PROBLEME PENTRU EXAMENE NAŢIONALE[1)]

Clasa a VII-a

1. Prin împărţirea unui număr natural la 3 obţinem restul 2, iar dacă îl împărţim la 4 obţinem restul 3. Ce rest obţinem dacă împărţim acelaşi număr la 12?

2. Fie x, y numere raţionale astfel încât $x-3+y\sqrt{2}=y+(2x-1)\sqrt{2}$. Aflaţi valorile lui x şi y.

3. Media aritmetică a numerelor pozitive x şi y este 12. Aflaţi numerele ştiind că x este de trei ori mai mare decât y.

4. În triunghiul isoscel ABC ($AB = AC$) măsura unghiului B este egală cu $75°$. Aflaţi perimetrul triunghiului ştiind că distanţa de la B la latura AC este egală cu 4 cm.

5. $\triangle ABC \sim \triangle MNP$ şi raportul ariilor lor este $\dfrac{A_{ABC}}{A_{MNP}} = 2$. Dacă perimetrul $\triangle ABC$ este 16 cm, aflaţi perimetrul $\triangle MNP$.

6. Un triunghi echilateral cu aria de $16\sqrt{3}$ cm^2 este înscris într-un cerc. Aflaţi lungimea acestui cerc.

Clasa a VIII-a

7. Stabiliţi dacă punctele $A(2,3)$, $B(-1,0)$, $C(3,4)$ sunt coliniare.

8. Aflaţi aria triunghiului format de reprezentările grafice ale funcţiilor $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x + 3$, $g(x) = 2x + 6$ şi axa Ox.

9. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie liniară astfel încât:

$$\begin{cases} 3f(1) + 2f(2) = 5 \\ 2f(1) - 3f(2) = -1. \end{cases}$$

Arătaţi că f este constantă.

10. În piramida patrulateră regulată $VABCD$ triunghiul VAC este echilateral de arie $16\sqrt{3}$. Aflaţi volumul piramidei.

11. O prismă regulată triunghiulară are latura bazei de 6 cm. Ştiind că unghiurile formate de planele $(A'BC)$ şi $(C'BC)$ cu planul (ABC) au aceeaşi măsură ca unghiul format de planele $(A'BC)$ şi $(C'BC)$, aflaţi volumul prismei.

12. Fie $ABCA'B'C'$ o prismă triunghiulară regulată. O furnică pleacă din A', merge numai pe feţele laterale, niciodată pe muchii, până ajunge

[1)] La problemele din această rubrică nu se primesc soluţii.

în A. Ce lungime are cel mai scurt drum al furnicii, dacă $AB = 4$ cm şi $AA' = 8$ cm?

Clasa a IX-a

13. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + ax - 1$, cu $a \in \mathbb{R}$. Să se calculeze $f(1)$ ştiind că f este funcţie pară.

14. Determinaţi centrul de simetrie al graficului funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 2$.

15. Să se determine numărul funcţiilor pare:

$$f : \{-3, -1, 0, 1, 3\} \to \{0, 1, 2\}.$$

16. Să se arate că funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{3x+1}{x+1}$ este monotonă.

17. Să se arate că $2\sin 144° + 2\sin 72° + 1 = 0$.

18. Să se arate că o funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că dreptele de ecuaţii $x = 1$ şi $x = 2$ sunt axe de simetrie ale graficului are perioada 2.

Clasa a X-a

19. Să rezolve ecuaţia $\mathrm{tg}x + \mathrm{ctg}x = 2$.

20. Să rezolve ecuaţia $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$.

21. Să rezolve ecuaţia $\sqrt[3]{\sin x} + \sqrt[3]{\cos x} = 0$.

22. Să rezolve ecuaţia $\arcsin x \cdot \arccos x = \dfrac{\pi^2}{16}$.

23. Să se determine numărul funcţiilor $f : \{1, 2, \ldots, 10\} \to \{0, 1\}$ cu proprietatea că $f(1) + f(2) + \cdots + f(10) = 2$.

24. Să se arate că $\arcsin \dfrac{2x}{x^2+1} + 2\,\mathrm{arctg}x = \pi$, oricare ar fi $x \in [1, \infty)$.

Clasa a XI-a

25. Fie A matricea pătratică de ordin 3 cu toate elementele egale cu 1.
a) Să se calculeze $\det(A - 3I_3)$.
b) Să se determine numerele naturale n pentru care $\det(A^n + I_3) = 82$.
c) Să se calculeze inversa matricei $I_3 + A$.

26. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$.
a) Să se studieze variaţia funcţiei.
b) Să se arate că $(x^2 + 1)f''(x)f(x) = f'(x)$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.
c) Să se determine asimptotele graficului funcţiei.

Clasa a XII-a

27. Considerăm polinomul $f = X^3 + 6X^2 + 3X + a \in \mathbb{C}[X]$ având rădăcinile x_1, x_2, x_3.

a) Să se calculeze $(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2$.

b) Să se determine valorile lui $a \in \mathbb{C}$ ştiind că rădăcinile polinomului sunt în progresie aritmetică.

c) Să se determine valorile lui $a \in \mathbb{C}$ ştiind că rădăcinile polinomului sunt în progresie geometrică.

28. Pentru fiecare pereche de numere întregi (p, q), cu $p, q \geq 2$, notăm $I(p,q) = \int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x$.

a) Să se calculeze $I(3,3)$.

b) Să se arate că $I(p,q) = I(q,p)$, oricare ar fi $p, q \geq 2$.

c) Să se arate că $I(p,q) = (q-1)I(p+1, q-1)$, oricare ar fi numerele întregi p, q cu $p \geq 2$, $q \geq 3$.