7. Fie G un grup multiplicativ cu $2n+1$ elemente. Arătaţi că, dacă există o funcţie $f : G \to G$ cu proprietatea că $f(x(f(xy)) = yf(x^2)$, pentru orice $x, y \in G$, atunci grupul este comutativ.

Concurs R.M.CS, 2010

PROBLEME PENTRU EXAMENE NAŢIONALE[1)]

Clasa a VII-a

1. Calculaţi suma numerelor prime mai mici decât 20.

2. Ştiind că 20% din 240 este x, calculaţi 50% din $3x$.

3. Dacă $A(x) = 5x + 4$ şi $B(x) = 3 - 2x$, calculaţi media aritmetică a numerelor $A(1)$ şi $B(1)$.

4. Rezolvaţi ecuaţia $5x + 4 = 39 - 2x$.

5. Dacă a şi b sunt numere naturale nenule şi $\dfrac{2a+3b}{4a-5b} = 6$, calculaţi $\dfrac{b}{a}$.

6. Din cărţile aflate duminică seara într-o librărie, s-au vândut luni o treime, marţi s-au vândut jumătate din cărţile rămase şi astfel miercuri dimineaţa mai erau 680 de cărţi. Calculaţi câte cărţi erau duminică în librărie.

Clasa a VIII-a

7. Ordonaţi crescător numerele $a = 6\sqrt{3}$, $b = 4\sqrt{6}$, $c = 10$.

8. Se consideră mulţimea $A = \left\{0,(6);\ \sqrt{12};\ \sqrt{\left(-\dfrac{2}{3}\right)^2};\ 5\sqrt{7};\ \sqrt{\dfrac{8}{18}}\right\}$. Calculaţi suma numerelor raţionale din mulţimea A.

9. Scrieţi ca interval mulţimea $M = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 - 3x \geq 5\}$.

10. Care este cel mai mare număr întreg mai mic decât $-\sqrt{18}$?

11. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $|6 - 5x| = 4$.

12. Dacă $a = 1 - \sqrt{3}$, arătaţi că $a^2 + 2\sqrt{3}$ este număr natural.

Clasa a IX–a

13. Aflaţi raţia progresiei aritmetice $a_n = 2n + 11$, $n \geq 1$.

14. Determinaţi numărul elementelor mulţimii:

$$A = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 2a + 3b = 100\}.$$

15. Determinaţi numărul laturilor unui poligon convex cu 14 diagonale.

16. Calculaţi suma părţilor întregi ale ecuaţiei $2x^2 - x - 5 = 0$.

[1)] La problemele din această rubrică nu se primesc soluţii.

17 Arătaţi că $2^n \geq n^2 + n + 1$, oricare ar fi numărul $n \geq 5$ natural.

18 Arătaţi că dacă 1 şi $\sqrt{2}$ sunt termeni ai unei progresii aritmetice, atunci $\sqrt{3}$ nu poate fi termen al aceleiaşi progresii.

Clasa a X–a

19. Arătaţi că numerele $\log_2 10$ şi $\sqrt{10}$ au aceeaşi parte întreagă.

20. Arătaţi că numerele $\log_3 6$, 1, $\log_3 12$ sunt în progresie aritmetică.

21. Fie numerele complexe $z_1 = \dfrac{1}{1+\mathrm{i}}$ şi $z_2 = \dfrac{1}{1-\mathrm{i}}$. Calculaţi modulul numărului complex $z_1 - z_2$.

22. Rezolvaţi în mulţimea numerelor complexe ecuaţia $z + 4\bar{z} = 4 - 3\mathrm{i}$.

23. Rezolvaţi în mulţimea numerelor complexe ecuaţia $z^4 - 2z^2 + 2 = 0$.

24. Calculaţi $(1-\sqrt{3}\mathrm{i})^{60} \cdot (1+\mathrm{i})^{20}$.

Clasa a XI–a

25. Considerăm determinantul $\mathrm{d}(x,y) = \begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 1 & x & y \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$, $x, y \in \mathbb{R}$.

a) Rezolvaţi ecuaţia $\mathrm{d}(x,2) = 0$.

b) Arătaţi că există $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq y$, pentru care $\mathrm{d}(x,y) = \mathrm{d}(y,x)$.

c) Determinaţi cel mai mic număr întreg y pentru care $\mathrm{d}(x,y) \neq 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

26. Fie şirul de numere reale definit prin $x_{n+1} = \dfrac{2}{1+x_n}$, $n \geq 1$ şi $x_1 = 2$.

a) Calculaţi x_2, x_3 şi x_4.

b) Arătaţi că şirul $(x_{2n})_{n\geq 1}$ este monoton.

c) Arătaţi că şirul $(x_{2n-1})_{n\geq 1}$ este convergent.

Clasa a XII–a

27. Fie mulţimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-b & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

a) Verificaţi dacă matricea $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$ aparţine lui G.

b) Arătaţi că $XY \in G$, oricare ar fi $X, Y \in G$.

c) Arătaţi că $X^{2011} \in G$, oricare ar fi $X \in G$.

28. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x\mathrm{e}^x$ şi se notează cu F o primitivă a sa.

a) Calculaţi $F(1)$ în cazul în care $F(0) + 1 = 0$.

b) Stabiliţi care dintre numerele $F(\sqrt{2})$ şi $F(\sqrt{3})$ este mai mare.

c) Arătaţi că numărul $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ este întreg.