Bull. Math. Soc. Sc. Math. Roumanie
Tome 46(94) No. 1-2, 2003, 11–23

Déformations des groupes par systèmes rigides de facteurs

par
NICOLAE CIPRIAN BONCIOCAT

Abstract

We study the deformations of a group law by factor systems and actions satisfying certain rigidity conditions, as well as the reversibility of this deformation process. We prove that non-simple groups are such deformations of direct products. We find invariance properties for simple groups and for the kernel of a rigid factor system, and conditions for the existence of deformations with given kernel. We finally describe the rigid actions of cyclic groups.

Key Words: *rigid factor system, kernel of a rigid factor system.*
2000 Mathematics Subject Classification: Primary: 20D40.

1 Systèmes rigides de facteurs

Soient N, E et G des groupes tels que E est une extension du sous-groupe normal N par le groupe facteur G. L'extension E est équivalente à une extension de produit croisé $E[N, G, \varphi, f]$ ayant la loi de groupe

$$(n_1, g_1)(n_2, g_2) = (n_1\varphi(g_1)(n_2)f(g_1, g_2), g_1g_2), \tag{1}$$

où $\varphi : G \to Aut(N)$ et $f : G \times G \to N$ vérifient pour tous $g_1, g_2, g_3 \in G$ les relations

$$\begin{aligned} f(g_1, g_2)f(g_1g_2, g_3) &= \varphi(g_1)(f(g_2, g_3))f(g_1, g_2g_3), &(2)\\ \varphi(g_1) \circ \varphi(g_2) &= I(f(g_1, g_2)) \circ \varphi(g_1g_2), &(3)\end{aligned}$$

et $I(f(g_1, g_2))$ est l'automorphisme intérieur qui envoie g sur $f(g_1, g_2)gf(g_1, g_2)^{-1}$ (*voir* [3]).

Soient maintenant $(G, \cdot)$ un groupe et $\varphi : G \to Aut(G)$, $f : G \times G \to G$ deux applications satisfaisant pour tous $g_1, g_2, g_3 \in G$ les relations (2) et (3). Sous ces hypothèses, on a:

Proposition 1.1 *La loi de composition $*$ définie par*

$$g_1 * g_2 = g_1 \cdot \varphi(g_1)(g_2) \cdot f(g_1, g_2) \tag{4}$$

est une loi de groupe si pour tous $g_1, g_2, g_3 \in G$ les applications φ et f ont les propriétés de rigidité suivantes:

$$\begin{aligned} \varphi(g_1 * g_2) &= \varphi(g_1 \cdot g_2), & (5)\\ f(g_1 * g_2, g_3) &= f(g_1 \cdot g_2, g_3), & (6)\\ f(g_1, g_2 * g_3) &= f(g_1, g_2 \cdot g_3). & (7) \end{aligned}$$

Dans ce cas, l'élément neutre pour la loi $*$ est $f(1,1)^{-1}$ et l'inverse d'un élément g pour la loi $*$ est donné par $g^{-1*} = f(1,1)^{-1} \cdot f(g^{-1}, g)^{-1} \cdot \varphi(g^{-1})(g^{-1})$.

Démonstration: Nous pouvons abréger un peu la démonstration si nous montrons d'abord que l'ensemble

$$QN(\varphi, f) = \{h \in G : \varphi(h) = \varphi(1),\ f(h, g) = f(1,1),\ \forall g \in G\}$$

est un sous-groupe de G.

Le choix $g_1 = g_2 = 1$ dans (2) et (3) implique que:

$$\begin{aligned} \varphi(1) &= I(f(1,1)) \text{ et} & (8)\\ f(1, g) &= f(1,1), \forall g \in G. & (9) \end{aligned}$$

En utilisant (2), (3) et (8) on voit que pour $h_1, h_2 \in QN(\varphi, f)$, l'élément $h_1 \cdot h_2$ apartient aussi à $QN(\varphi, f)$. Puis, la relation (9) montre que $1 \in QN(\varphi, f)$. Soit maintenant $h \in QN(\varphi, f)$. Le choix $g_1 = h$ et $g_2 = h^{-1}$ dans (2) et (3) donne $\varphi(h^{-1}) = \varphi(1)$ et $f(h^{-1}, g_3) = f(1,1)$ pour tout $g_3 \in G$, donc $h^{-1} \in QN(\varphi, f)$. Par conséquent, $QN(\varphi, f)$ est un sous-groupe de G.

Soient $g_1, g_2, g_3 \in G$. On a:

$$\begin{aligned} (g_1 * g_2) * g_3 &= (g_1 \cdot \varphi(g_1)(g_2) \cdot f(g_1, g_2)) * g_3 \\ &= g_1 \cdot \varphi(g_1)(g_2) \cdot f(g_1, g_2) \cdot \varphi(g_1 * g_2)(g_3) \cdot f(g_1 * g_2, g_3) \\ &= g_1 \cdot \varphi(g_1)(g_2) \cdot I(f(g_1, g_2)) \circ \varphi(g_1 * g_2)(g_3) \cdot f(g_1, g_2) \cdot \\ &\quad f(g_1 * g_2, g_3) \\ &= g_1 \cdot \varphi(g_1)(g_2) \cdot I(f(g_1, g_2)) \circ \varphi(g_1 \cdot g_2)(g_3) \cdot f(g_1, g_2) \cdot \\ &\quad f(g_1 \cdot g_2, g_3) \quad \text{(par (5) et (6)), et} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_1 * (g_2 * g_3) &= g_1 * (g_2 \cdot \varphi(g_2)(g_3) \cdot f(g_2, g_3)) \\ &= g_1 \cdot \varphi(g_1)(g_2 \cdot \varphi(g_2)(g_3) \cdot f(g_2, g_3)) \cdot f(g_1, g_2 * g_3) \\ &= g_1 \cdot \varphi(g_1)(g_2) \cdot \varphi(g_1) \circ \varphi(g_2)(g_3) \cdot \varphi(g_1)(f(g_2, g_3)) \cdot \\ &\quad f(g_1, g_2 * g_3) \\ &= g_1 \cdot \varphi(g_1)(g_2) \cdot \varphi(g_1) \circ \varphi(g_2)(g_3) \cdot \varphi(g_1)(f(g_2, g_3)) \cdot \\ &\quad f(g_1, g_2 \cdot g_3) \quad \text{(par (7)).} \end{aligned}$$

L'associativité de la loi $*$ est maintenant une conséquence immédiate de (2) et (3).

Nous prouvons que $f(1,1)^{-1}$ est un élément neutre à gauche pour la loi de composition $*$:

Les relations (5) et (6) donnent pour $g_1 = g_2 = 1$:

$$\begin{aligned} \varphi(f(1,1)) &= \varphi(1) = I(f(1,1)), \\ f(f(1,1),g) &= f(1,g) = f(1,1),\ \forall g \in G. \end{aligned}$$

Donc $f(1,1) \in QN(\varphi, f)$, et évidemment on a $f(1,1)^{-1} \in QN(\varphi, f)$, ce qui donne pour tout $g \in G$:

$$\begin{aligned} f(1,1)^{-1} * g &= f(1,1)^{-1} \cdot \varphi(f(1,1)^{-1})(g) \cdot f(f(1,1)^{-1}, g) \\ &= f(1,1)^{-1} \cdot I(f(1,1))(g) \cdot f(1,1) = g. \end{aligned}$$

Nous prouvons maintenant que $f(1,1)^{-1} \cdot f(g^{-1},g)^{-1} \cdot \varphi(g^{-1})(g^{-1})$ est l'inverse de g à gauche pour la loi $*$. Pour cela, on doit évaluer l'élément

$$T = (f(1,1)^{-1} \cdot f(g^{-1},g)^{-1} \cdot \varphi(g^{-1})(g^{-1})) * g.$$

Désignons par $m(g)$ l'élément $f(1,1)^{-1} \cdot f(g^{-1},g)^{-1} \cdot \varphi(g^{-1})(g^{-1})$. On a:

$$T = m(g) \cdot \varphi(m(g))(g) \cdot f(m(g), g).$$

On va calculer séparément les termes $T_1 = \varphi(m(g))(g)$ et $T_2 = f(m(g), g)$.

Les relations (5), (6) et (9) donnent pour $g_1 = g^{-1}$ et $g_2 = g$:

$$\begin{aligned} \varphi(g^{-1} * g) &= \varphi(1), \\ f(g^{-1} * g, g_3) &= f(1,1), \quad \forall g, g_3 \in G. \end{aligned}$$

Donc $g^{-1} * g$ aussi bien que son inverse $f(g^{-1},g)^{-1} \cdot \varphi(g^{-1})(g^{-1}) \cdot g$ appartiennent à $QN(\varphi, f)$. Alors, comme $f(1,1)^{-1} \in QN(\varphi, f)$, on a pour tout $g \in G$:

$$m(g) \cdot g \in QN(\varphi, f). \tag{10}$$

Les relations (2) et (3) donnent pour tous $h \in QN(\varphi, f)$ et $g, g_1, g_2 \in G$:

$$\begin{aligned} \varphi(h \cdot g) &= \varphi(g), & (11) \\ f(h \cdot g_1, g_2) &= f(g_1, g_2). & (12) \end{aligned}$$

Alors, par (10), (11) et (12) on trouve que:

$$T_1 = \varphi(m(g) \cdot g \cdot g^{-1})(g) = \varphi(g^{-1})(g),$$

et

$$T_2 = f(m(g) \cdot g \cdot g^{-1}, g) = f(g^{-1}, g).$$

Ces expressions de T_1 et T_2 conduisent à:

$$\begin{aligned} T &= f(1,1)^{-1} \cdot f(g^{-1},g)^{-1} \cdot \varphi(g^{-1})(g^{-1}) \cdot \varphi(g^{-1})(g) \cdot f(g^{-1},g) \\ &= f(1,1)^{-1}, \end{aligned}$$

ce qui complète la démonstration.

Définition 1.2 On dit que (φ, f) est un *système rigide de facteurs* si les applications φ et f vérifient à la fois les relations (2), (3) et (5)–(7). Dans ce cas, on désigne par $G_{(\varphi,f)}$ le groupe $(G,*)$ et on l'appelle la *déformation de* $(G,\cdot)$ *par le système rigide* (φ, f).

Définition 1.3 Si $f(g_1,g_2) = 1$ pour tous $g_1, g_2 \in G$, la loi $*$ devient $g_1 * g_2 = g_1 \cdot \alpha(g_1,g_2)$, où α est une action de G sur lui-même (par automorphismes) définie par $\alpha(g_1,g_2) = \varphi(g_1)(g_2)$, et la condition de rigidité (5) se transforme en $g_2^{-1} \cdot \alpha(g_1,g_2) \in N(\alpha)$, où $N(\alpha)$ est le noyau de α. Une telle action est dite *rigide* et la déformation de $(G,\cdot)$ est alors simplement notée G_α.

Les actions rigides apparaissent aussi dans la construction de certains produits double croisés par automorphismes, quand les deux facteurs du produit coïncident (*voir* [1], [5] et [4]).

Le théorème suivant montre que tous les groupes qui ne sont pas simples sont déformations de produits directs.

Théorème 1.4 *Soient N et G deux groupes. Alors:*

i) Toute extension de N par G est une déformation du produit direct $N \times G$ par un système rigide de facteurs;

ii) Tout produit semi-direct de N par G est une déformation du produit direct $N \times G$ par une action rigide.

Démonstration: Pour prouver i) on peut supposer que la loi de groupe dans une extension E de N par G est donnée par (1). Soit $H = N \times G$. Les applications $\Psi : H \to Aut(H)$ et $F : H \times H \to H$ définies par $\Psi((n_1,g_1))(n_2,g_2) = (\varphi(g_1)(n_2), g_2)$ et $F((n_1,g_1),(n_2,g_2)) = (f(g_1,g_2),1)$ vérifient à la fois les relations (2), (3) et (5)–(7) et nous avons $H_{(\Psi,F)} = E$. Pour la deuxième partie, si l'action de G sur N est α, on peut définir l'action rigide $A : H \times H \to H$ par $A((n_1,g_1),(n_2,g_2)) = (\alpha(g_1,n_2), g_2)$, et nous avons $H_A = E$.

Dans le cas plus général, pour deux extensions de N par G, il est difficile de décider si l'une est une déformation de l'autre. Cela est cependant possible dans le cas des produits semi-directs, si on cherche seulement des déformations par actions rigides:

Théorème 1.5 *Soient $N \times_\beta G$ et $N \times_\gamma G$ deux produits semi-directs de N par G. Alors $N \times_\gamma G$ est une déformation de $N \times_\beta G$ par une action rigide α si et seulement si pour tous $g_1, g_2 \in G$ et $n \in N$ les actions β et γ vérifient la relation*

$$\gamma(g_1, \beta(g_2,n)) = \beta(g_1 g_2 g_1^{-1}, \gamma(g_1,n)), \tag{13}$$

et, dans ce cas, α est donnée par $\alpha((n_1,g_1),(n_2,g_2)) = (\beta(g_1^{-1},\gamma(g_1,n_2)),g_2)$.

Démonstration: Le groupe $N\times_\gamma G$ est une déformation de $N\times_\beta G$ par une action rigide α si et seulement si

$$\begin{aligned}(n_1\gamma(g_1,n_2),g_1g_2) &= (n_1,g_1)*(n_2,g_2)\\ &= (n_1,g_1)\cdot_\beta \alpha((n_1,g_1),(n_2,g_2)),\end{aligned}$$

(où $\cdot_\beta$ désigne la loi de groupe de $N\times_\beta G$) ce qui est équivalent à:

$$\begin{aligned}\alpha((n_1,g_1),(n_2,g_2)) &= (n_1,g_1)^{-1}\cdot_\beta (n_1\gamma(g_1,n_2),g_1g_2)\\ &= (\beta(g_1^{-1},n_1^{-1}),g_1^{-1})\cdot_\beta (n_1\gamma(g_1,n_2),g_1g_2)\\ &= (\beta(g_1^{-1},n_1^{-1})\beta(g_1^{-1},n_1\gamma(g_1,n_2)),g_1^{-1}g_1g_2)\\ &= (\beta(g_1^{-1},\gamma(g_1,n_2)),g_2).\end{aligned}$$

On a aussi:

$$\begin{aligned}\alpha((n_1,g_1)\cdot_\beta(n_2,g_2),(n_3,g_3)) &= (\beta(g_2^{-1}g_1^{-1},\gamma(g_1g_2,n_3)),g_3)\\ \alpha((n_1,g_1),\alpha((n_2,g_2),(n_3,g_3))) &= (\beta(g_1^{-1},\gamma(g_1,\beta(g_2^{-1},\gamma(g_2,n_3)))),\\ &\quad g_3)\\ \alpha((n_1,g_1),(n_2,g_2)\cdot_\beta(n_3,g_3)) &= (\beta(g_1^{-1},\gamma(g_1,n_2\beta(g_2,n_3))),g_2g_3)\\ \alpha((n_1,g_1),(n_2,g_2))\cdot_\beta\alpha((n_1,g_1),(n_3,g_3)) &= (\beta(g_1^{-1},\gamma(g_1,n_2))\cdot\\ &\quad \beta(g_2g_1^{-1},\gamma(g_1,n_3)),g_2g_3)\end{aligned}$$

et on voit que α est une action de $N\times_\beta G$ sur lui-même (par automorphismes) si et seulement si les actions β et γ vérifient la relation (13).

La condition de rigidité $(n_2,g_2)^{-1}\cdot_\beta\alpha((n_1,g_1),(n_2,g_2))\in N(\alpha)$ devient $(\beta(g_2^{-1},n_2^{-1})\beta(g_2^{-1}g_1^{-1},\gamma(g_1,n_2)),1)\in N(\alpha)$, qui est évidemment vérifiée.

En utilisant (13), il est facile de prouver que si G et N sont des groupes cycliques finis, pour tout couple de produits semi-directs de N par G, chacun est une déformation de l'autre par une action rigide. Pour prouver cette affirmation, soient $G=<x>$ et $N=<y>$, où x et y sont d'ordre n et m respectivement. Soient aussi deux actions β et γ de G sur N, données par $\beta(x^i,y^j)=y^{ja^i}$ et $\gamma(x^i,y^j)=y^{jb^i}$, où $a,b\in\{0,...,m-1\}$, $a^n=1(mod\ m)$ et $b^n=1(mod\ m)$. Alors, pour tous i,j,k on a: $\beta(x^i,\gamma(x^j,y^k))=\gamma(x^j,\beta(x^i,y^k))=y^{ka^ib^j}$, donc la relation (13) est vérifiée.

On peut se demander si $G_{(\varphi,f)}$ peut être lui-même déformable par le système rigide (φ,f), ou si le procédé de déformation est réversible. De telles situations sont possibles par exemple quand on utilise une action rigide α pour laquelle le groupe facteur $G/N(\alpha)$ est abélien (par exemple la conjugaison dans les groupes métabéliens). Dans ce cas, on peut définir pour tout entier i une action rigide $\alpha^i : G\times G\to G$, donnée par $\alpha^i(g_1,g_2)=\alpha(g_1^i,g_2)$. L'ensemble de ces actions est un groupe cyclique engendré par α, dont l'ordre est l'exposant de $G/N(\alpha)$. On peut aussi obtenir les déformations G_{α^i} d'une manière récurrente, car α est une action rigide pour tout G_{α^i}. Il est aussi facile de prouver que G est une déformation de G_α par une action rigide β si et seulement si $G/N(\alpha)$ est abélien, et dans ce cas $\beta = \alpha^{-1}$. Pour prouver cette dernière affirmation on voit d'abord que les lois de composition des groupes $(G_\alpha)_\beta$ et G coïncident si et seulement si $\beta(x,y) = \alpha(x^{-1}, y)$. Puis on a:

$$\begin{array}{rcl} \beta(x_1 * x_2, y) &=& \alpha(x_2^{-1} x_1^{-1}, y), \\ \beta(x, y_1 * y_2) &=& \beta(x, y_1) \cdot \beta(x, \beta(y_1^{-1}, y_2)), \\ \beta(x, y_1) * \beta(x, y_2) &=& \beta(x, y_1) \cdot \beta(y_1^{-1}, \beta(x, y_2)) \text{ et} \\ y^{-1*} * \beta(x, y) &=& \alpha(y^{-1}, y^{-1}) y \cdot y^{-1} \alpha(y^{-1} x^{-1}, y) \in N(\alpha). \end{array}$$

Donc β est une action rigide de G_α si et seulement si $G/N(\alpha)$ est abélien. Dans ce cas on a évidemment $N(\alpha) = N(\beta)$ et $\beta = \alpha^{-1}$.

Soient maintenant x et y deux éléments de G. Leur commutateur dans G_α s'écrit

$$[x, y]^* = x * y * x^{-1*} * y^{-1*} = x\alpha(x, y)\alpha(xyx^{-1}, x^{-1})\alpha(xyx^{-1}y^{-1}, y^{-1}). \quad (14)$$

Si G est abélien, la relation (14) devient

$$[x, y]^* = y^{-1}\alpha(x, y)x\alpha(y, x^{-1}) \in N(\alpha), \quad (15)$$

et on a aussi l'égalité

$$([x, y]^*)^{-1*} = ([x, y]^*)^{-1}. \quad (16)$$

En s'aidant de ces dernières relations, on peut conclure que si on utilise seulement des actions rigides, on ne peut pas "beaucoup" déformer un groupe abélien, comme le montre la proposition suivante:

Proposition 1.6 *Si G est abélien, on a $(G_\alpha)'' = 1$. Si G est abélien et les éléments de $N(\alpha)$ sont fixés par α, la classe de nilpotence de G_α sera au plus 2.*

Démonstration: Pour $x, y, z, t \in G$ on a:

$$\begin{array}{rcl} [[x,y]^*, [z,t]^*]^* &=& [x,y]^* * [z,t]^* * ([x,y]^*)^{-1*} * ([z,t]^*)^{-1*} \\ &=& [x,y]^* * [z,t]^* * ([x,y]^*)^{-1} * ([z,t]^*)^{-1} \quad \text{(par (16))} \\ &=& ([x,y]^* \alpha([x,y]^*, [z,t]^*)) * \\ && (([x,y]^*)^{-1} \alpha(([x,y]^*)^{-1}, ([z,t]^*)^{-1})) \\ &=& ([x,y]^*[z,t]^*) * (([x,y]^*)^{-1}([z,t]^*)^{-1}) \quad \text{(par (15))} \\ &=& [x,y]^*[z,t]^*([x,y]^*)^{-1}([z,t]^*)^{-1} = 1. \end{array}$$

De plus, si les éléments de $N(\alpha)$ sont fixés par α, on a:

$$[[x,y]^*, z]^* = [x,y]^* \cdot \alpha(z, ([x,y]^*)^{-1}) = [x,y]^* \cdot ([x,y]^*)^{-1} = 1,$$

ce qui complète la démonstration.

2 Le noyau d'un système rigide de facteurs

Dans cette section on utilise l'existence d'un sous-groupe normal particulier dans le groupe facteur d'une extension de produit croisé:

Lemme 2.1 *Soit $E[N, G, \varphi, f]$ une extension de produit croisé. Alors l'ensemble*

$$\begin{aligned} N(\varphi, f) &= \{h \in G : \varphi(h) = \varphi(1),\ f(h, g) = f(1,1) \quad \textit{et} \\ &\qquad f(g_1, hg_2) = f(g_1, g_2),\ \forall g, g_1, g_2 \in G\} \end{aligned}$$

est un sous-groupe normal de G.

Démonstration: Nous avons prouvé (voir la Proposition 1.1) que $QN(\varphi, f)$ est un sous-groupe de G. Soient maintenant $h, h_1, h_2 \in N(\varphi, f)$ et $g, g_1, g_2 \in G$. On a évidemment:

$$f(g_1, (h_2^{-1}h_1)g_2) = f(g_1, h_2(h_2^{-1}h_1)g_2) = f(g_1, h_1 g_2) = f(g_1, g_2),$$

donc $N(\varphi, f)$ est un sous-groupe de G. Pour prouver la normalité de $N(\varphi, f)$, on a successivement:

$$\begin{aligned} \varphi(ghg^{-1}) &= I(f(g, hg^{-1})^{-1}) \circ \varphi(g) \ \circ \varphi(hg^{-1}) \quad \text{(par (3))} \\ &= I(f(g, g^{-1})^{-1}) \circ \varphi(g) \ \circ \varphi(g^{-1}) \quad \text{(par (11))} \\ &= \varphi(gg^{-1}) \quad \text{(par (3))} \\ &= \varphi(1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(ghg^{-1}, g_1) &= f(g, hg^{-1})^{-1}\varphi(g)(f(hg^{-1}, g_1))f(g, hg^{-1}g_1) \quad \text{(par (2))} \\ &= f(g, g^{-1})^{-1}\varphi(g)(f(hg^{-1}, g_1))f(g, g^{-1}g_1) \quad (\text{car } h \in N(\varphi, f)) \\ &= f(g, g^{-1})^{-1}\varphi(g)(f(g^{-1}, g_1))f(g, g^{-1}g_1) \quad \text{(par (12))} \\ &= f(gg^{-1}, g_1) \quad \text{(par (2))} \\ &= f(1,1) \quad \text{(par (9))}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f(g_1, (ghg^{-1})g_2) &= \varphi(g_1)(f(g, hg^{-1}g_2)^{-1})f(g_1, g)f(g_1 g, hg^{-1}g_2) \quad \text{(par (2))} \\ &= \varphi(g_1)(f(g, g^{-1}g_2)^{-1})f(g_1, g)f(g_1 g, g^{-1}g_2) \\ &\quad (\text{car } h \in N(\varphi, f)) \\ &= f(g_1, gg^{-1}g_2) \quad \text{(par (2))} \\ &= f(g_1, g_2), \end{aligned}$$

ce qui complète la démonstration.

Définition 2.2 On appelle $N(\varphi, f)$ le *noyau* de la paire (φ, f).

La définition de ce sous-groupe (ainsi que le résultat de normalité) est aussi valable pour les systèmes rigides de facteurs. Dans ce cas, les groupes $N(\varphi, f)$ et $G/N(\varphi, f)$ sont stables par le processus de déformation:

Théorème 2.3 *Soient G un groupe et (φ, f) un système rigide de facteurs du G. Alors le groupe $(N(\varphi, f), *)$ est un sous-groupe normal de $G_{(\varphi,f)}$, isomorphe à $(N(\varphi, f), \cdot)$, et on a $G/(N(\varphi, f), \cdot) = G_{(\varphi,f)}/(N(\varphi, f), *)$.*

Démonstration: Soient $g, g_1, g_2 \in G$ et $h, h_1, h_2 \in N(\varphi, f)$. En s'aidant de (7) et du fait que $f(1,1) = 1*1$, on peut montrer facilement que $f(g_1, f(1,1)g_2) = f(g_1, g_2)$. Nous avons prouvé (voir la Proposition 1.1) que $f(1,1) \in QN(\varphi, f)$, donc $f(1,1) \in N(\varphi, f)$. Pour prouver que $(N(\varphi, f), *)$ est un sous-groupe du $G_{(\varphi,f)}$, on utilise les relations (5)–(7):

$$\begin{aligned}
\varphi(h_1 * h_2^{-1*}) &= \varphi(h_1 \cdot h_2^{-1*}) \\
&= \varphi(h_1 h_2^{-1} \cdot h_2 h_2^{-1*}) \\
&= I(f(h_1 h_2^{-1}, h_2 h_2^{-1*})^{-1}) \circ \varphi(h_1 h_2^{-1}) \circ \varphi(h_2 h_2^{-1*}) \\
&= I(f(1,1)^{-1}) \circ \varphi(1) \circ \varphi(h_2 h_2^{-1*}) \\
&= \varphi(h_2 h_2^{-1*}) = \varphi(h_2 * h_2^{-1*}) = \varphi(f(1,1)^{-1}) = \varphi(1),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(h_1 * h_2^{-1*}, g) &= f(h_1 \cdot h_2^{-1*}, g) \\
&= f(h_1 h_2^{-1} \cdot h_2 h_2^{-1*}, g) \\
&= f(h_1 h_2^{-1}, h_2 h_2^{-1*})^{-1} \varphi(h_1 h_2^{-1})(f(h_2 h_2^{-1*}, g)) \\
&\quad\; f(h_1 h_2^{-1}, h_2 h_2^{-1*} g) \\
&= f(1,1)^{-1} \varphi(1)(f(h_2 h_2^{-1*}, g)) f(1,1) \\
&= f(h_2 h_2^{-1*}, g) = f(h_2 * h_2^{-1*}, g) = f(f(1,1)^{-1}, g) = f(1,1),
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
f(g_1, (h_1 * h_2^{-1*}) \cdot g_2) &= f(g_1, (h_1 * h_2^{-1*}) * g_2) \\
&= f(g_1, h_1 \cdot (h_2^{-1*} * g_2)) \\
&= f(g_1, h_2^{-1*} * g_2) \\
&= f(g_1, h_2 \cdot (h_2^{-1*} * g_2)) \\
&= f(g_1, h_2 * (h_2^{-1*} * g_2)) \\
&= f(g_1, g_2).
\end{aligned}$$

La normalité du $(N(\varphi, f), *)$ est une conséquence des égalités suivantes:

$$\begin{aligned}
\varphi(g * h * g^{-1*}) &= \varphi(g \cdot (h * g^{-1*})) \\
&= I(f(g, h * g^{-1*})^{-1}) \circ \varphi(g) \circ \varphi(h * g^{-1*}) \\
&= I(f(g, h \cdot g^{-1*})^{-1}) \circ \varphi(g) \circ \varphi(h \cdot g^{-1*}) \\
&= I(f(g, g^{-1*})^{-1}) \circ \varphi(g) \circ \varphi(g^{-1*}) \quad \text{(par (11))} \\
&= \varphi(g \cdot g^{-1*}) = \varphi(g * g^{-1*}) = \varphi(f(1,1)^{-1}) = \varphi(1),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(g*h*g^{-1*},g_1) &= f(g\cdot(h*g^{-1*}),g_1)\\
&= f(g,h*g^{-1*})^{-1}\varphi(g)(f(h*g^{-1*},g_1))f(g,(h*g^{-1*})g_1)\\
&= f(g,h\cdot g^{-1*})^{-1}\varphi(g)(f(h\cdot g^{-1*},g_1))f(g,h*g^{-1*}*g_1)\\
&= f(g,g^{-1*})^{-1}\varphi(g)(f(g^{-1*},g_1))f(g,h\cdot(g^{-1*}*g_1))\\
&= f(g,g^{-1*})^{-1}\varphi(g)(f(g^{-1*},g_1))f(g,g^{-1*}*g_1)\\
&= f(g,g^{-1*})^{-1}\varphi(g)(f(g^{-1*},g_1))f(g,g^{-1*}\cdot g_1)\\
&= f(g\cdot g^{-1*},g_1)=f(g*g^{-1*},g_1)=f(f(1,1)^{-1},g_1)\\
&= f(1,1),
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
f(g_1,(g*h*g^{-1*})\cdot g_2) &= f(g_1,(g*h*g^{-1*})*g_2)\\
&= f(g_1,g*(h*g^{-1*}*g_2))\\
&= f(g_1,g\cdot(h*g^{-1*}*g_2))\\
&= \varphi(g_1)(f(g,h*g^{-1*}*g_2)^{-1})f(g_1,g)\\
&\quad f(g_1\cdot g,h*g^{-1*}*g_2)\\
&= \varphi(g_1)(f(g,h\cdot(g^{-1*}*g_2))^{-1})f(g_1,g)\\
&\quad f(g_1\cdot g,h\cdot(g^{-1*}*g_2))\\
&= \varphi(g_1)(f(g,g^{-1*}*g_2)^{-1})f(g_1,g)f(g_1\cdot g,g^{-1*}*g_2)\\
&= f(g_1,g\cdot(g^{-1*}*g_2))\\
&= f(g_1,g*(g^{-1*}*g_2))\\
&= f(g_1,(g*g^{-1*})*g_2)=f(g_1,g_2).
\end{aligned}$$

Pour $h_1,h_2\in N(\varphi,f)$ nous avons $h_1*h_2=h_1\cdot f(1,1)\cdot h_2$. Par conséquent, l'application $\theta:(N(\varphi,f),\cdot)\to(N(\varphi,f),*)$ donnée par $\theta(h)=hf(1,1)^{-1}$ est un isomorphisme.

Soient maintenant $g,g_1,g_2\in G$. Pour prouver l'egalité des groupes facteur, nous devons montrer que les classes modulo $N(\varphi,f)$ et leur multiplication dans les groupes $G/(N(\varphi,f),\cdot)$ et $G_{(\varphi,f)}/(N(\varphi,f),*)$ coïncident:

$$N(\varphi,f)\cdot g = N(\varphi,f)*g \quad \text{et} \tag{17}$$
$$N(\varphi,f)\cdot(g_1\cdot g_2) = N(\varphi,f)*(g_1*g_2). \tag{18}$$

Nous prouvons (17) par double inclusion. Pour tous $h\in N(\varphi,f)$ et $g\in G$ on a $h*g=(h\cdot f(1,1))\cdot g\in N(\varphi,f)\cdot g$, donc $N(\varphi,f)*g\subseteq N(\varphi,f)\cdot g$. Puis, on a $h\cdot g=(h\cdot f(1,1)^{-1})*g\in N(\varphi,f)*g$, d'où découle l'inclusion contraire.

En vertu de (17), l'égalité (18) se transforme en $N(\varphi,f)\cdot(g_1\cdot g_2)=N(\varphi,f)\cdot(g_1*g_2)$. Donc, il suffit de prouver que $(g_1*g_2)\cdot g_2^{-1}\cdot g_1^{-1}\in N(\varphi,f)$. Désignons par h l'élément $(g_1*g_2)\cdot g_2^{-1}\cdot g_1^{-1}$. Alors on a successivement:

$$\begin{aligned}
\varphi(h) &= I(f(g_1*g_2,g_2^{-1}\cdot g_1^{-1})^{-1})\circ\varphi(g_1*g_2)\circ\varphi(g_2^{-1}\cdot g_1^{-1})\\
&= I(f(g_1\cdot g_2,g_2^{-1}\cdot g_1^{-1})^{-1})\circ\varphi(g_1\cdot g_2)\circ\varphi(g_2^{-1}\cdot g_1^{-1})\\
&= \varphi(g_1\cdot g_2\cdot g_2^{-1}\cdot g_1^{-1})=\varphi(1),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(h,g) &= f(g_1 * g_2, g_2^{-1}\cdot g_1^{-1})^{-1}\varphi(g_1 * g_2)(f(g_2^{-1}\cdot g_1^{-1}, g))\cdot \\ &\quad (g_1 * g_2, g_2^{-1}\cdot g_1^{-1}\cdot g) \\ &= f(g_1\cdot g_2, g_2^{-1}\cdot g_1^{-1})^{-1}\varphi(g_1\cdot g_2)(f(g_2^{-1}\cdot g_1^{-1}, g))\cdot \\ &\quad f(g_1\cdot g_2, g_2^{-1}\cdot g_1^{-1}\cdot g) \\ &= f(g_1\cdot g_2\cdot g_2^{-1}\cdot g_1^{-1}, g) = f(1,g) = f(1,1), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f(a,hb) &= \varphi(a)(f(g_1 * g_2, g_2^{-1}g_1^{-1}b)^{-1})f(a, g_1 * g_2)f(a\cdot(g_1 * g_2), g_2^{-1}g_1^{-1}b) \\ &= \varphi(a)(f(g_1g_2, g_2^{-1}g_1^{-1}b)^{-1})f(a, g_1g_2)f(a*(g_1*g_2), g_2^{-1}g_1^{-1}b). \end{aligned}$$

Puis on a

$$\begin{aligned} f(a*(g_1*g_2), g_2^{-1}g_1^{-1}b) &= f((a*g_1)\cdot g_2, g_2^{-1}g_1^{-1}b) \\ &= f(a*g_1, g_2)^{-1}\varphi(a*g_1)(f(g_2, g_2^{-1}g_1^{-1}b)) \\ &\quad f(a*g_1, g_2g_2^{-1}g_1^{-1}b) \\ &= f(ag_1, g_2)^{-1}\varphi(ag_1)(f(g_2, g_2^{-1}g_1^{-1}b)) \\ &\quad f(ag_1, g_2g_2^{-1}g_1^{-1}b) \\ &= f(ag_1g_2, g_2^{-1}g_1^{-1}b). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} f(a,hb) &= \varphi(a)(f(g_1g_2, g_2^{-1}g_1^{-1}b)^{-1})f(a, g_1g_2)f(ag_1g_2, g_2^{-1}g_1^{-1}b) \\ &= f(a, g_1g_2g_2^{-1}g_1^{-1}b) = f(a,b), \end{aligned}$$

pour tous $a, b \in G$, ce qui complète la démonstration.

Ces propriétés d'invariance par rapport à la modification de la loi de composition ont les conséquences suivantes:

i) Si $N(\varphi, f) = 1$ ou $N(\varphi, f) = G$, la déformation de G n'est pas effective (dans le dernier cas, l'application $\theta : G \to G_{(\varphi,f)}$ définie par $\theta(g) = gf(1,1)^{-1}$ est un isomorphisme).

ii) Si G est un groupe simple, on a $G_{(\varphi,f)} \cong G$ pour tout système rigide de facteurs (φ, f).

iii) Soient G un groupe simple et $H_{(\varphi,f)}$ tel que $G \cong H_{(\varphi,f)}$. Alors $G \cong H$.

iv) Le groupe G est résoluble si et seulement si $G_{(\varphi,f)}$ est résoluble, donc le procédé de déformation préserve la classe des groupes résolubles, mais pas la classe des groupes nilpotents, car par exemple, le groupe symétrique S_3 est une déformation d'un groupe cyclique d'ordre 6 (voir le Théorème 1.4).

On donne maintenant des conditions assurant l'existence de déformations à noyau fixé. Pour cela, soient N un sous-groupe normal de G et s une section pour la projection canonique $p : G \to G/N$. On peut relever la paire (φ, f) associée à s en un couple (Φ, F) qui vérifie (2) et (3), de la façon suivante:

$\Phi : G \to Int(G)$, $\Phi(g) = I(sp(g))$ (où $I(x)$ désigne l'automorphisme intérieur $g \to xgx^{-1}$) et $F : G \times G \to G$, $F(g_1, g_2) = f(p(g_1), p(g_2))$. Dans ces conditions on a:

Théorème 2.4 *Si G/N est abélien, alors la paire (Φ, F) est un système rigide de facteurs du G et on a $N \subseteq N(\Phi, F)$. De plus, si $Z(G) = 1$, alors $N = N(\Phi, F)$.*

Démonstration: Pour tous $g_1, g_2 \in G$, le commutateur $g_2^{-1} sp(g_1) g_2 (sp(g_1))^{-1}$ est un élément de N, car G/N est abélien. On a aussi $f(p(g_1), p(g_2)) \in N$, donc

$$p(g_1 sp(g_1) g_2 (sp(g_1))^{-1} f(p(g_1), p(g_2))) = p(g_1 g_2).$$

Cette égalité montre que

$$\begin{aligned}
\Phi(g_1 \cdot \Phi(g_1)(g_2) \cdot F(g_1, g_2)) &= \Phi(g_1 \cdot g_2), \\
F(g_1 \cdot \Phi(g_1)(g_2) \cdot F(g_1, g_2), g_3) &= F(g_1 \cdot g_2, g_3) \quad \text{et} \\
F(g_1, g_2 \cdot \Phi(g_2)(g_3) \cdot F(g_2, g_3)) &= F(g_1, g_2 \cdot g_3),
\end{aligned}$$

donc (Φ, F) est un système rigide de facteurs pour G. Dans ce cas la loi $*$ est donnée par $g_1 * g_2 = g_1 sp(g_1) \cdot g_2 sp(g_2) \cdot (sp(g_1 g_2))^{-1}$. On a facilement que $N \subseteq N(\Phi, F)$, car $p(h) = p(1)$ pour tout $h \in N$. On voit aussi que

$$\Phi(g) = \Phi(1) \Leftrightarrow (sp(g))^{-1} \cdot sp(1) \in Z(G). \tag{19}$$

Soit maintenant $h \in N(\Phi, F)$. Si $Z(G) = 1$, la condition (19) entraîne que h appartient à N.

3 Déformations des groupes cycliques

On peut caractériser les actions rigides des groupes cycliques de la façon suivante:

Proposition 3.1 *i) Soit $G = < x >$ un groupe cyclique d'ordre fini n. Les actions rigides de G sont données par $\alpha(x^i, x^j) = x^{ja^i}$, où $a \in \{0, ..., n-1\}$, $a^n = 1(mod\ n)$ et $a^{a-1} = 1(mod\ n)$.*

ii) La seule action rigide (non-triviale) du groupe des entiers est donnée par $\alpha(m, n) = (-1)^m n$.

Démonstration: i) Fixons $i \in \{0, \ldots, n-1\}$. Alors $x^i \in N(\alpha)$ si et seulement si $\alpha(x^i, x^j) = x^j$, pour tout $j \in \{0, \ldots, n-1\}$, condition équivalente à $a^i \equiv 1(mod\ n)$.

La condition de rigidité pour α s'écrit $x^{-l}\alpha(x^k, x^l) \in N(\alpha)$ pour tous $k, l \in \{0, \ldots, n-1\}$, ou $a^{l(a^k-1)} \equiv 1(mod\ n)$ pour tous k, l. Cette dernière condition est vérifiée par a si et seulement si on a $a^{a-1} \equiv 1(mod\ n)$.

ii) Le groupe des entiers agit sur lui-même par automorphismes seulement par l'action triviale, ou par l'action $\alpha(m, n) = (-1)^m n$, qui sont évidemment des actions rigides.

Dans le cas général, si G est engendré par un element x d'ordre fini n, la loi de composition (4) dans une déformation de G est donnée par $x^i * x^j = x^{i+ja^i+h(i,j)}$, où $M = \{0, ..., n-1\}$, $a \in M$, $a^n = 1(mod\ n)$ et $h : M \times M \to M$, satisfont pour tous $i, j, k \in M$ les conditions:

$$\begin{aligned} h(i,j) + h(i+j,k) &= a^i h(j,k) + h(i,j+k), \\ h(i+ja^i + h(i,j),k) &= h(i+j,k) \\ h(k,i+ja^i+h(i,j)) &= h(k,i+j), \quad \text{et} \\ a^{j(a^i-1)+h(i,j)} &= 1, \end{aligned}$$

où toutes les opérations et égalités sont considerées modulo n.

Le choix $j = 0$ dans ces équations implique que la fonction h vérifie les relations:

$$\begin{aligned} a^{h(0,0)} &= 1(mod\ n), \\ h(i+h(0,0),k) &= h(i,k), \ \text{et} \\ h(k,i+h(0,0)) &= h(k,i). \end{aligned}$$

Cette double périodicité donnée par les dernières relations permet de ramener l'étude de h à celle de sa restriction à $\{0, ..., h(0,0)-1\} \times \{0, ..., h(0,0)-1\}$.

Si (φ, f) est un système rigide de facteurs du groupe des entiers, on peut aussi limiter l'étude de f à $\{0, ..., f(0,0)-1\} \times \{0, ..., f(0,0)-1\}$.

Exemples Soit $C_8 =< x >$ un groupe cyclique d'ordre 8.

i) Le groupe Q_8 des quaternions est la déformation de C_8 par l'action rigide $\alpha(x^i, x^j) = x^{j3^i}$;

ii) Le groupe diédral D_4 est la déformation de C_8 par l'action rigide $\alpha(x^i, x^j) = x^{j7^i}$;

iii) Le groupe abélien $C_2 \times C_4$ est la déformation de C_8 obtenue avec $a = 1$ et h satisfaisant: $h(0,0) = h(0,1) = h(1,0) = 2$, et $h(1,1) = 4$;

iv) Le groupe abélien $C_2 \times C_2 \times C_2$ est la déformation de C_8 obtenue avec $a = 1$ et h satisfaisant: $h(i,0) = h(0,i) = 4$ pour tout i, $h(1,1) = 2$, $h(1,2) = h(2,1) = 4$, $h(1,3) = h(3,1) = h(3,3) = 6$ et $h(2,2) = h(2,3) = h(3,2) = 0$.

Remarque Les actions rigides des groupes cycliques finis ont des applications arithmétiques intéressantes. Dans [2] nous avons obtenu la congruence $a^{a-1} = 1(mod\ n)$ à partir de la construction d'un certain produit double - croisé, et nous l'avons utilisée pour obtenir des conditions pour qu'un entier positif soit premier:

i) Soit n un entier positif. Si la congruence $a^{a-1} = 1(mod\ n)$ n'a pas de solutions avec $1 < a < n$, alors n est un nombre premier;

ii) Si cette congruence n'a pas de solutions avec $8n/15 < a < n$, alors n est un nombre premier;

iii) Soit n un entier positif impair. Si $a = (n+1)/2$ est la seule solution pour cette congruence qui vérifie $1 < a < n$, alors n est un nombre premier.

Soit $\nu(n)$ le nombre de classes d'isomorphisme des groupes d'ordre n, et soient $G_1, ..., G_{\nu(n)}$ des représentants pour ces classes. On peut considérer le graphe orienté Γ_n dont les sommets sont $G_1, ..., G_{\nu(n)}$ et les arcs $G_i \to G_j$ si G_j est une déformation de G_i. S'il existe un groupe simple G_i, il sera représenté dans ce graphe par un sommet isolé. On appelle Γ_n le *graphe de déformation d'ordre n*. En utilisant les exemples précédents, on voit que Γ_8 est connexe.

Remerciements. L' auteur remercie Ş. Basarab, Y. Bugeaud et M. Cipu pour d'utiles discussions. Ce travail a eté soutenu par le programme CERES du Ministère Roumain de l' Education et Recherche, contract no. 39/2002.

Bibliographie

[1] N.C. BONCIOCAT, *Groups bicrossed product by automorphisms*, Mathematical Reports, 3 (53) (2001), p. 145–151.

[2] N.C. BONCIOCAT and M. CIPU, *Conditions for primality arising from a group theoretical construction*, Preprint 2002.

[3] M.JR. HALL, *The Theory of Groups*, The Macmillan Company, New York, 1959.

[4] S. MAJID, *Physics for algebraists: Non commutative and non cocommutative Hopf algebras by a bicrossproduct construction*, J. of Algebra, 130 (1990),No.1, p. 17–63.

[5] M. TAKEUCHI, *Matched pairs of groups and bismash products of Hopf algebras*, Comm. Algebra, 9 (8) (1981), p. 841–882.

Réçu 12.07.2003

Institute of Mathematics
of the Romanian Academy,
P.O. Box 1–764, RO–70700 ,
Bucharest, Romania
E-mail: Nicolae.Bonciocat@imar.ro