Este sau nu necesară verificarea?

Andrei, băiatul vecinei, a venit într-o zi să mă întrebe dacă a rezolvat corect o problemă. Iat-o:

Găsiţi funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea $2f(x) + f(5-x) = 3x + 2$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Soluţia lui Andrei:

$2f(x) + f(5-x) = 3x + 2$
$2f(5-x) + f(x) = 3(5-x) + 2$, deci

$$\begin{cases} 2f(x) + f(5-x) = 3x + 2 \\ f(x) + 2f(5-x) = 17 - 3x \end{cases}$$

Rezolvăm sistemul şi obţinem $f(x) = 3x - \dfrac{13}{3}$. $\square$

Este oare în regulă soluţia lui Andrei?

....

Desigur, nu!

Pe lângă aspectul neexplicit al rezolvării (aspect generat de lipsa celor câteva cuvinte care să facă soluţia clară atât pentru autorul ei cât şi pentru cititor), în această soluţie este omisă verificarea faptului că funcţia obţinută are într-adevăr proprietatea din enunţ.

Andrei a fost sceptic la auzul acestui comentariu, replicând că este evident în urma calculelor că funcţia obţinută de el va verifica relaţia dată şi că nu consideră că e cazul să mai facă vreo verificare. A revenit însă la sentimente mai bune după ce şi-a îndreptat atenţia către următorul exemplu:

Determinaţi funcţiile $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ cu proprietatea $f^2(x) - f(x)f(y) + f^2(y) = \dfrac{x+y}{2}$ pentru orice $x, y \in [0, +\infty)$.

Familiarizat probabil de la şcoală cu tehnicile calculatorii care pot tranşa astfel de probleme, Andrei a făcut iute $x = y$ în relaţia dată, obţinând $f^2(x) = x$, de unde, ţinând cont de $f(x) \geq 0$, a dedus că $f(x) = \sqrt{x}$. Considera că a terminat problema, dar, observând la îndemnul meu că $\sqrt{0}^2 - \sqrt{0}\sqrt{1} + \sqrt{1}^2 = 1 \neq \dfrac{1}{2} = \dfrac{0+1}{2}$, deci că $f(x) = \sqrt{x}$ nu are proprietatea dată, a căzut pe gânduri.

- Ce facem acum? m-a întrebat el.

- Ne gândim puţin la ce am făcut până acum. Atunci când ai început să scrii acele relaţii, tu ai considerat în mod tacit că EXISTĂ funcţii cu proprietatea din enunţ. Ar fi fost mai util să faci în mod explicit această precizare (acestea ar fi unele dintre cuvintele de care vorbeam adineauri că ar fi bine să apară în soluţie). Cu această presupunere, abordarea ta calculatorie te-a dus la concluzia că $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, $f(x) = \sqrt{x}$ este singura funcţie care ARE ŞANSE sa verifice condiţia din enunţ. Cum însă ai arătat că ea de fapt nu verifică această condiţie...

- Înseamnă că nu există funcţii cu proprietatea dată!

- Corect! Atrag atenţia asupra faptului că, deşi verificarea pare o simplă formalitate, lucrurile nu stau chiar aşa. De fapt, atunci când noi răspundem la cerinţa unei astfel de probleme facem o afirmaţie de tipul următor: ,,O funcţie f are proprietatea dată în enunţ dacă şi numai dacă f aparţine unei anumite mulţimi (de funcţii!). Din această perspectivă, o soluţie de forma celei prezentate de tine (fără verificare) înseamnă, de fapt, rezolvarea problemei doar pe jumătate. Mai mult, la un test grilă în care ar apărea varianta propusă de mine, probabil că ai lua zero, deoarece ai bifa răspunsul greşit. Concluzie?

- Trebuie să facem verificarea!

- Bine! Vrei, te rog, să rescrii soluţia la problema iniţială, ,,punând cuvinte" şi făcând verificarea?

După câteva ,,negocieri" în legătură cu cuvintele care e bine să fie scrise în soluţie, Andrei a adus soluţia la o formă corectă şi, în plus, mult mai clar prezentată:

Soluţie: Presupunem că există funcţii cu proprietatea dată. Fie $x \in \mathbb{R}$. Conform relaţiei din enunţ,

$$2f(x) + f(5 - x) = 3x + 2.$$

Aplicând relaţia dată şi pentru numărul real $5 - x$, obţinem

$$2f(5 - x) + f(x) = 3(5 - x) + 2.$$

Am obţinut prin urmare sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} 2f(x) + f(5 - x) = 3x + 2 \\ f(x) + 2f(5 - x) = 17 - 3x. \end{cases}$$

Rezolvând acest sistem, obţinem $f(x) = 3x - \dfrac{13}{3}$. Prin urmare, singura funcţie care poate verifica proprietatea din enunţ este $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - \dfrac{13}{3}$.

Pentru această funcţie f şi $x \in \mathbb{R}$ arbitrar avem:

$$2f(x) + f(5-x) = 2\left(3x - \frac{13}{3}\right) + 3(5-x) - \frac{13}{3} = 3x + 2,$$

deci f are într-adevăr proprietatea din enunţ. Conform celor de mai sus, ea este şi singura cu această proprietate. $\square$

Gabriel Mincu