Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie
Tome 50(98) No. 2, 2007, 139–147

Application de la méthode de Baker á la méthode de Dandelin-Graeffe

par
DIOUF ISMAILA

Abstract

Une méthode ancienne de calcul approché des racines dominantes d'un polynôme est celle de Dandelin-Graeffe. Classiquement, on ne démontre la convergence de cette méthode que s'il n'y a qu'une racine dominante. Nous montrons ici que les résultats théoriques de la méthode de Baker impliquent la convergence sous des hypothèses plus faibles.

Key Words: Racines d'un polynôme, approximations diophantiennes, Méthode de Dandelin-Graeffe, Méthode de Baker.
2000 Mathematics Subject Classification: Primary: 11C08, Secondary: 11J86, 11J68, 11Y40, 65H05.

1 Introduction

Pour calculer les valeurs approchés des racines d'un polynôme, il existe des méthodes itératives très anciennes comme celle de Bernoulli et celle de Dandelin-Graeffe. On peut montrer, grâce au théorème élémentaire de Dirichlet sur l'approximation rationnelle simultané ([4]), la convergence de la méthode de Bernoulli mais pas celle de Graeffe. En effet, dans le cas de la méthode de Bernoulli, on parcourt tous les termes d'une certaine suite récurrente linéaire et grâce au théorème de Dirichlet, on sait que certains d'entre eux sont "bons". Par contre, la méthode de Graeffe est l'analogue de la méthode de Bernoulli mais, cette fois, on ne parcourt que les termes dont les indices sont des puissances de deux et, pour de tels indices, ni le théorème de Dirichlet, ni l'algèbre linéaire ne peuvent être appliqués. La seule méthode possible est celle de Baker.

2 Les méthodes classiques de calcul approché de la racine dominante

Théorème 1 (Bernoulli). *On se donne un polynôme P admettant d racines $z_1, \dots, z_d$, qui sont simples, soit*

$$P(X) = a_0 X^d + a_1 X^{d-1} + \cdots + a_d. \tag{1}$$

En résolvant l'équation aux différences $a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + \cdots + a_d x_{n-d} = 0$ *de polynôme caractéristique (1), la solution générale* $\{x_n\}$ *doit être sous la forme*

$$x_n = c_1 z_1^n + c_2 z_2^n + \cdots + c_d z_d^n, \qquad \text{avec} \quad c_1, \ldots, c_d \quad \text{constantes.} \tag{2}$$

Étant donné des valeurs arbitraires x_0, x_{-1},..., x_{-d+1}, *on construit la suite* $\{x_n\}$ *à partir de la relation de récurrence*

$$x_n = -\frac{a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + \cdots + a_d x_{n-d}}{a_0}, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

La suite $\{q_n\}$ *définie par*

$$q_n = \frac{x_{n+1}}{x_n}$$

converge vers la racine dominante de P, *pourvu que les deux conditions suivantes soient vérifiés :*

- *il y a une seule racine dominante,*
- *les valeurs initiales sont telles que dans la relation (2) on a* $c_1 \neq 0$.

Par ailleurs, en utilisant la méthode de Dandelin-Graeffe, on aboutit presque au même résultat avec des hypothèses "voisines".

Théorème 2 (Dandelin-Graeffe). *On construit le polynôme* P_1 *dont les racines sont les carrés des racines d'un certain polynôme* P *donné admettant* n *racines* z_1, z_2, ..., z_n. *Sans nuire à la généralité, on suppose le polynôme unitaire (i.e de coefficient dominant* 1*), soit*

$$P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n,$$

(voir [7]). On construit ensuite le polynôme P_2 *dont les racines sont les carrés des racines de* P_1 *et ainsi de suite. De manière récursive, on construit* P_k *dont les racines sont les carrés des racines de* P_{k-1} *et donc les puissances* $2^{kièmes}$ *de celles de* P.

Si on fait l'hypothèse que les racines de $P \in \mathbb{C}[X]$ *vérifient*

$$|z_1| > |z_2| \geqslant \cdots \geqslant |z_n|.$$

Si on note $P_k(z) = z^n + a_1^{(k)} z^{n-1} \cdots + a_n^{(k)}$, *on a alors*

$$\left| a_1^{(k)} \right|^{2^{-k}} \longrightarrow |z_1| \qquad \text{lorsque} \quad k \to \infty.$$

3 A propos des suites récurrentes linéaires

Considérons un polynôme P à coefficients complexes de degré d de racines α_i, $i = 1, \dots, d$.

Théorème 3 (Théorème Général). *Soit $u = (u_n)_n$ une suite récurrente linéaire associé à P. Alors il existe $I \subset \{1, \dots, d\}$ et des polynômes R_i tels que*

$$u_n = \sum_i R_i(n)\alpha_i^n, \qquad \text{où} \quad |\alpha_1| \geqslant |\alpha_i|,\ i > 1.$$

Corollaire 1. *On a*

$$\limsup |u_n|^{1/n} \leqslant |\alpha_1|.$$

Proposition 1. *Soit $u^{(k)} = \left(u_{n+k}\right)_{n\geqslant 0}$, $0 \leqslant k < d$, où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire associé à P. Les suites $u^{(k)}$ engendrent l'espace $\mathcal{S}$ des suites récurrentes linéaires associés à P si et seulement si*

$$\begin{vmatrix} u_0 & u_1 & \cdots & u_{d-1} \\ u_1 & u_2 & \cdots & u_d \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{d-1} & u_d & \cdots & u_{2d-2} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Démonstration: Assez facile (voir [5]). □

Corollaire 2. *L'ensemble des suites $v^{(k)} = \left(v_{n+k}\right)_{n\geqslant 0}$, $0 \leqslant k < d$, où $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire associé à P définie par*

$$v_0 = v_1 = \cdots = v_{d-2} = 0,\ v_{d-1} = 1,$$

forme une base de $\mathcal{S}$.

Démonstration: Le déterminant correspondant aux d premières valeurs de v_n est ± 1. □

Lémma 1. *Si $s = (s_n)$ et $t = (t_n)$ sont deux suites récurrentes linéaires associés à P et, les suites $t^{(k)} = \left(t_{n+k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $0 \leqslant k < d$, engendrent $\mathcal{S}$, alors il existe une constante positive C telle que*

$$|s_n| \leqslant C \max\left\{|t_n|, |t_{n+1}|, \dots, |t_{n+d-1}|\right\}, \quad \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

Remarque 1. *La preuve de ce lemme se trouve dans [5] (c'est le corollaire 2).*

Ce qui nous mène à la proposition suivante.

Proposition 2. *Si $\alpha \in \mathbb{C}$ est une racine de P et (t_n) une suite récurrente linéaire telle que $t^{(k)} = \left(t_{n+k}\right)_{n\geqslant 0}$ engendrent l'espace vectoriel $\mathcal{S}$, alors on a*

$$|\alpha|^n \leqslant C \max\left\{|t_n|, |t_{n+1}|, \ldots, |t_{n+d-1}|\right\}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

pour une certaine constante positive C.

Démonstration: Cette proposition n'est rien d'autre que la proposition 4 de [5]. On y trouvera la preuve. □

4 Application du théorème de Dirichlet au théorème de Bernoulli

Théorème 4. *[Dirichlet] Soit $x_n = \alpha_1^n + \cdots + \alpha_r^n + \alpha_{r+1}^n + \cdots + \alpha_d^n$, où α_1, α_2, ...,α_d sont des nombres complexes vérifiant:*

$$|\alpha_1| = \cdots = |\alpha_r| > |\alpha_{r+1}| \geqslant \cdots \geqslant |\alpha_d|.$$

Il existe une infinité d'entiers $n \in \mathbb{N}$, tels que

$$|x_n| \geqslant \frac{r}{2\sqrt{2}}|\alpha_1|^n.$$

Remarque 2. *Ce théorème correspond au Théorème 1.3 de [4]. Nous ne reprendrons pas ici la démonstration de ce théorème.*

Proposition 3. *Avec les notations du théorème de Bernoulli, on a :*

$$|x_n| \geqslant \frac{1}{2\sqrt{2}}|z_1|^n,$$

pour une infinité d'entiers n. On a aussi la convergence de la $|\limsup x_n|^{1/n}$

$$\limsup |x_n|^{1/n} = |z_1|.$$

Démonstration: L'inégalité est une application directe du théorème 4.
Pour ce qui est de la convergence, c'est une conséquence de cette inégalité et du corollaire du Théorème général précédent. □

Mieux, on a la convergence grâce au théorème suivant.

Théorème 5. *Soit $x_n = z_1^n + z_2^n + \cdots + z_d^n$, où z_1, ...,z_d sont des nombres complexes distincts tels que*

$$|z_1| \geqslant |z_2| \geqslant \cdots \geqslant |z_d|.$$

Alors on a

$$|z_1| = \lim_n \left(\max\left\{|x_n|, |x_{n+1}|, \ldots, |x_{n+d-1}|\right\}\right)^{1/n}.$$

Démonstration: Facile. □

5 La méthode de Baker

5.0.1 Minoration du terme général d'une récurrence linéaire

Théorème 6. *Soit $\mathcal{U}$ une suite récurrente à valeurs entières telle que le polynôme caractéristique P associé possède au plus 3 racines de module maximal et que ces racines $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ ($l \leqslant 3$) soient simples. Alors, il existe des constantes effectives C_1, C_2, C_3 telles que si,*

$$U_n = R_1\alpha_1^n + \cdots + R_l\alpha_l^n + R_{l+1}(n)\alpha_{l+1}^n + \cdots + R_r(n)\alpha_r^n,$$

avec $R_1, \ldots, R_l$ constantes, et

$$U'_n = R_1\alpha_1^n + \cdots + R_l\alpha_l^n,$$

on ait

$$|U_n| > C_1|\alpha_1|^n n^{-C_2} \qquad \text{si} \quad U'_n \neq 0 \quad \text{et} \quad n \geqslant C_3.$$

Démonstration: D'après les hypothèses, il existe λ positif tel que l'on ait

$$U_n = U'_n + O(|\alpha_1|^n \mathrm{e}^{-\lambda n}).$$

Il suffit donc de démontrer l'existence des constantes effectives C'_1, C'_2, C'_3 telles que

$$(U'_n \neq 0) \Rightarrow \left(U'_n \geqslant C'_1|\alpha_1|^n n^{-C'_2} \quad \text{si} \quad n \geqslant C'_3\right).$$

On supposera $R_1 \neq 0$.

- Si $R_2 = R_3 = 0$,

$$U'_n = R_1\alpha_1^n + R_2\alpha_2^n + R_3\alpha_3^n = R_1\alpha_1^n, \quad \text{cas trivial.}$$

- Pour simplifier et mieux voir ce qui se passe, supposons d'abord que $l = 2$,

$$U'_n = R_1\alpha_1^n + R_2\alpha_2^n \quad \text{avec} \quad R_1 = \bar{R}_2, \quad \alpha_2 = \bar{\alpha}_1.$$

  En utilisant la notation exponentielle, on peut écrire:

$$R_1 = |R_1|\,\mathrm{e}^{i\theta}, \quad \alpha_1 = |\alpha_1|\,\mathrm{e}^{i\varphi}.$$

  Par suite, on a:

$$U'_n = |R_1|\,\mathrm{e}^{i\theta}\,|\alpha_1|^n\,\mathrm{e}^{in\varphi} + |R_1|\,\mathrm{e}^{-i\theta}\,|\alpha_1|^n\,\mathrm{e}^{-in\varphi}.$$

  D'où

$$U'_n = 2\,|R_1\alpha_1^n|\cos(\theta + n\varphi), \quad \theta,\ \varphi \in]-\pi, \pi]$$

  or, $\cos(\theta + n\varphi)$ petit $\Leftrightarrow$ $\theta + n\varphi - k\pi/2$ petit pour un certain $k \in \mathbb{Z}$.

On sait que $\cos(\theta + n\varphi) = \sin(\theta + n\varphi + \pi/2)$. On sait aussi que

$$|\sin(x)| \geqslant \frac{|x|}{2} \qquad \text{pour} \quad |x| \leqslant \pi/4,$$

Donc, il convient de distinguer deux cas:
1^{er} cas : $|\theta + n\varphi - \pi/2| \geqslant \pi/4 \mod \pi/2$ alors

$$|\sin(\theta + n\varphi - k\pi/2)| \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$2^{ème}$ cas : $|\theta + n\varphi - \pi/2| \leqslant \pi/4 \mod \pi/2$ alors

$$|\cos(\theta + n\varphi)| \geqslant \frac{1}{2}\left|\theta + n\varphi - k\frac{\pi}{2}\right|.$$

En appliquant la méthode de Baker à la forme linéaire de logarithmes $i\theta + in\varphi - ik\pi/2$, on obtient

$$|\theta + n\varphi - k\pi/2| \geqslant C_1 n^{-C_2},$$

ce qui implique

$$|U'_n| \geqslant 2\,|R_1\alpha_1^n|\,\frac{1}{2}C_1 n^{-C_2} = C'_1|\alpha_1|^n n^{-C_2}.$$

- Si $l = 3$, quitte à diviser par $|\alpha_3|^n$, on peut se ramener à l'étude d'une expression du type
$$U'_n = R_1 a_1^n + \bar{R}_1\bar{a}_1^n + R_3;$$
avec R_1, a_1 algébriques, $R_1 \neq 0$, $|a_1| = 1$, $R_3 = 0$ ou 1. Il est clair qu'il suffit de considérer le cas $R_3 \leqslant 2|R_1|$. Posons alors

$$U_1 = |R_1|\mathrm{e}^{i\theta}, \quad a_1 = \mathrm{e}^{i\varphi}, \quad R_3|R_1|^{-1} = -2\cos\psi;$$

où θ, φ, $\psi \in]-\pi, \pi]$. On a

$$\begin{aligned} U'_n &= |R_1|\mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{e}^{in\varphi} + |R_1|\mathrm{e}^{-i\theta}\mathrm{e}^{-in\varphi} - 2|R_1|\cos\psi \\ &= 2|R_1|\left(\cos(\theta + n\varphi) - \cos\psi\right) \\ &= 4|R_1|\left(\sin\frac{\theta + n\varphi - \psi}{2}\sin\frac{\theta + n\varphi + \psi}{2}\right). \end{aligned}$$

D'où
$$|U'_n| = 4|R_1|\left|\sin\frac{\theta + n\varphi - \psi}{2}\sin\frac{\theta + n\varphi + \psi}{2}\right|.$$

  - Si $\psi = 0$, cette méthode se ramène au cas présent. En effet minorer $\sin^2$ revient à minorer $|\sin|$.

– Si $\psi \neq 0$ alors

$$\sin(\theta + n\varphi + \varepsilon\psi) \text{ petit} \quad \Longleftrightarrow \quad \theta + n\varphi + \varepsilon\psi + m\pi \text{ petit}, \ (\varepsilon = \pm 1),$$

pour un certain entier m. Puisque

$$|\sin(\theta + n\varphi + \varepsilon\psi + m\pi)| \geqslant \frac{|\theta + n\varphi + \varepsilon\psi + m\pi|}{2}$$

lorsque $|\theta + n\varphi + \varepsilon\psi + m\pi| \leqslant \pi/4$, on se retrouve dans l'étude de cas faite pour $l = 2$.

□

Sous des conditions plus générales, on obtient encore une minoration effective du terme général U_n donné dans le théorème suivant (voir [3]):

Théorème 7. *Supposons toujours $l \leqslant 3$, mais avec des racines éventuellement multiples. Supposons de plus qu'au moins une des quantités $\dfrac{\alpha_i}{\alpha_j}$ avec $1 \leqslant i < j \leqslant l$ ne soit pas racine de l'unité Alors il existe des nombres $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ calculables dépendant uniquement de la suite $\mathcal{U}$ tels que*

$$|U_n| \geqslant |\alpha_1|^n \exp\left(-C_1(\log m)^2\right) \tag{3}$$

dès que $n \geqslant C_2$.

Démonstration: Voir [3]. □

Théorème 8. *Sous les hypothèses (arithmétiques) du théorème 7, on a*

$$\lim_{n\to\infty} |U_n|^{1/n} = |\alpha_1|.$$

et cela sans aucune autre hypothèse.

Démonstration: Triviale. □

6 Application à la méthode de Dandelin-Graeffe

Du théorème 7 résulte

Théorème 9. *Considérons un polynôme P avec les notations du théorème de Dandelin-Graeffe énoncé précédemment. Sous les conditions du théorème 7, la méthode de Dandelin-Graeffe appliqué à P converge et on a*

$$\lim_{k\to\infty} \left|a_1^{(k)}\right|^{2^{-k}} = |z_1|.$$

Remarque 3. *Il est important de noter que les hypothèses "arithmétiques" utilisés ci-dessus ne peuvent être supprimés. Si elles ne sont pas vérifiés, on peut construire des suites pour lesquelles le résultat précédent est faux, l'idé est d'utiliser des nombres transcendants de Liouville convenables.*

7 Expériences numériques

Bien que le théorème précédent ait un caractère beaucoup plus théorique que pratique, nous donnons ici quelques exemples numériques. La raison principale est la suivante : les estimations sur les formes linéaires de logarithmes font à ce jour apparaître des constantes astronomiques, mais sur des exemples le comportement effectif est bien meilleur que ce que donne la théorie, comme nous allons le voir dans les calculs qui suivent.

Exemple 1. *Considérons le polynôme P de degré 5 suivant admettant deux racines de module maximal (cette valeur étant égale à 2):*

$$P(x) = x^5 + x^4 + 3x^3 + 5x^2 - 4x + 4.$$

A l'aide de Maple, on construit les polynômes P_k décrits dans le théorème de Dandelin-Graeffe. Puis on détermine le coefficient $a_1^{(k)}$ afin d'obtenir une approximation du module de la plus grande racine $|z_1|$. Regroupons les résultats dans le tableau ci-dessous.

k	$a_1^{(k)}$	$\lvert z_1\rvert$
5	8884229123	2.045946944
6	36980097418395553795	2.021852646
7	680572235[...]32556803	2.010859975
8	231584178[...]42504963	2.005422550

En fait,

$$P(x) = (x + 2i)(x - 2i)(x + 1.839)(x - 0.420 + 0.606i)(x - 0.420 - 0.606i).$$

On observe une convergence tardive et lente, on ne gagne qu'un bit à chaque itération. Remarquons que ce n'est pas le cas pour une racine dominante simple.

Exemple 2. *On considère ici le polynôme Q de degré 7 suivant possédant trois racines de module maximal (cette valeur maximale étant 3):*

$$Q(x) := x^7 - 2x^6 + 5x^5 - 14x^4 - 40x^3 + 39x^2 - 36x + 27.$$

On obtient ainsi le tableau suivant

k	$a_1^{(k)}$	$\lvert z_1\rvert$
5	5559061885623618	3.104783324
6	1030105146[...]2801961474	3.051941989
7	3537055373[...]3701378562	3.025859542
8	4170253571[...]1284624898	3.012902027
9	5797004949[...]7250061314	3.006444093

Ici aussi, la convergence est lente, plus lente que dans l'exemple précédent. Cela est dû au fait qu'il y a trois racines de module maximal et un degré plus élevé (7). On gagne environ un bit après 3 itérations.

References

[1] G. WÃIJSTHOLZ, *A Panorama of Number Theory or The View from Baker's Garden*, Cambridge University Press, 2002.

[2] E. DURAND, *Solutions numériques des équations algèbriques Tome 1*, Éd. Masson & Cie, Paris, 1960.

[3] M. MIGNOTTE, T. N. SHOREY and R. TIJDEMAN, *The distance betwen terms of an algebraic recurrence sequence*, J. Reine Angew. Math. 349 (1984), 63–76.

[4] M. MIGNOTTE AND DORU ŞTEFĂNESCU, *Estimates for Polynomial Roots*, Appl. Algebra Engrg. Comm. Comput. 12 (2001), no. 6, 437–453.

[5] M. MIGNOTTE, DORU ŞTEFĂNESCU, *Linear recurrent sequences and polynomial roots.* J. Symbolic Comput. 35 (2003), no. 6, 637–649.

[6] PETER HENRICI. *Elements of numerical analysis*, Ed. John Wiley & Sons, Inc. New York, 1964.

[7] MAURICE MIGNOTTE. *Algèbre concrète*, Éd. ellipses, Paris, Août 2002.

Reçu: 12.07.2006.

Université Louis Pasteur
7, rue René Descartes
67084 Strasbourg France.
E-mail: diouf@math.u-strasbg.fr