (2014).

[4] M. Mignotte, On the product of the largest roots of a polynomial, *J. Symbolic Computation*, **13**, 605–611 (1992).

[5] M. Mignotte, D. Ştefănescu, *Polynomials : an Algorithmic Approach*, Springer-Verlag, Singapore (1999).

[6] H. Robbins, A remark on Stirling's formula, *Amer. Math. Monthly*, **62**, 26–29 (1955).

[7] W. Rudin, *Real and Complex Analysis* (Third Edition), McGraw-Hill Book Company (1987).

Received : 25.02.2023
Accepted : 05.04.2023

(1) Simion Stoilow Institute of Mathematics of the Romanian Academy, Research Unit 7,
P. O. Box 1-764, Bucharest 014700, Romania
E-mail : `Mihai.Cipu@imar.ro`

(2) Université Joseph Ki-Zerbo, U. F. R. des Sciences Exactes et Appliquées,
03 BP 7021 Ouagadougou 03, Burkina Faso
E-mail : `kientdia@yahoo.fr`

(3) Université de Strasbourg, U. F. R. de Mathématiques, 67084 Strasbourg, France
E-mail : `Maurice.Mignotte@math.unistra.fr`

(4) Université de Ouahigouya, U. F. R. des Sciences et Technologies,
01 BP 346 Ouahigouya 01, Burkina Faso
E-mail : `salifouabdoul01@gmail.com`